Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf Übungsblatt 5

Aufgabe 16 (6 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung aus (a) keine rationale Lösungen besitzt.

(c) Ist das reguläre Siebeneck konstruierbar? Beweisen oder widerlegen Sie.

Hinweis für (a): Zeigen Sie zuerst die Gleichheiten $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ und $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

Lösung.

(a) Wir folgen zuerst dem Hinweis und zeigen

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1\\
&(2) \quad \cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst (1) mit Hilfe des Additionstheorems für den Kosinus.

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta\\
&= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1.
\end{aligned}$$

Eigenschaft (2) folgt ebenfalls aus den Additionstheoremen und aus (1).

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta+\theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin\theta\\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\
&= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.
\end{aligned}$$

Sei nun $\theta = \frac{2\pi}{7}$. Offensichtlich gelten

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos(6\theta)\\
\cos(2\theta) &= \cos(5\theta)\\
\cos(3\theta) &= \cos(4\theta)
\end{aligned}$$

und somit $0 = \sum_{k=0}^{6} \cos(k\theta) = 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + 2\cos(3\theta)$. Unter Benutzung von (1) und (2) erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + 2\cos(3\theta) \\ &= 1 + 2\cos\theta + 2\cos(2\theta) + (4\cos^2\theta - 2) + (8\cos^3\theta - 6\cos\theta) \\ &= 8\cos^3\theta + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta - 1 \\ &= x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

für $x = 2\cos(\theta)$.

(b) Angenommen, $y = \frac{n}{m}$ ist eine Nullstelle von

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

mit $n, m \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $m \geq 1$. Durch Erweitern mit m^3 erhalten wir $n^3 + n^2m - 2nm^2 - m^3 = 0$. Daraus folgt aber, dass a ein Teiler von b und b ein Teiler von a ist. Somit ist $y = \pm 1$, dies ist aber keine Nullstelle von $p(x)$.

(c) Das reguläre Siebeneck ist genau dann konstruierbar, wenn $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ konstruierbar ist. Nach (a) ist $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ eine Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Wir behaupten, dass keine Nullstelle von $p(x)$ konstruierbar ist. Falls doch, so sei $n \in \mathbb{N}$ minimal, sodass $p(x)$ eine Nullstelle $y \in K_{n+1}$ hat. Es gibt also ein $a, b, c \in K_n$, sodass $y = a + b\sqrt{c}$ mit $b \neq 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 &= y^3 + y^2 - 2y - 1 \\ &= (a^3 + 3ab^2c + a^2 + b^2c - 2b - 1) + (3a^2b + b^3c + 2ab - 2b)\sqrt{c} =: u + v\sqrt{c} \end{aligned}$$

Falls $v \neq 0$, so ist $\sqrt{c} = -\frac{u}{v} \in K_n$, ein Widerspruch. Also ist $u = v = 0$. Dann gilt aber $c = \frac{2-2a-3a^2}{b^2}$ und durch Einsetzen in $u = 0$ erhalten wir $a^3 + ab - 6a^2 - 9a^3 + a^2 + 2 - 2a - 3a^2 - 2a - 1 = -8a^3 - 8a^2 + 2a + 1 = 0$. Somit ist aber $\frac{1}{2a}$ eine Nullstelle von $p(x)$ in K_n, ein Widerspruch.

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Ist z der Schnittpunkt einer Geraden in $G(K_n)$ und eines Kreises aus $K(K_n)$, so gilt $z \in K_{n+1}$.

(b) Ist z der Schnittpunkt zweier Kreise in $K(K_n)$, so ist $z \in K_{n+1}$.

Lösung.

