Aufgabe 23 (9 Punkte)**.** In der folgenden Aufgabe sei mit baryzentrischen Koordinaten immer die baryzentrischen Koordinaten bzgl. fest gewählten Punkten $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ gemeint.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gerade in baryzentrischen Koordinaten eine lineare homogene Gleichung hat.[1] *Hinweis: Fassen Sie die beiden Geraden AB und AC als Koordinatensystem auf.*

(b) Seien $P = (\lambda_1, \mu_1, \sigma_1)$ und $Q = (\lambda_2, \mu_2, \sigma_2)$ zwei Punkte. Zeigen Sie, dass jeder Punkt auf der Gerade durch P und Q von der Form

$$(s\lambda_1 + t\lambda_2, s\mu_1 + t\mu_2, s\sigma_1 + t\sigma_2)$$

ist.

(c) Seien $u_i\lambda + v_i\mu + w_i\sigma = 0$, $i = 1, 2$, zwei Geradengleichungen. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt zweier Punkte in baryzentrischen Koordinaten.

(e) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden AB, BC und AC sowie die Koordinaten der Seitenmittelpunkte.

Lösung.

(a) Wir folgen dem Hinweis und fassen die Geraden AB und AC als Koordinatensystem mit Nullpunkt A auf. Bzgl. dieses Koordinatensystems hat dann A die Koordinaten $(0, 0)$, B die Koordinaten $(1, 0)$ und C die Koordinaten $(0, 1)$, d.h. wenn wir die Koordinaten mit (x, y) bezeichnen, so erhalten wir folgende Entsprechungen:

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1 - \mu - \sigma = 1 - x - y \\
&\mu = x \\
&\sigma = y.
\end{aligned}$$

Eine Gerade in diesem Koordinatensystem ist von der Form $ax + by + c = 0$, also wenn wir die Gleichheit $\lambda + \mu + \sigma = 1$ einsetzen, ergibt das

$$a\mu + b\sigma + c(\lambda + \mu + \sigma) = 0$$

[1] d.h. eine Gleichung der Form $u\lambda + v\mu + w\sigma$, wobei (λ, μ, σ) die baryzentrischen Koordinaten darstellen.

was der homogenen linearen Gleichung

$$c\lambda + (a+c)\mu + (b+c)\sigma = 0$$

entspricht.

Alternativ kann man explizit nachrechnen, dass die Gerade durch die Punkte $P = (\lambda_1, \mu_1, \sigma_1)$ und $Q = (\lambda_2, \mu_2, \sigma_2)$ durch die Gleichung

$$(\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1)\lambda + (\sigma_1\lambda_2 - \sigma_2\lambda_1)\mu + (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\sigma = 0$$

gegeben ist.

(b) Jeder Punkt $R = (\lambda, \mu, \sigma)$ auf der Gerade PQ ist gegeben durch $P + u \cdot \overrightarrow{PQ}$ mit $u \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
R &= P + u \cdot \overrightarrow{PQ} \\
&= \lambda_1 A + \mu_1 B + \sigma_1 C + u \cdot (Q - P) \\
&= \lambda_1 A + \mu_1 B + \sigma_1 C + u(\mu_2 - \mu_1)(B - A) + u(\sigma_2 - \sigma_1)(C - A) \\
&= (\lambda_1 - u(\mu_2 - \mu_1) - u(\sigma_2 - \sigma_1))A + (\mu_1 + u(\mu_2 - \mu_1))B + (\sigma_1 + u(\sigma_2 - \sigma_1))C \\
&= ((1-u)\lambda_1 + u\lambda_2)A + ((1-u)\mu_1 + u\mu_2)B + ((1-u)\sigma_1 + u\sigma_2)C,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\mu_1 + \sigma_1) = 1 - \lambda_1$ und $-\lambda_2 - \mu_2 = \lambda_2 - 1$. Wir setzen $s = 1 - u$ und $t = u$. Dann gilt

$$R = (\lambda, \sigma, \mu) = (s\lambda_1 + t\lambda_2, s\mu_1 + t\mu_2, s\sigma_1 + t\sigma_2).$$

(c) Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $u_1 \neq 0$ (für $v_1 \neq 0$ bzw. $w_1 \neq 0$ kann man analog verfahren). Dann gilt für den Schnittpunkt (λ, μ, σ):

$$\lambda = \frac{-v_1\mu - w_1\sigma}{u_1}.$$

Einsetzen in der zweiten Geradengleichung ergibt dann

$$u_2\Big(\frac{-v_1\mu - w_1\sigma}{u_1}\Big) + v_2\mu + w_2\sigma = 0$$

$$(*) \qquad (u_1v_2 - v_1u_2)\mu + (u_1w_2 - w_1u_2)\sigma = 0.$$

Es genügt, die nicht-normierten Koordinaten des Schnittpunktes zu bestimmen, d.h. Koordinaten (λ, μ, σ) mit der Eigenschaft, dass

$$\Big(\frac{\lambda}{\lambda + \mu + \sigma}, \frac{\mu}{\lambda + \mu + \sigma}, \frac{\sigma}{\lambda + \mu + \sigma}\Big)$$

die gesuchten normierten baryzentrischen Koordinaten sind. Die Gleichung $(*)$ ist offensichtlich erfüllt für

$$\mu = w_1u_2 - u_1w_2$$
$$\sigma = u_1v_2 - v_1u_2.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-v_1\mu - w_1\sigma}{u_1} \\ &= \frac{-v_1w_1u_2 + u_1v_1w_2 - u_1w_1v_2 + v_1w_1u_2}{u_1} \\ &= \frac{u_1(v_1w_2 - w_1v_2}{u_1} \\ &= v_1w_2 - w_1v_2.\end{aligned}$$

(d) Seien $P = (\lambda_1, \mu_1, \sigma_1)$ und $Q = (\lambda_2, \mu_2, \sigma_2)$ zwei gegebene Punkte. Dann sind die Koordinaten des Mittelpunktes von P und Q durch

$$\Big(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\Big)$$

gegeben. Dies folgt direkt aus (b), wenn wir $u = \frac{1}{2}$ einsetzen.

(e) Die Gleichungen von AB, BC und AC sind $\sigma = 0, \lambda = 0$ und $\mu = 0$. Die Koordinaten der Seitenmittelpunkte sind $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ sowie $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** Gegeben seien zwei Halbgeraden h_1, h_2, die von einem Punkt S ausgehen, sowie Punkte P_1, Q_1 auf h_1 und P_2, Q_2 auf h_2.

(a) Zeigen Sie folgende Umkehrung des ersten Strahlensatzes: Gilt $\overline{SP_1} : \overline{SQ_1} = \overline{SP_2} : \overline{SQ_2}$, so sind die Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel.

(b) Der zweite Strahlensatz besagt, dass $\overline{SP_1} : \overline{SQ_1} = \overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2}$ gilt, falls die Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel sind. Zeigen Sie, dass die Umkehrung dieses Satzes im Allgemeinen falsch ist.

Lösung.

(a) Wir nehmen an, es gelte $\overline{SP_1} : \overline{SQ_1} = \overline{SP_2} : \overline{SQ_2}$. Dann gibt es $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\overrightarrow{SP_1} = c \cdot \overrightarrow{SQ_1}$ und $S\vec{P}_2 = c \cdot S\vec{Q}_2$. Somit ist

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{SP_1} + \overrightarrow{SP_2} = -c\overrightarrow{SQ_1} + \overrightarrow{SQ_2} = c(\overrightarrow{SQ_1} + \overrightarrow{SQ_2}) = c \cdot \overrightarrow{Q_1Q_2}.$$

Somit sind P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel.

(b) Wir geben ein Gegenbeispiel an. Seien $S = Q_2 = (0,0), P_1 = (1,0), P_2 = (1,1)$ und $Q_1 = (2,0)$. Dann gilt offensichtlich $\overline{SP_1} : \overline{SQ_1} = \frac{1}{2} = \overline{P_1P_2} :$

$\overline{Q_1Q_2}$. Andrerseits ist $P_1 \in P_1P_1 \cap Q_1Q_2$ und somit sind P_1P_2 und Q_1Q_2 nicht parallel.

Aufgabe 25 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei Innenwinkel gleich sind.

(b) Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Innenwinkel gleich sind.

Lösung. Wir benutzen die Standardnotationen für ein Dreieck ΔABC mit Seiten a, b, c und Winkeln α, β, γ.

(a) Wir nehmen zuerst an, dass das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist mit gleich langen Seiten a und b. Dann folgt aus dem Sinussatz $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$. Aus $a = b$ folgt dann $\sin\alpha = \sin\beta$. Da $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, folgt $\alpha = \beta$.

Die Rückrichtung folgt trivialerweise aus dem Sinussatz.

(b) Folgt direket aus (a).

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie die Formel $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. *Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Gleichheit* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ *und eine analoge Gleicheit für* $\cos^2 x$.

(b) Folgern Sie aus (a) und dem Kosinussatz den *Tangensquadratsatz*: Sind a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks und α der Winkel zwischen den Seiten der Längen b und c und ist p der halbe Dreiecksumfang, so gilt

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}.$$

Lösung.

(a) Wir folgen dem Hinweis. Es gilt

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x &= 1 + \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= 1 - \cos(2x) \end{aligned}$$

gemäss dem Additionstheorem für den Kosinus. Somit folgt $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Analog zeigt man

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1 + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 + \cos(2x) \end{aligned}$$

und somit $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$. Wir setzen jetzt $x = \frac{\alpha}{2}$ ein und erhalten

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

(b) Der halbe Dreiecksumfang ist gegeben durch $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Aus (a) und dem Kosinussatz folgt dann

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(b+c-a)} = \frac{\frac{1}{2}(a+b-c)\frac{1}{2}(a-b+c)}{\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}.$$