Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Aufgabe 9 (10 Punkte)**.** Das *Horner-Schema* ist eine Methode zum Auswerten eines Polynoms $\sum_{i=0}^{n} a_i^0 x^i$ an der Stelle $s \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n^1 &= a_n^0 \\ a_i^1 &= a_i^0 + a_{i+1}^1 \cdot s \text{ für } i \in \{n-1, \ldots, 0\}. \end{aligned}$$

Sei $p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^1 x^{i-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $p(s) = a_0^1$.

(b) Beweisen Sie die Gleichheit $p(x) = (x-s)p_{n-1}(x) + p(s)$.

(c) Vergleichen Sie das Horner-Schema und die übliche Auswertung von Polynomen bzgl. Effizienz, indem Sie die Anzahl Multiplikationen und Additionen vergleichen.

(d) Das verallgemeinerte Horner-Schema ist gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n^k &= a_n^0 \\ a_i^{k+1} &= a_i^k + a_{i+1}^{k+1} \end{aligned}$$

für $k = 0, \ldots, n$ und $i = k, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{i+1}(x-s)^i$ und folgern Sie, dass $p^{(i)}(s) = i! \cdot a_i^{i+1}$.

(e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas die Funktionswerte von $p(x) = x^3 - 5x + 1$ und dessen Ableitungen an der Stelle $s = 2$ sowie das Taylorpolynom an dieser Stelle.

Lösung.

(a) Wir zeigen die Behauptung per Induktion ber den Grad n von $p(x)$. Falls $n = 0$, so ist die Aussage trivial. Sei also $n \geq 1$. Wir nehmen an, dass die Aussage gilt für alle Polynome vom Grad $< n$. Sei $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^0 x^i$ mit $b_i^0 = a_{i+1}^0$. Dann gilt $p(x) = a_0^0 + q(x) \cdot x$. Nach Induktionsannahme gilt $q(s) = b_0^1$, wobei die b_i^1 nach der selben Rekursion wie die a_i^1 berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} b_{n-1}^1 &= b_{n-1}^0 = a_n^0 = a_n^1 \\ b_i^1 &= b_i^0 + b_{i+1}^1 \cdot s = a_{i+1}^0 + a_{i+2}^1 \cdot s = a_{i+1}^1. \end{aligned}$$

Somit gilt $q(s) = b_0^1 = a_1^1$. Damit erhalten wir $p(s) = a_0^0 + a_1^1 \cdot s = a_0^1$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(x-s)p_{n-1}(x)+p(s) &= \sum_{i=1}^{n} a_i^1 x^i - s\sum_{i=1}^{n} a_i^1 x^{i-1} + a_0^1 \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i^1 x^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}^1 s x^i \\
&= a_n^1 x^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i^1 - a_{i+1}^1 \cdot s) x^i \\
&= a_n^0 x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^0 x^i \\
&= p(x).
\end{aligned}$$

(c) Der naive Ansatz zum Auswerten eines Polynoms vom Grad n erfordert $2n-1$ Multiplikationen (Potenzen von s berechnen und mit den Koeffizienten multiplizieren) und n Additionen. Das Horner-Schema erfordert aber nur n Multiplikationen und n Additionen und ist somit effizienter.

(d) Wir beweisen die Behauptung per Induktion "uber den Grad n von $p(x)$. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Wir können also annehmen, dass $n \geq 1$ und die Behauptung für alle Polynome vom Grad $< n$ gilt. Wie in (a) betrachten wir das Polynom $q(x)$. Dann gilt $b_{n-1}^i = a_n^i$ und $b_k^i = a_{k+1}^{i+1}$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $k \in \{i+1, \ldots, n-1\}$. Nach Induktionsannahme gilt

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{i+1}(x-s)^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}^{i+1}(x-s)^i.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0^0 + x \cdot q(x) \\
&= a_0^0(x-s)q(x) + s \cdot q(x) \\
&= a_0^0(x-s)\sum_{i=1}^{n} a_i^i (x-s)^{i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}^{i+1} s (x-s)^i \\
&= a_n^n (x-s)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^i (x-s)^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}^{i+1} s (x-s)^i \\
&= a_n^{n+1}(x-s)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i^i + a_{i+1}^{i+1} \cdot s)(x-s)^i
\end{aligned}$$

$$= a_n^{n+1}(x-s)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i i + 1(x-s)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i^{i+1}(x-s)^i.$$

Das n-te Taylorpolynom von $p(x)$ an der Stelle s ist gegeben durch

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(s)}{i!}(x-s)^i.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten erhalten wir $\frac{p^{(i)}(s)}{i!} = a_i^{i+1}$ und somit $p^{(i)}(s) = i! \cdot a_i^{i+1}$.

