

Felix Hausdorff und die Grundlagenproblematik der Mathematik

VON PETER KOEPKE

Universität Bonn

24. November 2008

Zusammenfassung

Felix Hausdorff hat in seinem Buch *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, und weiteren Arbeiten entscheidende Beiträge zur modernen mengentheoretischen Grundlegung der Mathematik geleistet. Grundlagenproblematik der Mathematik ist somit Grundlagenproblematik der Mengenlehre. Hausdorff ist über die Antinomien der Mengenlehre wohlinformiert, aber er entscheidet sich in seiner Arbeit für einen pragmatischen Standpunkt: “so wollen wir hier den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber [...] den Weg zu jenem Paradoxon abschneiden.”

In dem Vortrag werden einige Elemente der Hausdorffschen Mengenlehre in Bezug auf die Grundlagenkrise skizziert. Unter Verwendung von Briefen und Schriften, auch aus dem umfangreichen Nachlass, soll Hausdorffs Grundlagenposition eingeordnet und mit seiner philosophischen Ontologie (*Das Chaos in kosmischer Auslese*, 1898) kontrastiert werden.

1. Grundzüge der Mengenlehre
2. Cantorsche Mengenlehre
3. Aus Hausdorffs Vita
4. Hausdorffs Hinwendung zur Mengenlehre
5. Grundlagenfragen
6. Axiome
7. Aus Hausdorffs Vita
8. Chaos in kosmischer Auslese
9. Mathematik als kosmische Auswahl?

„Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Dingen zu einem Ganzen, d.h. zu einem neuen Ding.“ [H 1914, S. 1]

„den naiven Mengenbegriff zulassen, dabei aber tatsächlich die Beschränkungen innehalten, die den Weg zu jenen Paradoxien abschneiden“ [H 1914, S. 2]

Cantor: Es gibt eine Bijektion $f: \mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

FELIX HAUSDORFF

8.11.1868 geboren in Breslau

1891 Promotion Leipzig

1895 Habilitation in Mathematik und Astronomie in Leipzig

1897 *Sant' Ilario, Gedanken aus der Landschaft Zarathustras* (PAUL MONGRÉ)

Sant' Ilario

„Der Wille zum System ist ein Mangel an Rechtschaffenheit“ (NIETZSCHE)

gibt es eine angenehmere Verführung für moderne Ohren? wir wollen kein System (unter uns, wir können's nicht); folglich sind wir rechtschaffen.

„... ich für meine Person sehe in der Ehrfurcht vor sich selbst als einem Schaffenden das höchste Ethos, das auf Erden erreichbar ist. ...“ (Aphorismus 63)

Die „Wissenschaft, die eine befestigte Gewissheit an die Spitze der Güter stellt“ ist ein Zeichen für die „bleiche Furcht, die Scheu für den problematischen Charakter des Daseins“.

- die *allgemeine Kontinuumshypothese*: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, für alle Ordinalzahlen α
- die *Konfinalität* einer Ordinalzahl, *Regularität* und *Singularität* von Ordinalzahlen
- *schwach unerreichbare* Kardinalzahlen (bei HAUSDORFF *exorbitante* Zahlen)

Die RUSSELSche Antinomie:

Die Klasse

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

kann keine Menge sein, denn ansonsten wäre

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R.$$

„uns zwingen will, die Charaktere des Fundamentalen und des Abgeleiteten in bestimmter Weise zu verteilen, und uns in rein definitorischen Angelegenheiten vor tiefsinnige und haarspalterische Entscheidungen stellt.“

„Gerade die Existenz jenes Widerspruchs legt der Logik und Mathematik die Pflicht auf, die (endlichen und unendlichen) Mengen, innerhalb deren sie operiert, auf widerspruchsfreie Definitionen zu prüfen; solche Klassen wie die Menge aller natürlichen Zahlen, die Menge aller Punkte des Raumes, die Menge aller Funktionen scheinen keine Bedenken darzubieten, während die Menge aller unendlichen Kardinal- oder Ordinalzahlen, oder in der Logik jene uferlosen negationen, wie Nichtmensch, nichtgrün, zu den unzulässigen Klassenbegriffen gehören.“

