Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 10

Aufgabe 35 (3 Punkte)**.** Die *Cayley-Abbildung* ist definiert als $C(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$. Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises und der Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

unter C.

Lösung. Die Punkte $1, -1, i$ liegen alle auf dem Einheitskreis und es gilt $C(1) = \infty$, $C(-1) = 0$ und $C(i) = i \cdot \frac{1+i}{1-i} = i \cdot \frac{(1+i)^2}{2} = -1$. Da das Bild eines Kreises wieder ein Kreis oder eine Gerade ist und durch 3 Punkte eindeutig festgelegt ist, folgt, dass das Bild des Einheitskreises genau die reelle Gerade $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist.
Für den zweiten Teil behaupten wir, dass $\mathbb{E}$ auf die *obere Halbebene*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

abgebildet wird. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(C(z)) &= \frac{1}{2i}(C(z) - \overline{C(z)}) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1+\bar{z})(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})} \\
&= \frac{1 - z\bar{z}}{|1-z|^2} \\
&= \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt leicht $|z| < 1 \iff \operatorname{Im}(C(z)) > 0$, d.h. $z \in \mathbb{E} \iff C(z) \in \mathbb{H}$.
Bemerkung: Der zweite Teil folgt auch aus der Stetigkeit von C und $C(0) = i$.

Aufgabe 36 (6 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob es eine gebrochen lineare Transformation L gibt mit

(a) $L(0) = -2, L(2) = 0, L(i) = \infty$ und $L(\infty) = -i$,
(b) $L(1) = i, L(i) = 1, L(0) = \infty$ und $L(3i) = 0$.

Falls es ein solches L gibt, bestimmen sie dessen Umkehrabbildung und dessen Fixpunkte, i.e. die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $L(z) = z$.

Lösung. (a) Es gibt genau eine gebrochen lineare Transformation L, die die ersten 3 Bedingungen erfüllt. Wir schreiben $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Aus $L(2) = 0$ folgt $2a + b = 0$, also $b = -2a$. Aus $ad - bc \neq 0$ folgt $a \neq 0$, somit können wir $a = 1$ wählen (dies ist möglich, da wir sonst den Bruch einfach erweitern können). Aus $L(i) = \infty$ folgt $ic + d = 0$, also $d = -ic$. Wegen $L(0) = -2$ gilt $-2 = \frac{b}{d} = \frac{-2}{d}$, also $d = 1$ und somit $c = i$. Das ergibt

$$L(z) = \frac{z-2}{iz+1}.$$

Wegen $L(\infty) = \frac{1}{i} = -i$ ist auch die 4. Bedingung erfüllt. Wir berechnen die Umkehrabbildung:

$$w = \frac{z-2}{iz+1} \Longleftrightarrow w(iz+1) = z-2 \Longleftrightarrow w+2 = z(1-iw) \Longleftrightarrow z = \frac{w+2}{1-iw},$$

also $L^{-1}(z) = \frac{z+2}{-iz+1}$. Wir bestimmen nun die Fixpunkte von L. Es gilt

$$\begin{aligned} L(z) = z \Longleftrightarrow \frac{z-2}{iz+1} = z &\Longleftrightarrow z - 2 = iz^2 + z \Longleftrightarrow iz^2 = -2 \\ &\Longleftrightarrow z^2 = 2i \Longleftrightarrow z^2 = 2e^{\frac{\pi i}{2}} \Longleftrightarrow z = \pm\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} \\ &\Longleftrightarrow z = \pm(1+i). \end{aligned}$$

(b) Wir gehen analog wie in (a) vor und betrachten zunächst die letzten 3 Bedingungen. Aus $L(3i) = 0$ folgt wiederum, dass $a \neq 0$ und somit können wir $a = 1$ setzen. Es folgt also $b = -3i$. Aus $L(0) = \infty$ folgt $d = 0$ und aus $L(i) = 1$ folgt $i - 3i = ci$, also $c = -2$. Wir erhalten somit

$$L(z) = \frac{z-3i}{-2z} = \frac{3i-z}{2z}.$$

Es gilt aber $L(1) = \frac{3i-1}{2} \neq i$ und somit gibt es keine gebrochen lineare Transformation, die alle 4 Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 37 (5 Punkte)**.** Das *Doppelverhältnis* von vier verschiedenen komplexen Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

(a) Für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ sei L_{z_1,z_2,z_3} die eindeutige gebrochen lineare Transformation mit L mit $L(z_1) = 1$, $L(z_2) = 0$ und $L(z_2) = \infty$. Zeigen Sie, dass

$$L_{z_1,z_2,z_3}(z) = \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3).$$

(b) Zeigen Sie, dass gebrochen lineare Transformationen Doppelverhältnisse erhalten, d.h. ist L eine gebrochen lineare Transformation mit $w_i = L(z_i), i = 1, \ldots, 4$, so gilt

