Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Lösungen Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Für $n \geq 1$ sei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Die *n-ten Einheitswurzeln* sind gegeben als $\zeta_n^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. Falls ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so nennen wir die kleinste positive Zahl $d \leq n$ mit $\zeta^d = 1$ die *Ordnung* von ζ. Eine n-te Einheitswurzel ζ heisst *primitiv*, falls sie Ordnung n hat.

(a) Zeigen Sie, dass ζ_n^k genau dann primitiv ist, wenn $\mathrm{ggT}(n, k) = 1$ (für $k \in \{1, \ldots, n\}$).

(b) Sei ζ eine n-te Einheitswurzel der Ordnung d. Zeigen Sie, dass $\zeta^e = 1$ gilt, genau dann wenn d ein Teiler von e ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Teiler d von n eine n-te Einheitswurzel der Ordnung d existiert.

Lösung.

(a) Wir nehmen an, dass ζ_n^k eine primitive Einheitswurzel ist. Sei $d < n$ ein gemeinsamer Teiler von k und n. Seien $k = ad$ und $n = bd$. Dann gilt

$$(\zeta_n^k)^b = (\zeta_n^{ad})^b = (\zeta_n^{bd})^a = 1$$

und somit $b = n$ und $d = 1$.

Umgekehrt, seien k und n teilerfremd und sei d die Ordnung von ζ_n^k. Es gibt genau eine natürliche Zahl $x < n$, sodass $kx \equiv 1 \mod n$. Somit gilt $\zeta_n^{kx} = \zeta_n$. Aber dann gilt $\zeta_n^d = (\zeta_n^{kx})^d = (\zeta_n^{kd})^x = 1$ und daher hat ζ_n die Ordnung d. Da ζ_n primitiv ist, gilt $d = n$.

(b) Sei $\zeta^e = 1$. Nach dem Satz von Euklid gilt $e = qd + r$ mit $r < d$. Somit erhalten wir

$$1 = \zeta^e = (\zeta^d)^q \cdot \zeta^r = \zeta^r,$$

ein Widerspruch.

Umgekehrt, sei $kd = e$. Dann gilt $\zeta^e = (\zeta^d)^k = 1$.

(c) Sei $n = kd$. Dann ist ζ_n^k eine Einheitswurzel der Ordnung d, da $(\zeta_n^k)^d = \zeta_n^n = 1$.

Aufgabe 6 (7 Punkte)**.** Das *n-te Kreisteilungspolynom* ist gegeben durch

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{\zeta^n=1 \\ \zeta \text{ primitiv}}} (x - \zeta).$$

(a) Zeigen Sie, dass jede n-te Einheitswurzel eine primitive d-te Einheitswurzel für einen Teiler d von n ist.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) und dem Lemma von Bézout, dass

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

gilt.

(c) Für eine natürliche Zahl n sei $\varphi(n)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen in $a \in \{1, \dots, n\}$ mit $\text{ggT}(a, n) = 1$. Die Funktion φ wird als *Eulersche φ-Funktion* bezeichnet. Folgern Sie die *Gauss'sche Formel*

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

(d) Berechnen Sie explizit Φ_8.

Lösung.

(a) Sei $\zeta = \zeta_n^k$ eine n-te Einheitswurzel. Falls ζ eine primitive n-te Einheitswurzel ist, so ist die Behauptung erfüllt für $d = n$. Wir nehmen also an, dass ζ keine primitive n-te Einheitswurzel ist. Dann gibt es gemäss Aufgabe 5 (a) einen Teiler t von n, k mit $t > 1$. Seien $n = dt$ und $k = lt$. Somit gelten

$$\zeta_n^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2dt\pi i}{lt}} = e^{\frac{2d\pi i}{l}} = \zeta_d^l$$

und $\text{ggT}(d, l) = \text{ggT}(\frac{n}{t}, \frac{k}{t}) = 1$. Wegen Aufgabe 5 (a) gilt dann, dass ζ_n^k eine primitive d-te Einheitswurzel ist.

(b) Aus (a) folgt, dass die beiden Polynome die gleichen Nullstellen besitzen. Es bleibt zu zeigen, dass alle Nullstellen von $\prod_{d|n} \Phi_d(x)$ Nullstellen der Ordnung 1 sind. Seien also d, e zwei Teiler von n und sei ζ_d^k eine primitive d-te Einheitswurzel und ζ_e^l eine primitive e-te Einheitswurzel mit $\zeta_d^k = \zeta_e^l$. Wir zeigen, dass $d = e$. Es gilt

$$e^{\frac{2ka\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{d}} = e^{\frac{2l\pi i}{e}} = e^{\frac{2lb\pi i}{n}}.$$

Weil $ka, lb < n$ gilt, erhalten wir $ka = lb$. Wir schreiben $ad = n$ und $be = n$. Nach dem Lemma von Bézout gibt es ganze Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $rk + sd = 1$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}\frac{rlb}{a} + sd &= 1\\ \frac{rlbe}{a} + sde &= e\\ rld + sde &= e\\ d(rl + se) &= e\end{aligned}$$

und somit ist d ein Teiler von e. Analog zeigt man, dass e ein Teiler von d ist. Daher gilt $d = e$ und $k = l$.

