# Elemente der Mathematik - Sommer 2016



**Aufgabe 1.** (a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$, d.h. berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil.

(i) $i^n,\ n \in \mathbb{Z}$ (ii) $\dfrac{1}{1-i}$ (iii) $\dfrac{1-i}{1+i}$ (iv) $\dfrac{1+2i}{(2+3i)^2}$

(b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} ix - 3y &= 1 \\ 2x + iy &= 2i. \end{aligned}$$

**Lösung.** (a) (i) $i^n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \mod 4 \\ i, & n \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & n \equiv 2 \mod 4 \\ -i & n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$

(ii)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-i} = a + ib \\ \iff\ & 1 = (1-i)(a+ib) = (a+b) + i(b-a) \\ \iff\ & a + b = 1 \text{ und } b - a = 0 \\ \iff\ & a = b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} & \frac{1-i}{1+i} = a + ib \\ \iff\ & 1 - i = (1+i)(a+ib) = (a-b) + i(a+b) \\ \iff\ & a - b = 1 \text{ und } a + b = -1 \\ \iff\ & a = 0 \text{ und } b = -1. \end{aligned}$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
& \frac{1+2i}{(2+3i)^2} = a+ib \\
\iff\quad & 1+2i = (2+3i)^2\cdot(a+ib) = (-5+12i)(a+ib) \\
& = (-5a-12b) + i(12a-5b) \\
\iff\quad & -5a-12b = 1 \text{ und } 12a-5b = 2 \\
\iff\quad & a = \frac{19}{169} \text{ und } b = -\frac{22}{169}.
\end{aligned}
$$

(b) Wenn wir die erste Gleichung mit $2i$ multiplizieren, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
-2x - 6iy &= 2i \\
2x + \ iy &= 2i.
\end{aligned}
$$

Somit gilt $-5iy = 4i$ und $y = -\frac{4}{5}$. Dann $2x = 2i + \frac{4}{5}i$ und $x = \frac{7}{5}i$.

**Aufgabe 2.** Sei $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\cos(\frac{2\pi}{5})$ einer quadratischen Gleichung genügt.

(b) Bestimmen Sie damit für den Real- und den Imaginärteil von $\zeta$ jeweils einen geschachtelten Wurzelausdruck mit rationalen Radikanden.

**Lösung.** (a) Es gilt $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ und somit $\overline{\zeta} = e^{\frac{-2\pi i}{5}} = \zeta^{-1}$. Somit erhalten wir

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{Re}(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta + \overline{\zeta}) = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}).$$

Des Weiteren ist $\zeta$ eine fünfte Einheitswurzel, und somit $\zeta^5 = 1$. Damit ist $\zeta$ eine Nullstelle des Polynoms $x^5 - 1$, die nicht 1 ist, und wir erhalten mit Polynomdivision $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Somit erfüllt $\zeta$ die Gleichungen $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ und $x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} = 0$. Insbesondere gilt dann

$$(x^2 + 2 + x^{-2}) + (x + x^{-1}) - 1 = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0$$

und somit ist $\cos(\frac{2\pi}{5})$ eine Lösung von $4x^2+2x-1 = 0$ bzw $x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$.

(b) Die quadratische Gleichung aus (a) hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Da $\cos(\frac{2\pi}{5})$ positiv ist, gilt $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Um $\sin(\frac{2\pi}{5})$ zu berechnen, verwenden wir die Gleichung $\sin(\frac{2\pi}{5})^2 + \cos(\frac{2\pi}{5})^2 = 1$, somit gilt

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie Formeln (in Form von geschachtelten Wurzelausdrücken) für den Real- und Imaginärteil der beiden Quadratwurzeln einer komplexen Zahl $a + ib$.

**Lösung.** Sei $z = a + ib$. Wir suchen $w = c + id$, sodass $w^2 = z$. Dann gilt $c^2 + d^2 = |w|^2 = |z|$. Des Weiteren haben wir $z = w^2 = (c^2 - d^2) + 2cdi$ und somit $a = c^2 - d^2$ und $b = 2cd$. Dann gilt $2c^2 - (c^2 + d^2) = a$, also

$$c = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}}.$$

Gleichermassen erhalten wir $(c^2 + d^2) - 2d^2 = a$ und somit

$$d = \pm\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}.$$

Um das richtige Vorzeichen zu bekommen, verwenden wir die Gleichung $b = 2cd$. Sei $\operatorname{sgn}(b)$ das Vorzeichen von $b$. Dann erhalten wir die Lösungen

$$w_1 = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \text{ und } w_2 = -\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} - i\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}.$$

**Aufgabe 4.** Die *Hamiltonschen Quaternionen* sind definiert als

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

mit komponentenweiser Addition $+ : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ und Multiplikation $\cdot : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ jk = -kj &= i \\ ki = -ik &= j, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} &(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_1 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k. \end{aligned}$$

Es ist einfach zu sehen, dass $(\mathbb{H}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, \cdot)$ assoziativ, aber nicht kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses besitzt. *Hinweis: Analog wie bei den komplexen Zahlen definiert man komplex konjugierte Quaternionen durch* $\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$.

*Bemerkung.* Ein Ring der Form $(R, +, \cdot)$ mit Einselement $1_R \neq 0_R$, sodass jedes Element von $R$ ein multiplikatives Inverses besitzt, wird als *Schiefkörper* bezeichnet. Aufgabe 4 zeigt, dass $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein Schiefkörper ist.

**Lösung.** (a) Wir zeigen zuerst die Assoziativität der Multiplikation. Seien $x = a_1+b_1i+c_1j+d_1k, y = a_2+b_2i+c_2j+d_2k, z = a_3+b_3i+c_3j+d_3k \in \mathbb{H}$. Seien $u = (x\cdot y)\cdot z = a_4+b_4i+c_4j+c_4k$ und $v = x\cdot(y\cdot z) = a_5+b+5i+c_5j+d_5k$. Wir zeigen, dass $a_4 = a_5$. Analog folgt dann, dass $b_4 = b_5, c_4 = c_5$ und $d_4 = d_5$. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_4 &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2)a_3 - (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)b_3 \\ &\quad - (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)c_3 - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)d_3 \\ &= a_1(a_2a_3 - b_2b_3 - c_2c_3 - d_2d_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3 + c_2d_3 - d_2c_3) \\ &\quad - c_1(a_2c_3 - b_2d_3 + c_2a_3 + d_2b_3) - d_1(a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3 + d_2a_3) \\ &= a_5 \end{aligned}$$

unter Benutzung der Assoziativität von $\cdot_{\mathbb{R}}$, der Kommutativität von $+_{\mathbb{R}}$ und der Distributivgesetze von $\mathbb{R}$. Um zu sehen, dass die Multiplikation von $\mathbb{H}$ nicht kommutativ ist, betrachten wir $ij = -ji = k$. Falls $ij = ji$, so gilt $-1 = k^2 = (ij)(ji) = i(j^2)i = i(-1)i = -i^2 = 1$, ein Widerspruch.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z\overline{z}$, also $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1$. Für $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ definieren wir analog

$$\begin{aligned} \overline{z} &= a - bi - cj - dk \\ |z| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} z \cdot \left(\frac{1}{|z|^2}\overline{z}\right) &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 1. \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ das multiplikative Inverse von $z$.

Abgabe: Dienstag, 26.04.2015 um 16:15 in der Vorlesung.