Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 6

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

(a) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung).*

(b) $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$ *(Parallelogrammungleichung).*

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** Eine *parametrisierte Kurve* ist eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die *Länge* von γ ist gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Eine parametrisierte Kurve *in Polarkoordinaten* ist von der Form $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$; die Kurvenpunkte sind dann gegeben durch die Polarkoordinaten $(\varphi, r(\varphi))$ für $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Berechnen Sie die Länge einer Kurve in Polarkoordinaten.

Aufgabe 22 (8 Punkte)**.** Zwei parametrisierte Kurven $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ definieren dieselbe Kurve, falls es eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung – eine sogenannte *Parametertransformation* – $\tau : [a, b] \to [c, d]$ gibt mit $\gamma = \delta \circ \tau$, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig differenzierbar ist.

(a) Sei $\tau : [a, b] \to [c, d]$ eine Parametertransformation. Zeigen Sie, dass entweder $\dot{\tau}(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ oder $\dot{\tau}(t) < 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Länge einer Kurve nicht von der Parametrisierung abhängt.

(c) $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heisst *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls für alle $s < t$ in $[a, b]$, $L(\gamma \restriction [s, t]) = t - s$. Zeigen Sie, dass es für jede parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ eine Parametrisierung nach Bogenlänge gibt. *Hinweis: Betrachten Sie die Umkehrabbildung von* $l(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(s)| ds$.

(d) Geben Sie eine Parametertransformation τ der Kurve γ aus Aufgabe 21 (a) an, sodass $\gamma \circ \tau$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Abgabe: Dienstag, 07.06.2016 um 16:15 in den entsprechenden Fächern