(c) Aus Aufgabe 5 (a) folgt, dass der Grad von $\Phi_d(x)$ genau $\varphi(d)$ ist. Somit erhalten wir aus (b), dass

$$n = \deg(x^n - 1) = \deg\big(\prod_{d|n} \Phi_d(x)\big) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

(d) Wir haben

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= x - 1\\ \Phi_2(x) &= x + 1\\ \Phi_4(x) &= (x - i)(x + i) = x^2 + 1.\end{aligned}$$

Sei $f(x) = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x) = x^4 - 1$. Somit erhalten wir mit (c), dass $\Phi_8(x) = x^8 - 1 : f(x) = x^4 + 1$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

(b) $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$.

Lösung.

(a) Man sieht leicht, dass $x_1 = 2$ eine Lösung ist. Dann erhalten wir mit Polynomdivision $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 : x - 2 = x^2 - 2x + 2$. Dann gilt

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i.$$

Alternativ kann man die Gleichung mit der Cardanischen Formel lösen mit der Substitution $w = x - \frac{4}{3}$; dann erhalten wir

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = w^3 + pw + 1$$

mit $p = \frac{2}{3}$ und $q = -\frac{20}{27}$. Die Diskriminate ist dann

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{108}{27^2} = \frac{4}{27}.$$

(b) Wir schreiben $w = x + 1$. Dann erhalten wir

$$x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = w^3 + pw + q$$

mit $p = 6$ und $q = 2$. Dann gilt

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 9$$

und somit $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{2}$ und $v = -\frac{p}{3u} = -\sqrt[3]{4}$. Damit sind die Lösungen der Gleichung $w^3 + pw + q$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
w_1 &= u + v = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \approx -0.33 \\
w_2 &= -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v) \approx 0.16 + 2.47i \\
w_3 &= -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v) \approx 0.16 - 2.47i.
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir als Lösungen der ursprünglichen Gleichung

$$\begin{aligned}
x_1 &\approx -1.33 \\
x_2 &\approx -0.84 + 2.47i \\
x_3 &\approx -0.84 - 2.47i.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Sei $z = a + ib$ eine beliebige komplexe Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Realteil und der Imaginärteil der Kubikwurzeln von z durch eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten beschreiben lassen.

(b) Zeigen Sie, dass die Diskriminate der in (a) gegebenen kubischen Gleichung negativ ist (i.e. Casus irreducibilis).

Lösung.

(a) Sei $w = c + id$ mit $w^3 = z$. Dann gilt

$$(c + id)^3 = c^3 - 3cd^2 + i(3c^2d - d^3)$$

und daher

$$\begin{aligned}
c^3 - 3cd^2 &= a \\
3c^2d - d^3 &= b.
\end{aligned}$$

Des Weiteren haben wir

$$(c^2 + d^2)^3 = |w|^6 = |w^3|^2 = |z|^2$$

und somit gilt $c^2 + d^2 = \sqrt[3]{|z|^2}$. Daraus folgt $d^2 = \sqrt[3]{|z|^2} - c^2$ und damit

$$\begin{aligned} c^3 - 3c(\sqrt[3]{|z|^2} - c^2) - a &= 0 \\ 4c^3 - 3\sqrt[3]{|z|^2}c - a &= 0 \\ c^3 - \frac{3\sqrt[3]{|z|^2}}{4}c - \frac{a}{4} &= 0 \end{aligned}$$

d.h. c ist eine Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - \frac{3\sqrt[3]{|z|^2}}{4}x - \frac{a}{4} = 0.$$

Analog sieht man, dass d eine Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - \frac{3\sqrt[3]{|z|^2}}{4}x + \frac{b}{4} = 0.$$

ist.

(b) Wir betrachten nur die kubische Gleichung

$$x^3 - \frac{3\sqrt[3]{|z|^2}}{4}x - \frac{a}{4} = 0,$$

da der andere Fall analog behandelt werden kann. Es gilt $p = -\frac{3\sqrt[3]{|z|^2}}{4}$ und $q = -\frac{a}{4}$. Dann ist die Diskriminate gegeben durch $\Delta = \frac{a^2 - |z|^2}{64} = -\frac{b^2}{64} < 0$.

Abgabe: Dienstag, 03.05.2015 um 16:15 in den entsprechenden Fächern