

Der erste Eigenwert des Operators $D^{1/3}$
einer kompakten Sasaki-Mannigfaltigkeit

Diplomarbeit

Eingereicht an der

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT II
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

von

Mario Kassuba

geb. am 07. September 1981 in Osnabrück

am 26. Oktober 2006

Gutachter:

1. Prof. Dr. sc. Th. Friedrich
2. Dr. habil. I. Agricola

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1. Allgemeine Sachverhalte	3
1.1. Metrische affine Zusammenhänge mit Torsion und assoziierte Dirac-Operatoren	3
1.2. Die Schrödinger-Lichnerowicz-Formel	4
1.3. Krümmungsformeln	8
1.4. Wann erhält ∇^P die Aufspaltung $\Sigma M^n = \sum \Sigma_\mu$?	10
Kapitel 2. Eigenwertabschätzung im Fall $n = 5$	13
2.1. Der Sasaki-Fall in Σ_0 – Abschätzung und Klassifikation	13
2.2. Der Sasaki-Fall in Σ_4 und Σ_{-4} – Abschätzung und Klassifikation	16
Anhang	27
Literaturverzeichnis	31

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird das Quadrat des ersten Eigenwertes des Dirac-Operators $D^{1/3}$ einer Riemannschen Spin-Mannigfaltigkeit studiert, der aus dem Lift des affinen metrischen Zusammenhanges mit Torsion $1/3 T^c$ in das Spinor-Bündel und der Cliffordmultiplikation entsteht. Ich beschränke mich dabei auf solche Räume, deren charakteristische Torsion T^c parallel ist. Insbesondere gebe ich in Dimension 5 eine explizite untere Schranke für Sasaki-Mannigfaltigkeiten an, deren Skalarkrümmung größer als -4 ist. Diese untere Schranke ist im Bereich $-4 < \text{Scal}^g \leq 4(9+4\sqrt{5})$ optimal. Die Diskussion des Grenzfalles zeigt, dass die Sasaki-Mannigfaltigkeit notwendig ein Eta-Einstein-Raum sein muss, damit der kleinstmögliche Eigenwert des Dirac-Operators angenommen wird. Umgekehrt liefern alle einfach-zusammenhängenden Eta-Einstein-Räume mit Skalarkrümmung $-4 < \text{Scal}^g \leq 4(9+4\sqrt{5})$ Beispiele Riemannscher Mannigfaltigkeiten, in denen der kleinstmögliche Eigenwert tatsächlich realisiert wird.

Im ersten Kapitel werden alle für die Eigenwertabschätzung notwendigen Formeln bereit gestellt. Ich führe für jeden symmetrischen, ∇^c -parallelen und mit T vertauschenden Endomorphismus P eine metrische kovariante Ableitung ∇^P im Spinor-Bündel ein und rechne die Schrödinger-Lichnerowicz-Formel des symmetrischen Operators $(D^{1/3} + P)^2$ aus. Dann berechne ich die Krümmung der kovarianten Ableitungen ∇^P und diskutiere, wie der Ricci-Tensor des charakteristischen Zusammenhanges als Endomorphismus im Spinor-Bündel wirkt. Ausgehend von einer Zerlegung des Spinor-Bündels in die Eigenräume der charakteristischen Torsion gebe ich ein Kriterium dafür an, unter welchen Bedingungen an P die kovariante Ableitung ∇^P diese Aufspaltung erhält.

Im zweiten Kapitel wende ich mich den 5-dimensionalen Sasaki-Mannigfaltigkeiten zu. Deren Spinor-Bündel ΣM^5 zerfallen entsprechend den Eigenräumen von T^c in die direkte Summe dreier Unterbündel Σ_{-4} , Σ_0 und Σ_4 . Ich untersuche zunächst alle Eigenwerte des Operators $(D^{1/3})^2$, deren Eigenspinoren im Kern von T^c liegen. Es stellt sich heraus, dass für $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ diese Eigenwerte nach unten immer durch den kleinsten Eigenwert, dessen Eigenspinoren in einem der anderen beiden Bündel liegen, beschränkt sind. Schließlich produziere ich eine untere Schranke für alle Eigenwerte λ mit Eigenspinoren $\psi \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ im Bereich $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ und untersuche die geometrischen Konsequenzen im Grenzfalle.

