Elemente der Mathematik - Sommer 2016

Prof. Dr. Matthias Lesch, Regula Krapf — Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** (a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$, d.h. berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil.

(i) $i^n,\ n \in \mathbb{Z}$ (ii) $\dfrac{1}{1-i}$ (iii) $\dfrac{1-i}{1+i}$ (iv) $\dfrac{1+2i}{(2+3i)^2}$

(b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} ix - 3y &= 1 \\ 2x + iy &= 2i. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\zeta = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\cos(\frac{2\pi}{5})$ einer quadratischen Gleichung genügt.

(b) Bestimmen Sie damit für den Real- und den Imaginärteil von ζ jeweils einen geschachtelten Wurzelausdruck mit rationalen Radikanden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie Formeln (in Form von geschachtelten Wurzelausdrücken) für den Real- und Imaginärteil der beiden Quadratwurzeln einer komplexen Zahl $a+ib$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Die *Hamiltonschen Quaternionen* sind definiert als

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\},$$

mit komponentenweiser Addition $+ : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ und Multiplikation $\cdot : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1 \\ ij = -ji &= k \\ jk = -kj &= i \\ ki = -ik &= j, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} &(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\cdot(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &+ (a_1c_1 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k. \end{aligned}$$

Es ist einfach zu sehen, dass $(\mathbb{H},+)$ eine abelsche Gruppe ist.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{H}, \cdot)$ assoziativ, aber nicht kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element von $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses besitzt. *Hinweis: Analog wie bei den komplexen Zahlen definiert man komplex konjugierte Quaternionen durch* $\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$.

Bemerkung. Ein Ring der Form $(R, +, \cdot)$ mit Einselement $1_R \neq 0_R$, sodass jedes Element von R ein multiplikatives Inverses besitzt, wird als *Schiefkörper* bezeichnet. Aufgabe 4 zeigt, dass $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ein Schiefkörper ist.

Abgabe: Dienstag, 26.04.2015 um 16:15 in der Vorlesung.