Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 7

Aufgabe 23 (9 Punkte)**.** In der folgenden Aufgabe sei mit baryzentrischen Koordinaten immer die baryzentrischen Koordinaten bzgl. fest gewählten Punkten $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ gemeint.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gerade in baryzentrischen Koordinaten eine lineare homogene Gleichung hat.[1] *Hinweis: Fassen Sie die beiden Geraden AB und AC als Koordinatensystem auf.*

(b) Seien $P = (\lambda_1, \mu_1, \sigma_1)$ und $Q = (\lambda_2, \mu_2, \sigma_2)$ zwei Punkte. Zeigen Sie, dass jeder Punkt auf der Gerade durch P und Q von der Form

$$(s\lambda_1 + t\lambda_2, s\mu_1 + t\mu_2, s\sigma_1 + t\sigma_2)$$

ist.

(c) Seien $u_i\lambda + v_i\mu + w_i\sigma = 0$, $i = 1, 2$, zwei Geradengleichungen. Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden.

(d) Bestimmen Sie den Mittelpunkt zweier Punkte in baryzentrischen Koordinaten.

(e) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden AB, BC und AC sowie die Koordinaten der Seitenmittelpunkte.

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** Gegeben seien zwei Halbgeraden h_1, h_2, die von einem Punkt S ausgehen, sowie Punkte P_1, Q_1 auf h_1 und P_2, Q_2 auf h_2.

(a) Zeigen Sie folgende Umkehrung des ersten Strahlensatzes: Gilt $\overline{SP_1} : \overline{SQ_1} = \overline{SP_2} : \overline{SQ_2}$, so sind die Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel.

(b) Der zweite Strahlensatz besagt, dass $\overline{SP_1} : \overline{SQ_1} = \overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2}$ gilt, falls die Geraden P_1P_2 und Q_1Q_2 parallel sind. Zeigen Sie, dass die Umkehrung dieses Satzes im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 25 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei Innenwinkel gleich sind.

(b) Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn alle Innenwinkel gleich sind.

[1] d.h. eine Gleichung der Form $u\lambda + v\mu + w\sigma$, wobei (λ, μ, σ) die baryzentrischen Koordinaten darstellen.

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie die Formel $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. *Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Gleichheit* $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$ *und eine analoge Gleicheit für* $\cos^2 x$*.*

(b) Folgern Sie aus (a) und dem Kosinussatz den *Tangensquadratsatz*: Sind a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks und α der Winkel zwischen den Seiten der Längen b und c und ist p der halbe Dreiecksumfang, so gilt

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}.$$

Abgabe: Dienstag, 21.06.2016 um 16:15 in den entsprechenden Fächern