(e) Das Horner-Schema lässt sie tabellarisch wie folgt darstellen:

s	a_n^0	a_{n-1}^0	$\dots$	a_1^0	a_0^0
s	a_n^1	a_{n-1}^1	$\dots$	a_1^1	a_0^1
s	a_n^2	a_{n-1}^2	$\dots$	a_1^2	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
s	a_n^n	a_{n-1}^n			
s	a_n^{n+1}				

Für das Polynom $p(x) = x^3 - 5x + 1$ und $s = 1$ ergibt sich folgende Tabelle.

s	1	0	-5	1
2	1	2	-1	-1
2	1	4	7	
2	1	6		
2	1			

Somit gilt

$$p(2) = -1$$
$$p'(2) = 7$$
$$p''(2) = (2!) \cdot 6 = 12$$
$$p'''(2) = (3!) \cdot 1 = 6$$

Das Taylorpolynom an der Stelle $s = 2$ ist dann gegeben durch

$$p(x) = (x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 7(x-2) - 1.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Es seien die Punkte $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass es ein Polynom $p(x)$ vom Grad n gibt, das $p(x_i) = y_i$ erfüllt für alle $i \leq n$. *Hinweis: Betrachten Sie im Induktionsschritt das Polynom*
$$p(x) = \frac{x - x_n}{x_0 - x_n} p_1(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} p_2(x)$$
für geeignete Polynome $p_1(x), p_2(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom aus (a) eindeutig ist.

Lösung.

(a) Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n. Für $n = 1$ kann man das konstante Polynom y_0 wählen. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass $n > 1$ und dass die Behauptung für weniger als n Punkte in $\mathbb{R}^2$ gilt. Seien also $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben. Nach der Induktionsannahme gibt es Polynome $p_1(x)$ und $p_2(x)$ vom Grad $n - 1$, sodass $p_1(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n - 1$ und $p_2(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir folgen dem Hinweis und betrachten das Polynom vom Grad n gegeben durch
$$p(x) = \frac{x - x_n}{x_0 - x_n} p_1(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} p_2(x).$$
Dann gilt
$$\begin{aligned}
p(x_0) &= \frac{x_0 - x_n}{x_0 - x_n} p_1(x_0) + \frac{x_0 - x_0}{x_n - x_0} p_2(x_0) = p_1(x_0) = y_0 \\
p(x_i) &= \frac{x_i - x_n}{x_0 - x_n} p_1(x_i) + \frac{x_i - x_0}{x_n - x_0} p_2(x_i) = \Big(\frac{x_i - x_n}{x_0 - x_n} + \frac{x_i - x_0}{x_n - x_0}\Big) y_i = y_i \\
p(x_n) &= \frac{x_n - x_n}{x_0 - x_n} p_1(x_n) + \frac{x_n - x_0}{x_n - x_0} p_2(x_n) = p_2(x_n) = y_n
\end{aligned}$$
und somit erfüllt $p(x)$ die gewünschte Bedingung.

(b) Seinen $p(x)$ und $q(x)$ Polynome vom Grad n mit $p(x_i) = q(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$. Dann sind $x_0, \ldots, x_n$ Nullstellen des Polynoms $r(x) = p(x) - q(x)$. Andrerseits ist der Grad von $r(x)$ maximal n, und somit hat $r(x)$ gemäss dem Fundamentalsatz der Algebra höchstens n Nullstellen. Somit muss $r(x)$ das konstante Polynom $r \equiv 0$ sein. Insbesondere gilt dann $p(x) = q(x)$.

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Sei $p(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das keine gemeinsamen reellen Nullstellen mit seiner Ableitung $p'(x)$ besitzt. Eine endliche Folge $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ von Polynomen mit reellen Koeffizienten wird als *Sturmsche Kette von* $p(x)$ bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) $p_0(x) = p(x)$ und $p_1(x) = p'(x)$.
(2) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p_i(x_0) = 0$ ($i \in \{1, \ldots, n-1\}$) gilt $p_{i-1}(x_0), p_{i+1}(x_0) \neq 0$ und $p_{i-1}(x_0)$ und $p_{i+1}(x_0)$ haben unterschiedliche Vorzeichen.
(3) $p_n(x)$ hat keine reelle Nullstelle.

(a) Beweisen Sie, dass die Rekursionsvorschrift $p_{i-1}(x) = q_i(x) \cdot p_i(x) - p_{i+1}(x)$ mit $\deg(p_{i+1}) < \deg(p_i)$ eine Sturmsche Kette definiert.
(b) Sei $S(x)$ die Anzahl Vorzeichenwechsel in der Folge $(p_0(x), \ldots, p_n(x))$. Beweisen Sie, dass die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in Intervall $[a, b]$ für $a < b$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch $S(a) - S(b)$ gegeben ist. *Hinweis: Beachten Sie, dass sich $S(x)$ und $S(y)$ für $x < y$ in $[a, b]$ nur unterscheiden, falls $[x, y]$ eine Nullstelle eines der p_i enthält. Untersuchen Sie das Verhalten von $S(x)$ auf den Nullstellen der p_i.*
(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Sturmschen Kette die Anzahl der Nullstellen von $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $[0, 3]$.