(a) Sei

$$g = \{z_0 + \lambda z_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

eine Gerade mit $z_0, z_1 \in K_n$ und $z_1 \neq 0$ und sei k der Kreis mit Mittelpunkt $z_2 \in K_n$ und Radius $r \in K_n$. Dann ist $z \in k$ genau dann, wenn $|z - z_2|^2 = r^2$. Für die Schnittpunkte $z_0 + \lambda z_1$ von g und k gilt dann

$$\begin{aligned} & |z_0 - z_2 + \lambda z_1|^2 = r^2 \\ \iff\quad & \lambda^2 |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda z_1(z_0 - z_2)) + |z_0 - z_2|^2 = r^2 \\ \iff\quad & \lambda^2 |z_1|^2 + 2\lambda \mathrm{Re}(z_1(z_0 - z_2)) + |z_0 - z_2|^2 = 0 \\ \iff\quad & \lambda^2 + 2\lambda \mathrm{Re}\Big(\frac{z_0 - z_2}{\overline{z_1}}\Big) + \frac{|z_0 - z_2|^2 - r^2}{|z_1|^2} = 0 \end{aligned}$$

und somit ist λ eine Lösung einer quadratischen Gleichung mit Koeffizienten in K_n und damit in K_{n+1}.

(b) Seien k_0, k_1 Kreise mit Mittelpunkten $z_0 = x_0 + iy_0, z_1 = x_1 + iy_1 \in K_n$ und Radien $r_0, r_1 \in K_n$. Dann gilt für die Schnittpunkte $z = x + iy$ von k_0 und k_1

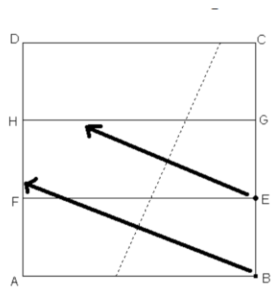
$$\begin{aligned} & |z - z_0|^2 = r_0^2 \text{ und } |z - z_1|^2 = r_1^2 \\ \iff\quad & |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z_0 z) + |z_0|^2 = r_0^2 \text{ und } |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 z) + |z_1|^2 = r_1^2. \end{aligned}$$

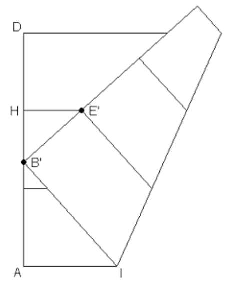
Wenn wir die Differenz der beiden Gleichungen bilden, erhalten wir eine lineare Gleichung

$$\begin{aligned} & 2\mathrm{Re}(z(z_1 - z_0)) + |z_0|^2 - |z_1|^2 = r_0^2 - r_1^2 \\ \iff\quad & 2x(x_1 - x_0) - 2y(y_1 - y_0) = c \in K_n. \end{aligned}$$

Somit ist z also der Schnittpunkt eines Kreises und einer Geraden in $G(K_n)$ und damit gemäss (a) in K_{n+1}.

Aufgabe 18 (5 Punkte)**.** Eine weitere Methode der geometrischen Konstruktion ist gegeben durch *Origami-Faltkonstruktionen* aus einem quadratischen Papier. Aus dem *Satz von Haga* folgt, dass jede gegebene Strecke mittels einer Faltkonstruktion in n Teile zerlegt werden kann. Die folgende Konstruktion soll das klassische Problem der Würfelverdoppelung lösen.





Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das gegebene Quadrat die Seitenlänge 3 hat.

(a) Seien $a = \overline{B'D}, b = \overline{AB'}, c = \overline{AI}$ und $d = \overline{B'I}$. Zeigen Sie, dass $c = \frac{3a-3}{a}$ und $d = \frac{3}{a}$.

(b) Verwenden Sie den Satz von Pythagoras, um zu zeigen, dass a der kubischen Gleichung $3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 = 0$ genügt.

(c) Folgern Sie, dass $a^3 = 2b^3$ und erläutern Sie, wie man dadurch $\sqrt[3]{2}$ konstruieren kann.

Hinweis für (c): Benutzen Sie den Strahlensatz.

Lösung.

(a) Der Winkel $\alpha = \sphericalangle B'E'H$ ist gleich $\sphericalangle AB'I$, und somit gilt

$$\frac{c}{d} = \sin(\alpha) = \frac{\overline{B'H}}{\overline{B'E'}} = \frac{a-1}{1} = a - 1.$$

Andrerseits gilt $a + b = 3 = c + d$. Das ergibt dann $\frac{c}{3-c} = a - 1$ und somit $c = \frac{3a-3}{a}$. Analog gilt $\frac{3-d}{d} = a - 1$ und damit $d = \frac{3}{a}$.