Allgemeine Sachverhalte

1.1. Metrische affine Zusammenhänge mit Torsion und assoziierte Dirac-Operatoren

Es sei (M^n, g) eine n -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Die Metrik g definiert einen eindeutig bestimmten metrischen und torsionsfreien affinen Zusammenhang, den Levi-Civita-Zusammenhang, den wir fortan mit ∇^g bezeichnen wollen. Verzichten wir auf Torsionsfreiheit, so ist eine natürliche Klasse eben solcher affiner Zusammenhänge durch die Forderung nach *total-schiefsymmetrischer Torsion* gegeben (vgl. [AF04a]). Dabei sagen wir, dass ein Zusammenhang ∇ *total-schiefsymmetrische Torsion* T hat, wenn $g(T(X, Y), Z) = -g(T(X, Z), Y) \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt, mit anderen Worten: Der $(3,0)$ -Tensor $T(X, Y, Z) = g(T(X, Y), Z)$ ist eine 3-Form, $T \in \bigwedge^3 M$. Wir vereinbaren, von nun an 1-Formen und Vektorfelder via g miteinander zu identifizieren, $TM = T^*M$. Der Raum aller affinen Zusammenhänge ist ein affiner Raum, dessen zugehöriger linearer Raum die $(2,1)$ -Tensoren von M sind. Ist dann $T \in \bigwedge^3 M$ eine 3-Form und zeichnen wir als Fußpunkt den Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g aus, so ist der affine metrische Zusammenhang mit Torsion T eindeutig durch die Formel

$$(1) \quad \nabla^T = \nabla^g + \frac{1}{2}T$$

gegeben. Wenn nun \mathcal{R} eine G -Struktur ist, d.h. G ist eine abgeschlossene Untergruppe der $SO(n)$ und \mathcal{R} eine G -Reduktion des $SO(n)$ -Hauptfaserbündels der orthonormalen Repere $\mathcal{F}(M)$, dann ist die Frage nach Eindeutigkeit, die Frage nach der Existenz eines eindeutig bestimmten affinen metrischen Zusammenhanges, der total-schiefsymmetrische Torsion hat und die G -Struktur erhält – dem *charakteristischen Zusammenhang*. Wir verweisen auf [Fr03], wo die notwendige und hinreichende Bedingung dafür formuliert und bewiesen ist. Ist M eine Spin-Mannigfaltigkeit, so fixieren wir eine Spin-Struktur und bezeichnen das zugehörige Spinor-Bündel mit ΣM . Wir schreiben für den Lift des metrischen Zusammenhanges ∇^T nach Σ wieder ∇^T . Dann ist ∇^T für alle Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ und Spinorfelder $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ explizit durch

$$(2) \quad \nabla_X^T \psi = \nabla_X^g \psi + \frac{1}{4}(X \lrcorner T) \cdot \psi$$

gegeben (s. [AF04a]) und wird zu einer metrischen kovarianten Ableitung, die die Kettenregel bzgl. der Clifford-Multiplikation $\mu : TM \otimes \Sigma \rightarrow \Sigma$ erfüllt. Der zu ∇^T assoziierte Dirac-Operator D^T wird nun wie im klassischen Fall durch Hintereinanderausführung von ∇^T und μ definiert und so zu einem Differentialoperator erster Ordnung $\Gamma(\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Sigma)$, dessen Hauptsymbol durch die Cliffordmultiplikation gegeben ist. Insbesondere drückt sich D^T lokal für ein orthonormales Reper e_1, \dots, e_n durch die Formel

$$(3) \quad D^T = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^T$$

aus. Mit (3) und den bekannten Eigenschaften der Clifford-Algebra erhält man nun unmittelbar die Rechenregeln

$$(4) \quad D^T(f\psi) = f \cdot D^T\psi + \text{grad}f \cdot \psi,$$

$$(5) \quad D^T(X \cdot \psi) = -X \cdot D^T\psi - 2\nabla_X^T\psi + \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^T X \cdot \psi$$

für alle Spinorfelder $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ und Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$. Im allgemeinen ist D^T ein symmetrischer Operator im Raum $L^2(\Sigma)$ der L^2 -Schnitte in Σ mit $\text{dom } D^T = \Gamma_c(\Sigma)$ – dem Raum der glatten Schnitte in Σ mit kompaktem Träger – wie man sofort mit der entsprechenden Eigenschaft des klassischen Dirac-Operators schließt ([Fr00]). Für kompakte Spin-Mannigfaltigkeiten ist D^T also ein symmetrischer Operator. Weiter folgt aus der allgemeinen Theorie elliptischer Differentialoperatoren, dass D^T wesentlich selbstadjungiert ist mit $\text{dom } D^T = \Gamma(\Sigma)$ und reines Punktspektrum hat, das zudem diskret ist, d.h. $\text{spec } \overline{D^T} = \text{spec}_p \overline{D^T}$ und $\dim \ker(\overline{D^T} - \lambda) < \infty \forall \lambda \in \text{spec } \overline{D^T}$. Insbesondere besagt die elliptische Regularität, dass jeder Eigenschnitt von $\overline{D^T}$ glatt ist. Der Hilbertraum $L^2(\Sigma)$ zerfällt dann in die orthogonale Summe der Eigenräume von D^T ,

$$L^2(\Sigma) = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \text{spec } D^T} \text{Eig}_\lambda(D^T)}.$$

