Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 4

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$, mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$, ein Körper ist.

(b) Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heisst *algebraisch über* $\mathbb{Q}$, falls es ein nicht-triviales Polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ gibt mit $f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass nicht alle reellen Zahlen algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Lösung.

(a) Alle Axiome sind trivial ausser die Existenz eines multiplikativen Inversen. Dazu sei $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ gegeben. Dann gilt

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$$

und somit

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

(b) Da es überabzählbar viele reelle Zahlen gibt, genügt es zu zeigen, dass die Menge $\mathbb{A}$ der Zahlen in $\mathbb{C}$, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind, abzählbar ist.

Sei $\mathbb{Q}_n[x]$ die Menge aller Polynome in $\mathbb{Q}[x]$ vom Grad $< n$. Dann ist $|\mathbb{Q}_n[x]| = |\mathbb{Q}^n|$ und somit abzählbar (als endliches Produkt abzählbarer Mengen). Somit ist auch $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[x]$ als abzählbares Produkt abzählbarer Mengen abzählbar. Andrerseits ist für jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ die Menge

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$$

endlich, und somit ist

$$\mathbb{A} = \bigcup_{f(x) \in \mathbb{Q}[x]} Z(f)$$

auch abzählbar.

Aufgabe 13 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass folgende Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchgeführt können:

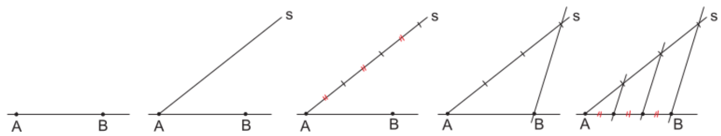
(a) die Dreiteilung einer gegebenen Strecke.

(b) die Parallele zu einer gegebenen Gerade g durch einen Punkt P.

(c) das reguläre Fünfeck.

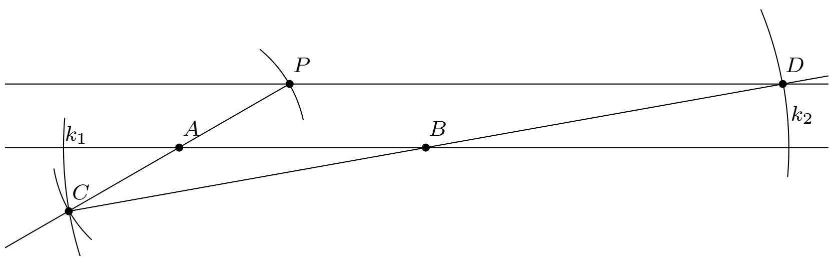
Lösung.

(a) Die Konstruktion geht wie folgt:



wobei s eine beliebige konstruierbare Gerade durch A ist vom Winkel $< 90°$ und die Streckenabschnitte auf s von beliebiger konstruierbarer Länge (z.B. Länge 1) sind, die mit dem Zirkel von A aus abgemessen werden.

(b) Eine Parallele durch die Gerade g gegeben durch die Punkte A, B durch den Punkt P konstruiert man wie folgt:



1. Kreis k_1 um A mit Radius $\overline{AP}$.
2. Gerade $PA \longrightarrow$ Schnittpunkt C von k_1 und PA.
3. Kreis k_2 um B mit Radius $\overline{BC}$.
4. Gerade $CB \longrightarrow$ Schnittpunkt D von k_2 und CB.

Die Gerade PD ist dann parallel zur Gerade AB.

(c) Um ein reguläres Fünfeck zu konstruieren, müssen wir den Winkel $\varphi = \frac{2\pi}{5}$ konstruieren können. Dazu reicht es aber, sowohl $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ zu konstruieren. Gemäss Aufgabe 2 (b) sind $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aber als geschachtelte Wurzelausdrücke mit rationalen Radikanden darstellbar und sind somit konstruierbar.