(b) Wir wenden den Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck $\Delta AB'I$ an und erhalten

$$\frac{9}{a^2} = d^2 = b^2 + c^2 = (3-a)^2 + \frac{(3a-3)^2}{a^2}$$

und durch Erweitern

$$\begin{aligned} 9 &= (3-a)^2 a^2 + (3a-3)^2 \\ &= 9a^2 - 6a^3 + a^4 + 9a^2 - 18a + 9 \end{aligned}$$

und somit

$$a^4 - 6a^3 + 27a^2 - 18a = 0.$$

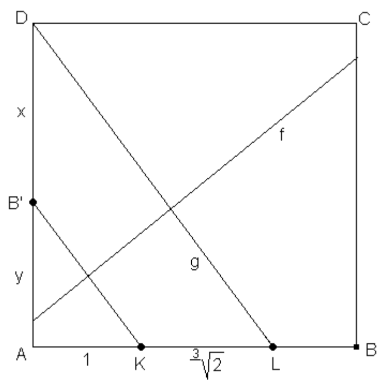
Da offensichtlich $a \neq 0$ gilt, erhalten wir

$$a^3 - 6a^2 + 18a - 18 = 0.$$

(c) Wir benutzen die Gleichung aus (b). Es gilt

$$\begin{aligned} 2b^3 &= 2(3-a)^3 = 54 - 54a + 18a^2 - 2a^3 \\ &= 54 - 54a + 18a^2 - (12a^2 - 36a + 36) \\ &= 6a^2 - 18a + 18 \\ &= a^3. \end{aligned}$$

Damit gilt $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$. Wir falten nun weiter wie folgt:



Sei K der Punkt, der durch Dritteln der Seite AB entsteht. Danach falten wir die Mittelsenkrechte f zu $B'K$ und das Lot g zu f durch D und erhalten den Punkt L auf $g \cap AB$. Nach dem 1. Strahlensatz gilt dann

$$\overline{KL} = \frac{\overline{KL}}{1} = \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}.$$

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heisst *euklidische Bewegung*, falls

$$||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass jede Abbildung der Form $\varphi_A : x \mapsto Ax$ für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

i.e. $\varphi_A(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, eine euklidische Bewegung ist, genau denn wenn $A^T A = E_2$, i.e. wenn folgende Gleichheiten gelten:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \\ b^2 + d^2 &= 1 \\ ab + cd &= 0. \end{aligned}$$

(b) Folgern Sie, dass falls φ_A eine euklidische Bewegung ist, es einen Winkel α gibt, mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(c) Eine euklidische Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heisst *linear*, falls zusätzlich für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
(2) $\varphi(ax) = a \cdot \varphi(x)$.
Zeigen Sie, dass jede lineare euklidische Bewegung von der Form φ_A ist.

(d) Erläutern Sie die geometrische Interpretation von linearen euklidischen Bewegungen anhand einer Skizze.

Lösung.

(a) Sei φ_A eine euklidische Bewegung. Dann gelten

$$\begin{aligned} &(a^2 + c^2)(x_1 - y_1)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (b^2 + d^2)(x_1 - y_1)^2 \\ =&(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt die gesuchten Gleichheiten.

(b) Die Zahl $a + ic \in \mathbb{C}$ hat Betrag 1 und liegt somit auf dem Einheitskreis. Somit gibt es einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $a + ic = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Analog gibt es einen Winkel $\beta \in [0, 2\pi)$ mit $b = \sin\beta$ und $d = \cos\beta$. Die Gleichung $ab + cd = 0$ und eines der Additionstheorem liefern dann

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta = 0.$$

Somit gilt entweder $\beta = -\alpha$ oder $\beta = \pi - \alpha$. Im ersten Fall erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und im zweiten Fall erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(c) Sei φ eine lineare euklidische Bewegung. Seien $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$. Dann gilt $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2)$. Wir setzen $\varphi(e_1) = (a, c)$ und $\varphi(e_2) = (b, d)$. Dann gilt $\varphi = \varphi_A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(d) Im ersten Fall von Teilaufgabe (b) handelt sich um eine Drehung um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn, und im zweiten Fall um die Spiegelung an der Geraden mit Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x-Achse.

Abbildungen: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf