Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (10 Punkte)**.** Das *Horner-Schema* ist eine Methode zum Auswerten eines Polynoms $\sum_{i=0}^{n} a_i^0 x^i$ an der Stelle $s \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n^1 &= a_n^0 \\ a_i^1 &= a_i^0 + a_{i+1}^1 \cdot s \text{ für } i \in \{n-1, \dots, 0\}. \end{aligned}$$

Sei $p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^1 x^{i-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $p(s) = a_0^1$.

(b) Beweisen Sie die Gleichheit $p(x) = (x-s)p_{n-1}(x) + p(s)$.

(c) Vergleichen Sie das Horner-Schema und die übliche Auswertung von Polynomen bzgl. Effizienz, indem Sie die Anzahl Multiplikationen und Additionen vergleichen.

(d) Das verallgemeinerte Horner-Schema ist gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned} a_n^k &= a_n^0 \\ a_i^{k+1} &= a_i^k + a_{i+1}^{k+1} \cdot s \end{aligned}$$

für $k = 0, \dots, n$ und $i = k, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{i+1}(x-s)^i$ und folgern Sie, dass $p^{(i)}(s) = i! \cdot a_i^{i+1}$.

(e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas die Funktionswerte von $p(x) = x^3 - 5x + 1$ und dessen Ableitungen an der Stelle $s = 2$ sowie das Taylorpolynom an dieser Stelle.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Es seien die Punkte $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben.

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass es ein Polynom $p(x)$ vom Grad n gibt, das $p(x_i) = y_i$ erfüllt für alle $i \leq n$. *Hinweis: Betrachten Sie im Induktionsschritt das Polynom*

$$p(x) = \frac{x - x_n}{x_0 - x_n} p_1(x) + \frac{x - x_0}{x_n - x_0} p_2(x)$$

für geeignete Polynome $p_1(x), p_2(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom aus (a) eindeutig ist.

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Sei $p(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, das keine gemeinsamen reellen Nullstellen mit seiner Ableitung $p'(x)$ besitzt. Eine endliche Folge $p_0(x), \dots, p_n(x)$ von Polynomen mit reellen Koeffizienten wird als *Sturmsche Kette von* $p(x)$ bezeichnet, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) $p_0(x) = p(x)$ und $p_1(x) = p'(x)$.

(2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $p_i(x) = 0$ ($i \in \{1, \dots, n-1\}$) gilt $p_{i-1}(x), p_{i+1}(x) \neq 0$ und $p_{i-1}(x)$ und $p_{i+1}(x)$ haben unterschiedliche Vorzeichen.

(3) $p_n(x)$ hat keine reelle Nullstelle.

(a) Beweisen Sie, dass die Rekursionsvorschrift $p_{i-1}(x) = q_i(x) \cdot p_i(x) - p_{i+1}(x)$ mit $\deg(p_{i+1}) < \deg(p_i)$ eine Sturmsche Kette definiert.

(b) Sei $S(x)$ die Anzahl Vorzeichenwechsel in der Folge $(p_0(x), \dots, p_n(x))$. Beweisen Sie, dass die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in Intervall $[a, b]$ für $a < b$ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch $S(a) - S(b)$ gegeben ist. *Hinweis: Beachten Sie, dass sich* $S(x)$ *und* $S(y)$ *für* $x < y$ *in* $[a, b]$ *nur unterscheiden, falls* $[x, y]$ *eine Nullstelle eines der* p_i *enthält. Untersuchen Sie das Verhalten von* $S(x)$ *auf den Nullstellen der* p_i.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Sturmschen Kette die Anzahl der Nullstellen von $p(x) = x^3 - 3x + 1$ im Intervall $[0, 3]$.

Bemerkung. Falls $p(x)$ und $p'(x)$ gemeinsame Nullstellen haben, so kann man allgemeiner verfahren: Man wendet den Algorithmus aus (a) an bis $p_{n+1} \equiv 0$ und erhält dann die Sturmsche Kette $\left(\frac{p_0(x)}{p_n(x)}, \frac{p_1(x)}{p_n(x)}, \dots, \frac{p_n(x)}{p_n(x)} = 1\right)$.

Abgabe: Dienstag, 10.05.2015 um 16:15 in den entsprechenden Fächern