Aufgabe 14 (3 Punkte)**.** Der Satz von Mohr-Mascheroni besagt, dass jede geometrische Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden kann, auch nur mit Hilfe eines Zirkels durchgeführt werden kann. Zeigen Sie folgenden Teil des Satzes von Mohr-Mascheroni:

Die beiden Schnittpunkte einer Gerade (gegeben durch zwei Punkte P, Q) und eines Kreises (gegeben durch dessen Mittelpunkt M und dessen Radius r) können alleine mit dem Zirkel aus P, Q, M, r konstruiert werden.

Lösung. Wir konstruieren einen Kreis k_1 um P mit Radius $\overline{PM}$ sowie einen Kreis k_2 um Q mit Radius $\overline{QM}$ und erhalten neben M einen weiteren Schnittpunkt M' von k_1 und k_2. Dies ist dann der Spiegelpunkt von M an der Gerade g durch P und Q. Danach konstruieren wir einen Kreis k_3 um M' mit Radius r und erhalten Schnittpunkte S_1 und S_2 von k_3 und dem Kreis k um M mit Radius r. S_1 und S_2 sind die gesuchten Schnittpunkte von g und k.

Aufgabe 15 (5 Punkte)**.**

(a) Sei n eine natürliche Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist. Zeigen Sie, dass der Winkel $\frac{2\pi}{n}$ mit Zirkel und Lineal dreigeteilt werden kann.
(b) Ein *markiertes Lineal* ist ein Lineal mit zwei beliebigen darauf markierten Punkten. Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe von einem Zirkel und einem markierten Lineal jeder Winkel dreiteilen lässt.

Lösung.

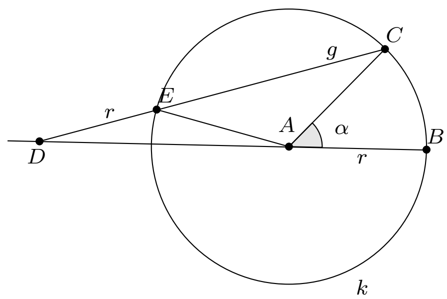
(a) Da n und 3 teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $na + 3b = 1$. Somit gilt

$$\frac{2\pi}{3n} = \frac{2\pi}{3n} \cdot (na + 3b) = \frac{2\pi}{3} \cdot a + \frac{2\pi}{n} \cdot b.$$

Da der Winkel $\frac{2\pi}{n}$ gegeben ist, und der Winkel $\frac{2\pi}{3} = 120°$ konstruierbar ist, ist auch der Winkel $\frac{2\pi}{3n}$ konstruierbar.

Einen Winkel von $60°$ konstruiert man, indem man einen Kreis k_1 um 0 mit Radius 1 macht, dann einen Kreis k_2 um 1 mit Radius 1 macht; der Schnittpunkt P von k_1 und k_2 bildet dann gemeinsam mit den Punkten 0 und 1 ein gleichseitiges Dreieck. Um einen Winkel von $120°$ zu erhalten, verdoppelt man den Winkel $60°$.

(b) Gegeben sei der Winkel α am Punkt A. Sei r die Strecke zwischen den markierten Punkten auf dem Lineal.



1. Konstruiere einen Kreis k um A mit Radius r. Seien B, C die Punkte auf k, sodass der Winkel $\sphericalangle BAC$ genau α ist.
2. Ziehe eine Gerade g von B aus, die die Gerade AB schneidet, sodass der Teil von g, der ausserhalb von k liegt bis zum Schnittpunkt D mit der Gerade AB genau die Länge r hat.
3. Sei E der Schnittpunkt von g und k.

Dann sind die Dreiecke ΔEAC und ΔDEA beide gleichschenklig. Seien $\beta = \sphericalangle DAE$, $\gamma = \sphericalangle AEC$ und $\delta = \sphericalangle EAC$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha &= 180^\circ - \delta - \beta \\
&= 180^\circ - (180^\circ - 2\gamma) - \beta \\
&= 2\gamma - \beta \\
&= 3\beta,
\end{aligned}$$

da $2\beta = \gamma$. Somit kann α dreigeteilt werden und $\frac{\alpha}{3} = \beta$.