„Daraus entsteht nun die Unsicherheit, ob nicht auch andere, vielleicht alle unendlichen Mengen solche widerspruchsbehafteten Scheinmengen, „Unmengen“ sein mögen, und sodann die Aufgabe, die Unsicherheit wieder zu beseitigen; die Mengenlehre ist auf neuer (axiomatischer) Grundlage so aufzubauen, daß Antinomien ausgeschlossen sind. Wir können auf die dahin zielenden, von E. Zermelo begonnenen und sicheren Erfolg versprechenden Untersuchungen in diesem Buche nicht eingehen und müssen unseren 'naiven' Mengenbegriff festhalten.“

„Privatim halte ich die Antinomien (nebst dem ganzen Intuitionismus) [...] für Unsinn“

Die mengentheoretischen Axiome postulieren Zusammenfassungen der Form

$$\{x \mid A(x)\}$$

für zulässige Eigenschaften $A(x)$

Existenz von *Paarmengen*

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \text{ oder } x = b\}.$$

Aussonderungsaxiom

$$\{x \mid x \in a \text{ und } A(x)\}$$

für gegebene Mengen a .

Unter einem *topologischen Raum* verstehen wir eine Menge E , worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Maßgabe der folgenden

Umgebungsaxiome:

- (A) **Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x ; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x .**
- (B) **Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x , so gibt es eine Umgebung W_x , die Teilmenge von beiden ist ($W_x \subseteq U_x \cap V_x$).**
- (C) **Liegt der Punkt y in U_x , so gibt es eine Umgebung U_y , die Teilmenge von U_x ist ($U_y \subseteq U_x$).**
- (D) **Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt ($U_x \cap U_y = \emptyset$).**

1898 *Chaos in kosmischer Auslese*

1901 Erste Vorlesung über Mengenlehre

1910 Außerordentliche Professur Bonn

1913 Ordinariat Greifswald

1920 Ordinariat Bonn

1935 Emeritierung

1942 Freitod, um drohender Deportation zu entgehen

Chaos in kosmischer Auslese

„Wir müssen die Freiheit, Willkür, Beliebigkeit des berühmten „Dinges an sich“ schon so lassen, wie wir sie gefunden haben, und dürfen eine Einschränkung der errungenen Allgemeinheit zu gunsten gerade unserer empirischen Specialität weder aus theoretischen Gründen zulassen noch aus praktischen postulieren. ... Damit sind die Brücken abgebrochen, die in der Phantasie aller Metaphysiker vom Chaos zum Kosmos herüber und hinüber führen, und ist das *Ende der Metaphysik* erklärt, - der eingeständlichen nicht minder als jener verlarvten, die aus ihrem Gefüge auszuscheiden der Naturwissenschaft des nächsten Jahrhunderts nicht erspart bleibt.“

Von meiner Nacktheit hobest Du den Schleier
Und zeigtest, wie im Grau'n Medusa thront.
Nach Hause scheuchst Du die erschreckten Freier,
Das Liebesmüh'n um mich bleibt unbelohnt.
Nun werd' ich wohl von ihrem Brunstgeleier
Wie sie von meinem Schauderblick verschont:
 Sie mögen, drängt es sich nach Leibeserben,
 Um Wissenschaft, die Erdentochter, werben!

Mathematik als kosmische Auswahl?

1. Ablehnung der Metaphysik
2. Verpflichtung zu wissenschaftlichem Fortschritt
3. Unabdingbarkeit der logischen Methode
4. Konkurrierende Theorien
5. „Alles Schaffen geschieht im Rausche und wird weder von den nüchternen Menschen noch von den nüchternen Augenblicken des schaffenden Menschen verstanden“.
6. Auswahl „nach Geschmack“ (MONGRÉ):

„Man darf Analyse und Allgemeinheit nur bis zur vorletzten Stufe treiben, wenn man die Dinge nicht entfärben und entkörpern will.“