Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Lösungen Übungsblatt 5

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

(a) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung).*

(b) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$ *(Parallelogrammungleichung).*

Lösung.

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt aus der Dreieckunsungleichung:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

und somit $|x| - |y| \leq |x - y|$. Analog zeigt man $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - x|$. Daraus folgt die Behauptung.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|x + y|^2 + |x - y|^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 + \sum_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_iy_i + y_i^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(2x_i^2 + 2y_i^2) \\
&= 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \\
&= 2(|x|^2 + |y|^2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 21 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \qquad \textit{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung).}$$

Für welche $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt Gleichheit?

Lösung. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Falls $y = 0$, so ist die Behauptung trivial. Sei also $y \neq 0$. Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&0 \leq |x - \lambda y|^2 = |x|^2 + \lambda^2|y|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle \\
\iff \quad &2\lambda\frac{|y|}{|x|}\langle x, y\rangle \leq |x| \cdot |y| + \lambda^2\frac{|y|^3}{|x|}.
\end{aligned}$$

Für $\lambda = \frac{|x|}{|y|}$ gilt dann

$$2\langle x, y\rangle \leq 2|x| \cdot |y|.$$

Analog gilt dann $-\langle x, y\rangle = \langle -x, y\rangle \leq |x| \cdot |y|$. Dies zeigt die Behauptung. Gleichheit gilt genau dann, wenn $x = \frac{|x|}{|y|}y$, i.e. wenn x und y linear abhängig sind.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.** Eine *parametrisierte Kurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die *Länge* von γ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Eine parametrisierte Kurve *in Polarkoordinaten* ist von der Form $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ in $[0, 2\pi)$; die Kurvenpunkte sind dann gegeben durch die Polarkoordinaten $(\varphi, r(\varphi))$ für $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Berechnen Sie die Länge einer Kurve in Polarkoordinaten.

Lösung.

(a) Es gilt $\dot\gamma(t) = (-e^t \sin t + e^t \cos t, e^t \cos t + e^t \sin t)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} |\dot\gamma(t)| &= \sqrt{(e^t)^2(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + (e^t)^2(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t))} \\ &= \sqrt{2(e^t)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{2} \cdot e^t. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot e^t dt = \sqrt{2}[e^t]_0^{2\pi} = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1).$$

(b) Wir setzen $\gamma(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$. Dann gilt

$$\dot\gamma(\varphi) = (\dot r(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \dot r(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)$$

und somit

$$\begin{aligned} |\dot\gamma(\varphi)| &= \sqrt{\dot r^2(\varphi)(\cos^2 \varphi - 2\dot\varphi r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r^2(\varphi) \sin^2 \varphi} \\ &\overline{+\dot r^2(\varphi) \sin^2 \varphi + 2\dot r(\varphi) r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} \\ &= \sqrt{\dot r^2(\varphi)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2(\varphi)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \\ &= \sqrt{\dot r^2(\varphi) + r^2(\varphi).} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot r^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$.

Aufgabe 23 (8 Punkte)**.** Zwei parametrisierte Kurven $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ definieren dieselbe Kurve, falls es eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung – eine sogenannte *Parametertransformation* – $\tau : [a, b] \to [c, d]$ gibt mit $\gamma = \delta \circ \tau$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig differenzierbar ist.

(a) Sei $\tau : [a, b] \to [c, d]$ eine Parametertransformation. Zeigen Sie, dass entweder $\dot{\tau}(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ oder $\dot{\tau}(t) < 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Länge einer Kurve nicht von der Parametrisierung abhängt.

(c) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heisst *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls für alle $s < t$ in $[a, b]$, $L(\gamma \restriction [s, t]) = t - s$. Zeigen Sie, dass es für jede parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge gibt. *Hinweis: Betrachten Sie die Umkehrabbildung von* $l(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(s)| ds$.

(d) Geben Sie eine Parametertransformation τ der Kurve γ aus Aufgabe 22 (a) an, sodass $\gamma \circ \tau$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Lösung.

(a) Falls die Behauptung falsch ist, so gibt es $t_1, t_2 \in [a, b]$ mit $\dot{\tau}(t_1) < 0$ und $\dot{\tau}(t_2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann t_3 mit $\dot{\tau}(t_3) = 0$. Es gilt $(\tau^{-1} \circ \tau)(t) = t$ und Ableiten liefet also

$$1 = (\tau^{-1} \circ \tau)'(t) = (\tau^{-1})'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)$$

für alle $t \in [a, b]$. insbesondere folgt also $\dot{\tau}(t_3) \neq 0$, ein Widerspruch.

(b) Sei $\tau : [c, d] \to [a, b]$ eine Parametertransformation und $\delta = \gamma \circ \tau$. Dann gilt

$$L(\delta) = \int_c^d |\dot{\delta}(t)| dt = \int_c^d |\dot{\gamma}(\tau(t)) \cdot \tau'(t)| dt = \int_c^d |\dot{\gamma}(\tau(t))| \cdot |\tau'(t)| dt.$$

Nach Teilaufgabe (a) können wir annehmen, dass $\tau'(t) > 0$ für alle $t \in [c, d]$ (der andere Fall verläuft analog). Wir substituieren $s = \tau(t)$. Dann gilt

$$L(\delta) = \int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = L(\gamma)$$

wie gewünscht.

(c) Wir folgen dem Hinweis und setzen

$$l(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(s)| ds.$$

Es gilt $\dot{l}(t) = |\dot{\gamma}(t)| > 0$ für alle $t \in [a, b]$, somit ist l streng monoton wachsend und insbesondere bijektiv. Wir setzen $I = l([a, b])$ und $\tau = l^{-1} :$

$J \to [a,b]$ und $\delta = \gamma \circ \tau$. Aus der Kettenregel und der Regel für die Ableitung von Umkehrfunktionen folgt

$$\dot{\delta}(t) = \dot{\gamma}(\tau(t))\tau'(t) = \dot{\gamma}(\tau(t))\frac{1}{l'(\tau(t))} = \frac{\dot{\gamma}(\tau(t))}{|\dot{\gamma}(\tau(t))|}.$$

Somit gilt $|\dot{\delta}(t)| = 1$ für alle $t \in J$. Somit ist δ nach Bogenlänge parametrisiert.

(d) Aus Aufgabe 22(a) wissen wir, dass $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{2} \cdot e^t$. Damit erhalten wir

$$l(t) = \int_0^t \sqrt{2}e^s ds = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Wir müssen die Umkehrabbildung von l berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}(e^t - 1) = s \\ \iff \quad & e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \\ \iff \quad & t = \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1). \end{aligned}$$

Somit ist also $\tau(s) = \ln(\frac{s}{\sqrt{2}} + 1)$ eine Parametertransformation, sodass $\gamma \circ \tau$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.