Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 5

Aufgabe 16 (6 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $2\cos(\frac{2\pi}{7})$ eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung aus (a) keine rationale Lösungen besitzt.

(c) Ist das reguläre Siebeneck konstruierbar? Beweisen oder widerlegen Sie.

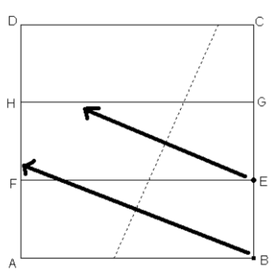
Hinweis für (a): Zeigen Sie zuerst die Gleichheiten $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ und $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

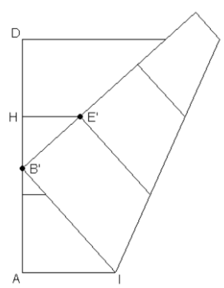
Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Aussagen für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Ist z der Schnittpunkt einer Geraden in $G(K_n)$ und eines Kreises aus $K(K_n)$, so gilt $z \in K_{n+1}$.

(b) Ist z der Schnittpunkt zweier Kreise in $K(K_n)$, so ist $z \in K_{n+1}$.

Aufgabe 18 (5 Punkte)**.** Eine weitere Methode der geometrischen Konstruktion ist gegeben durch *Origami-Faltkonstruktionen* aus einem quadratischen Stück Papier. Aus dem *Satz von Haga* folgt, dass jede gegebene Strecke mittels einer Faltkonstruktion in n Teile zerlegt werden kann. Die folgende Konstruktion soll das klassische Problem der Würfelverdoppelung lösen.





Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das gegebene Quadrat die Seitenlänge 3 hat.

(a) Seien $a = \overline{B'D}, b = \overline{AB'}, c = \overline{AI}$ und $d = \overline{B'I}$. Zeigen Sie, dass $c = \frac{3a-3}{a}$ und $d = \frac{3}{a}$.

(b) Verwenden Sie den Satz von Pythagoras, um zu zeigen, dass a der kubischen Gleichung $3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 = 0$ genügt.

(c) Folgern Sie, dass $a^3 = 2b^3$ und erläutern Sie, wie man dadurch $\sqrt[3]{2}$ konstruieren kann.

Hinweis für (c): Benutzen Sie den Strahlensatz.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heisst *euklidische Bewegung*, falls

$$||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass jede Abbildung der Form $\varphi_A : x \mapsto Ax$ für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

i.e. $\varphi_A(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, eine euklidische Bewegung ist, genau denn wenn $A^T A = E_2$, i.e. wenn folgende Gleichheiten gelten:

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0.$$

(b) Folgern Sie, dass falls φ_A eine euklidische Bewegung ist, es einen Winkel α gibt, mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(c) Eine euklidische Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heisst *linear*, falls zusätzlich für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $a \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(2) $\varphi(ax) = a \cdot \varphi(x)$.

Zeigen Sie, dass jede lineare euklidische Bewegung von der Form φ_A ist.

(d) Erläutern Sie die geometrische Interpretation von linearen euklidischen Bewegungen anhand einer Skizze.

Abgabe: Dienstag, 31.05.2015 um 16:15 in den entsprechenden Fächern