# Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf Übungsblatt 8

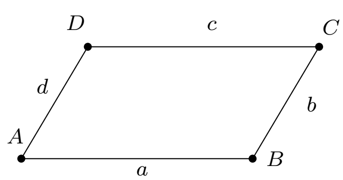
**Aufgabe 27** (8 Punkte)**.** Ein Parallelogramm ist ein Rechteck $ABCD$ mit Seiten $a, b, c, d$ wie unten dargestellt, mit der Eigenschaft, dass $a$ und $c$ sowie $b$ und $d$ parallel sind. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn $a = c$ und $b = d$.

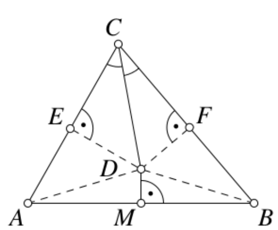
(b) In einem Parallelogramm drittelt die Verbindungsgerade einer Ecke mit der Mitte einer gegenüberliegenden Seite eine Diagonale.

(c) Eine Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten, wenn seine Diagonalen orthogonal sind. *Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.*

(d) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn beide Diagonalen gleich lang sind.




**Aufgabe 28** (2 Punkte)**.** Betrachten Sie folgenden Beweis.
Satz. *Jedes Dreieck ist gleichschenklig.*




*Beweis.* Im Dreieck $\Delta ABC$ halbiere $CD$ den Innenwinkel $\gamma$ und $MD$ sei die Mittelsenkrechte zu $AB$. Dann sind nach dem Kongruenzsatz WSW die Dreiecke $\Delta CED$ und $\Delta CFD$ kongruent. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die Dreiecke $\Delta AMD$ und $\Delta BMD$ ebenfalls kongruent. Wegen $ED = FD, AD = BD$ und $\measuredangle AED = \measuredangle BFD = 90°$, sind auch $\Delta AED$ und $\Delta BFD$ kongruent. Also ist

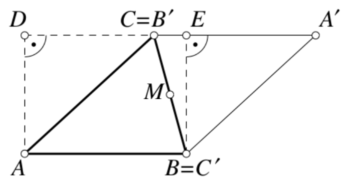
$AE = BF$ und somit $AC = BC$, d.h. das Dreieck $\Delta ABC$ ist gleichschenklig. $\square$

Wo steckt der Fehler?

**Aufgabe 29** (6 Punkte). (a) Beweisen Sie, dass die Fläche eines Dreiecks $\Delta ABC$ durch folgende Formel berechnet werden kann.

$$F(\Delta ABC) = \frac{1}{2}(a \cdot h_a) = \frac{1}{2}(b \cdot h_b) = \frac{1}{2}(c \cdot h_c).$$

Spiegeln Sie dazu das Dreieck am Mittelpunkt $M$ der Seite $a$ wie unten dargestellt.[1]




(b) Folgern Sie, dass der Flächeninhalt berechnet werden kann durch

$$F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

*Hinweis: Finden Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit der gleichen Fläche und verwenden Sie (a).*

**Aufgabe 30** (3 Punkte). Verwenden Sie den Kosinussatz sowie Aufgabe 29 (b) um die *Heron'sche Formel* zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks

$$F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

herzuleiten, wobei $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Abgabe: Dienstag, 28.06.2016 um 16:15 in den entsprechenden Fächern

[1] Quelle der Bilder in Aufgaben 28 und 29: www.matheraetsel.de/texte/geom_2.5.pdf