Alle diese Eigenschaften gelten natürlich auch für den elliptischen Operator $(D^T)^2$, so dass der Vergleich der Spektralzerlegungen von $L^2(\Sigma)$ bzgl. D^T bzw. $(D^T)^2$ die Gleichheit $\text{spec } (D^T)^2 = \{\lambda^2; \lambda \in \text{spec } D^T\}$ liefert. Vergleichen wir noch D^T mit $D^g := D^0$. Die Differenz $D^T - D^g$ ist ein Differentialoperator nullter Ordnung, d.h. ein Endomorphismus, der präzise durch

$$(6) \quad D^T = D^g + \frac{3}{4}T$$

gegeben ist ([AF04b]).

1.2. Die Schrödinger-Lichnerowicz-Formel

In diesem Abschnitt wollen wir die Schrödinger-Lichnerowicz-Formel für den Operator $D^{1/3} := D^{1/3T}$ formulieren und verallgemeinern. Wir suchen somit eine Darstellung von $(D^{1/3})^2$ als Summe eines spinoriellen Laplace-Operators zu einem geeigneten Zusammenhang und einem Endomorphismus im Spinor-Bündel. In der Clifford-Algebra gilt nach [AF04b] die Identität

$$(7) \quad T^2 = -2\sigma_T + |T|^2,$$

wobei

$$(8) \quad \sigma_T := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_i \lrcorner T) \wedge (e_i \lrcorner T).$$

Ganz allgemein wird der spinorielle Laplace-Operator zu einem (metrischen) spinoriellen Zusammenhang ∇ durch

$$(9) \quad \Delta^\nabla := \nabla^* \nabla = - \sum_{i=1}^n \{ \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} + \text{div}(e_i) \nabla_{e_i} \}$$

definiert. Man hat nun die folgende Schrödinger-Lichnerowicz-Formel, die $(D^{1/3})^2$ und $\Delta^T := \Delta^{\nabla^T}$ miteinander in Beziehung setzt ([AF04a]),

$$(10) \quad (D^{1/3})^2 = \Delta^T + \frac{1}{4}dT + \frac{1}{4}\text{Scal}^g - \frac{1}{8}|T|^2.$$

Wir schränken jetzt die Klasse derjenigen affinen metrischen Zusammenhänge ∇^T mit total-schiefsymmetrischer Torsion T , die wir zur Konstruktion von $D^{1/3}$ zulassen, weiter ein, indem wir $\nabla^T T = 0$ fordern. Insbesondere lassen wir also nur solche geometrischen Strukturen $\mathcal{R} \subset$

$\mathcal{F}(M)$ zu, deren charakteristischer Zusammenhang, ∇^T , ∇^T -parallele Torsion hat. Wie in [F102] bemerkt wurde, ist dT in dem Fall durch den algebraischen Typ von T bestimmt,

$$(11) \quad dT = 2\sigma_T.$$

Ein entsprechender Beweis dazu findet sich im Anhang.

Unter Beachtung von (7) ergibt sich

$$T^2 = -dT + |T|^2, \text{ also } dT = -T^2 + |T|^2.$$

Dann aber gilt

$$(12) \quad \begin{aligned} (D^{1/3})^2 &= \Delta^T + \frac{1}{4}(-T^2 + |T|^2) - \frac{1}{8}|T|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g \\ &= \Delta^T - \frac{1}{4}T^2 + \frac{1}{8}|T|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g. \end{aligned}$$

In [Fr80] wurde zur Abschätzung des ersten Eigenwertes von D^g der Operator $(D^g - f)^2$ für eine beliebige Funktion $f \in C^\infty(M)$ berechnet. Insbesondere stellte sich heraus, dass die erhaltene Schranke optimal wird, wenn man für f eine spezielle Konstante wählt. Wir wollen diese Vorgehensweise verallgemeinern und zugleich unsere konkrete Situation berücksichtigen. Daher fixieren wir anstelle einer Funktion einen beliebigen symmetrischen und ∇^T -parallelen Endomorphismus $P \in \Gamma(\text{End } \Sigma)$, der mit T vertauscht, $[P, T] = 0$, wobei wir T als symmetrischen Endomorphismus via Clifford-Multiplikation auf Σ auffassen. Dann ist $D^{1/3} + P$ ein symmetrischer Operator erster Ordnung $\Gamma(\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Sigma)$, und es gilt mit (12)

