Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 10

Aufgabe 35 (3 Punkte)**.** Die *Cayley-Abbildung* ist definiert als $C(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$. Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises und der Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

unter C.

Aufgabe 36 (6 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob es eine gebrochen lineare Transformation L gibt mit

(a) $L(0) = -2, L(2) = 0, L(i) = \infty$ und $L(\infty) = -i$,

(b) $L(1) = i, L(i) = 1, L(0) = \infty$ und $L(3i) = 0$.

Falls es ein solches L gibt, bestimmen sie dessen Umkehrabbildung und dessen Fixpunkte, i.e. die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $L(z) = z$.

Aufgabe 37 (5 Punkte)**.** Das *Doppelverhältnis* von vier verschiedenen komplexen Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

(a) Für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ sei L_{z_1,z_2,z_3} die eindeutige gebrochen lineare Transformation mit L mit $L(z_1) = 1$, $L(z_2) = 0$ und $L(z_2) = \infty$. Zeigen Sie, dass

$$L_{z_1,z_2,z_3}(z) = \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3).$$

(b) Zeigen Sie, dass gebrochen lineare Transformationen Doppelverhältnisse erhalten, d.h. ist L eine gebrochen lineare Transformation mit $w_i = L(z_i), i = 1, \ldots, 4$, so gilt

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Aufgabe 38 (3 Punkte)**.** Sei S die Spiegelung an dem Kreis $K = K(z_0, r)$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ vom Radius $r > 0$. Weiterhin sei L eine gebrochen lineare Transformation, welche den Kreis K auf die reelle Achse abbildet.[1]
Zeigen Sie: Die Abbildung $L \circ S \circ L^{-1}$ ist die komplexe Konjugation, also die Spiegelung an der reellen Achse. *Dies rechtfertigt die Sprechweise "Spiegelung am Kreis".*

Hinweis: Die Kreisspiegelung ist gegeben durch $S(z) = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}$.

Aufgabe 39 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} M : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) &\to \mathrm{Bij}(\hat{\mathbb{C}}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Abgabe: Dienstag, 12.07.2016 um 16:15 in den entsprechenden Fächern

[1]Zur Erinnerung: man whle dazu drei verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 auf K. Dann gibt es bekanntlich genau eine gebrochen lineare Transformation L mit $L(z_1) = 0, L(z_2) = 1, L(z_3) = \infty$. Dieses L bildet dann K auf $\mathbb{R}$ ab.