Lösung.

(a) Falls $p(x)$ oder $p'(x)$ keine reellen Nullstellen besitzt, so ist $(p(x), p'(x))$ bereits eine Sturmsche Kette.

Wir können also annehmen, dass $n \geq 1$ und $(p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x))$ bereits (1) und (2) erfüllen und sodass $p_n(x)$ reelle Nullstellen hat. Dann teilen wir $p_{n-1}(x)$ durch $p_n(x)$ mit Rest gemäss der Rekursionsvorschrift und wir erhalten $q_n(x), p_{n+1}(x)$ mit

$$p_{n-1}(x) = q_n(x)p_n(x) + p_{n+1}(x).$$

Der Rest ist nicht 0, da sonst $p_n(x)$ ein Teiler von $p_{n-1}(x)$ wäre und somit auch von $p_{n-2}(x)$, da dann

$$p_{n-2}(x) = q_{n-1}(x)p_{n-1}(x) + p_n(x) = (q_{n-1}(x)q_n(x) + 1)p_n(x).$$

Induktiv sieht man dann leicht, dass $p_n(x)$ ein Teiler von $p_i(x)$ ist für jedes $i < n$, also insbesondere von $p(x)$ und $p'(x)$. Aber das ist un möglich, da $p(x)$ und $p'(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben.

Somit fahren wir fort, bis $p_n(x)$ keine reellen Nullstellen hat, aber nicht das konstante Polynom 0 ist. Damit ist (3) erfüllt. Für (2), nehmen wir an, dass $p_i(x_0) = 0$. Dann gilt $p_{i-1}(x_0) = -p_{i+1}(x_0)$ und somit haben $p_{i-1}(x_0)$

und $p_{i+1}(x_0)$ ein unterschiedliches Vorzeichen. Wäre $p_{i-1}(x_0) = 0$, so wäre $p_{i+1}(x_0) = \cdots = p_n(x_0) = 0$, ein Widerspruch.

(b) Sei x_0 eine Nullstelle von $p(x)$. Dann gibt es zwei Fälle.
  (1) $p'(x_0) < 0$. Dann ist $S(x)$ in einer genügend kleinen Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ gegeben durch $(+, -, \dots)$ und für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ durch $(-, -, \dots)$.
  (2) $p'(x_0) < 0$. Dann ist $S(x)$ in einer genügend kleinen Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ gegeben durch $(-, +, \dots)$ und für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ durch $(+, +, \dots)$.

  In beiden Fällen hat die Anzahl Vorzeichenwechsel um 1 abgenommen. Sei nun $p_i(x_0) = 0$ für ein $i \geq 1$. Wir machen wieder eine Fallunterscheidung.
  (1) $p_{i-1}(x_0) < 0$. Dann ist $p_{i+1}(x_0) > 0$. Dann sind die Vorzeichenfolgen in einer kleinen Umgebung vor x_0 bzw. nach x_0 entweder $(\dots, -, -, +, \dots)$ und $(\dots, -, +, +, \dots)$ oder $(\dots, -, +, +, \dots)$ und $(\dots, -, -, +, \dots)$. In beiden Fällen bleibt die Anzahl Vorzeichenwechsel konstant.
  (2) Der Fall $p_{i-1}(x_0) > 0$ ist analog.

  Somit ist nimmt $S(x)$ für $x \in [a, b]$ nach jeder Nullstelle von $p(x)$ um eins ab, also ist $S(a) - S(b)$ die Anzahl der Nullstellen in $[a, b]$.

(c) Wir haben

$$p_0(x) = x^3 - 3x + 1$$
$$p_1(x) = 3x^2 - 3$$

und $p_2(x)$ ergibt sich durch Division mit Rest aus

$$p(x) = \frac{1}{3}x(3x^2 - 3) - 2x + 1,$$

i.e. $p_2(x) = 2x - 1$. Weiter gilt

$$p_1(x) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)(2x - 1) - \frac{9}{4}$$

und somit ist $p_3(x) = \frac{9}{4}$. Das ergibt die Sturmsche Kette

$$(x^3 - 3x + 1, 3x^2 - 3, 2x - 1, \frac{9}{4}).$$

Wir rechnen die Funktionswerte für $x = 0$ und $x = 3$ aus:

- Für $x = 0$ erhalten wir die Folge $(1, -3, -1, \frac{9}{4})$ und $S(0) = 2$.
- Für $x = 3$ erhalten wir die Folge $(19, 24, 5, \frac{9}{4})$ und $S(3) = 0$.

Damit ist die Anzahl Nullstellen von $p(x)$ in $[0, 3]$ gegeben durch $S(0) - S(3) = 2$.