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Lösung. (a) Sei $L = L_{z_1,z_2,z_3}$. Wir schreiben $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und bestimmen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Aus $L(z_2) = 0$ folgt $az_2 + b = 0$ und somit wegen $ad - bc \neq 0$ muss $a \neq 0$ gelten. Wir setzen $a = 1$ (dies ist möglich, da man den Bruch jederzeit erweitern kann), also gilt $b = -z_2$. Aus $L(z_3) = \infty$ folgt $cz_3+d = 0$ und somit $d = -cz_3$. Aus $L(z_1) = 1$ folgt

$$z_1 - z_2 = z_1 + b = cz_1 + d = c(z_1 - z_3).$$

Somit ist $c = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{z - z_2}{c(z - z_3)} \\ &= \frac{z - z_2}{\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}(z - z_3)} \\ &= \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \\ &= \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

(b) Sei $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Dann gilt für $1 < i, j < 4$:

$$\begin{aligned} w_i - w_j &= \frac{az_i + b}{cz_i + d} - \frac{az_j + b}{cz_j + d} \\ &= \frac{(az_i + b)(cz_j + d) - (az_j + b)(cz_i + d)}{(cz_i + d)(cz_j + d)} \\ &= \frac{adz_i + bcz_j - adz_j - bcz_i}{(cz_i + d)(cz_j + d)} \\ &= \frac{ad - bc}{(cz_i + d)(cz_j + d)} \cdot (z_i - z_j). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (w_1 - w_3)(w_2 - w_4) &= \frac{(ad - bc)^2}{\prod_{i=1}^4 (cz_i + d)}(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \\ &= u(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) \end{aligned}$$

mit $u = \frac{(ad-bc)^2}{\prod_{i=1}^4 (cz_i+d)}$ und analog

$$(w_2 - w_3)(w_1 - w_4) = u(z_2 - z_3)(z_1 - z_4).$$

Somit erhalten wir

$$\mathrm{DV}(w_1,w_2,w_3,w_4)=\frac{(w_1-w_2)(w_2-w_4)}{(w_2-w_3)(w_1-w_4)}=\frac{u(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{u(z_2-z_3)(z_1-z_4)}=\mathrm{DV}(z_1,z_2,z_3,z_4).$$

Aufgabe 38 (3 Punkte)**.** Sei S die Spiegelung an dem Kreis $K=K(z_0,r)$ um $z_0\in\mathbb{C}$ vom Radius $r>0$. Weiterhin sei L eine gebrochen lineare Transformation, welche den Kreis K auf die reelle Achse abbildet.[1]
Zeigen Sie: Die Abbildung $L\circ S\circ L^{-1}$ ist die komplexe Konjugation, also die Spiegelung an der reellen Achse. *Dies rechtfertigt die Sprechweise "Spiegelung am Kreis".*

Hinweis: Die Kreisspiegelung ist gegeben durch $S(z)=z_0+\frac{r^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}$.

Lösung. Sei

$$F(z)=\overline{L\circ S\circ L^{-1}(z)}.$$

Man kann leicht feststellen, dass F eine gebrochen rationale Funktion ist. Da S den Kreis K festhält, gilt $F(x)=x$ für jedes $x\in\mathbb{R}$. Da aber F bereits durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist, ist F die Identität. Somit ist $L\circ S\circ L^{-1}$ die komplexe Konjugation.

Aufgabe 39 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$M:\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}})$$
$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto\left(z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lösung. Seien

$$A_1=\begin{pmatrix}a_1&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}\text{ und }A_2=\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$$

zwei Matrizen in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Es gilt

$$A_1\circ A_2=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1c_2&a_1b_2+b_1d_2\\c_1a_2+d_1c_2&c_1b_2+d_1d_2\end{pmatrix}$$

Dann ist $M(A_1\circ A_2)$ die Abbildung

$$z\mapsto\frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)}.$$

[1] Zur Erinnerung: man whle dazu drei verschiedene Punkte z_1,z_2,z_3 auf K. Dann gibt es bekanntlich genau eine gebrochen lineare Transformation L mit $L(z_1)=0,L(z_2)=1,L(z_3)=\infty$. Dieses L bildet dann K auf $\mathbb{R}$ ab.

Seien $L_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ für $i = 1, 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} L_1 \circ L_2(z) &= L_1\Big(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\Big) \\ &= \frac{a_1\big(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\big) + b_1}{c_1\big(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\big) + d_1} \\ &= \frac{a_1 a_2 z + a_1 b_2 + b_1 c_2 z + b_1 d_2}{c_1 a_2 z + c_1 b_2 + d_1 c_2 z + d_1 d_2} \\ &= M(A_1 \circ A_2)(z) \end{aligned}$$

wie gewünscht.