Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Für $n \geq 1$ sei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Die *$n$-ten Einheitswurzeln* sind gegeben als $\zeta_n^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ für $k \in \{1, \dots, n\}$. Falls ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so nennen wir die kleinste positive Zahl $d \leq n$ mit $\zeta^d = 1$ die *Ordnung* von ζ. Eine n-te Einheitswurzel ζ heisst *primitiv*, falls sie Ordnung n hat.

(a) Zeigen Sie, dass ζ_n^k genau dann primitiv ist, wenn $\mathrm{ggT}(n, k) = 1$ (für $k \in \{1, \dots, n\}$).

(b) Sei ζ eine n-te Einheitswurzel der Ordnung d. Zeigen Sie, dass $\zeta^e = 1$ gilt, genau dann wenn d ein Teiler von e ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Teiler d von n eine n-te Einheitswurzel der Ordnung d existiert.

Aufgabe 6 (7 Punkte)**.** Das *n-te Kreisteilungspolynom* ist gegeben durch

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{\zeta^n = 1 \\ \zeta \text{ primitiv}}} (x - \zeta).$$

(a) Zeigen Sie, dass jede n-te Einheitswurzel eine primitive d-te Einheitswurzel für einen Teiler d von n ist.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) und dem Lemma von Bézout, dass

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x)$$

gilt.

(c) Für eine natürliche Zahl n sei $\varphi(n)$ die Anzahl aller natürlichen Zahlen in $a \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Die Funktion φ wird als *Eulersche φ-Funktion* bezeichnet. Folgern Sie die *Gauss'sche Formel*

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

(d) Berechnen Sie explizit Φ_8.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

(a) $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

(b) $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Sei $z = a + ib$ eine beliebige komplexe Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass sich der Realteil und der Imaginärteil der Kubikwurzeln von z durch eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten beschreiben lassen.

(b) Zeigen Sie, dass die Diskriminate der in (a) gegebenen kubischen Gleichung negativ ist (i.e. Casus irreducibilis).

Abgabe: Dienstag, 03.05.2015 um 16:15 in den entsprechenden Fächern