$$\begin{aligned} (D^{1/3} + P)^2 &= (D^{1/3})^2 + D^{1/3}P + PD^{1/3} + P^2 \\ &= \Delta^T - \frac{1}{4}T^2 + \frac{1}{8}|T|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g + P^2 + D^{1/3}P + PD^{1/3}. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Formel ein wenig diskutieren. Für kompaktes M können wir integrieren und erhalten mit $\psi \in \Gamma(\Sigma)$

$$\begin{aligned} \int_{M^n} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle &= \int_{M^n} \left\{ |\nabla^T \psi|^2 - \frac{1}{4}|T\psi|^2 + \frac{1}{8}|T|^2|\psi|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g|\psi|^2 + |P\psi|^2 \right\} \\ &\quad + \int_{M^n} \langle (D^{1/3}P + PD^{1/3})\psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Wir rechnen $D^{1/3}P + PD^{1/3}$ mit (3) und (6) um:

$$\begin{aligned} D^{1/3}P\psi + PD^{1/3}\psi &= (D^T - \frac{1}{2}T)P\psi + P(D^T - \frac{1}{2}T)P\psi \\ &= (D^T P + PD^T)\psi - TP\psi \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}(P\psi) + \sum_{i=1}^n P e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi - TP\psi \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i P + P e_i) \nabla_{e_i} \psi - TP\psi. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$(13) \quad \begin{aligned} \int_{M^n} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle &= \int_{M^n} \left\{ |\nabla^T \psi|^2 + \sum_{i=1}^n \langle (e_i P + P e_i) \nabla_{e_i}^T \psi, \psi \rangle \right\} \\ &\quad + \int_{M^n} \left\{ -\frac{1}{4}|T\psi|^2 + \frac{1}{8}|T|^2|\psi|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g|\psi|^2 + |P\psi|^2 - \langle TP\psi, \psi \rangle \right\}. \end{aligned}$$

In (13) sind noch Terme erster Ordnung. Also suchen wir nach der (metrischen) spinoriellen kovarianten Ableitung in Σ , die diesen Umstand beseitigt. Wir geben dazu die folgende

Definition 1. Mit den Bezeichnungen wie oben setzen wir

$$\nabla_X^P \psi := \nabla_X^T \psi - \frac{1}{2}(XP + PX)\psi$$

für $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ und $\psi \in \Gamma(\Sigma)$.

Wir halten jetzt eine wesentliche Eigenschaft von ∇^P fest in dem folgenden

Lemma 1. *Durch ∇^P wird eine metrische kovariante Ableitung im Spinor-Bündel Σ definiert, d.h. es gilt*

$$X\langle\psi_1, \psi_2\rangle = \langle\nabla_X^P \psi_1, \psi_2\rangle + \langle\psi_1, \nabla_X^P \psi_2\rangle$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\psi_i \in \Gamma(\Sigma)$, $i = 1, 2$.

Beweis. Es ist klar, dass ∇^P eine kovariante Ableitung ist. Wir müssen also nur zeigen, dass ∇^P auch metrisch ist. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \langle\nabla_X^P \psi_1, \psi_2\rangle &= \langle\nabla_X^T \psi_1, \psi_2\rangle - \frac{1}{2}\langle X \cdot P\psi_1, \psi_2\rangle - \frac{1}{2}\langle PX \cdot \psi_1, \psi_2\rangle \\ &= X\langle\psi_1, \psi_2\rangle - \langle\psi_1, \nabla_X^T \psi_2\rangle + \frac{1}{2}\langle P\psi_1, X \cdot \psi_2\rangle - \frac{1}{2}\langle X \cdot \psi_1, P\psi_2\rangle \\ &= X\langle\psi_1, \psi_2\rangle - \langle\psi_1, \nabla_X^T \psi_2\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi_1, PX \cdot \psi_2\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi_1, X \cdot P\psi_2\rangle \\ &= X\langle\psi_1, \psi_2\rangle - \langle\psi_1, \nabla_X^P \psi_2\rangle. \end{aligned}$$

□

Wir bestimmen jetzt den zu ∇^P gehörigen spinoriellen Laplace-Operator. Mit (9) gilt

$$\begin{aligned} \Delta^P \psi &= -\sum_{i=1}^n \left\{ \nabla_{e_i}^P \nabla_{e_i}^P \psi + \operatorname{div}(e_i) \nabla_{e_i}^P \psi \right\} \\ &= -\sum_{e_i}^n \left\{ (\nabla_{e_i}^T - \frac{1}{2}(Pe_i + e_iP))(\nabla_{e_i}^T - \frac{1}{2}(Pe_i + e_iP))\psi + \operatorname{div}(e_i)(\nabla_{e_i}^T \psi - \frac{1}{2}(Pe_i + e_iP)\psi) \right\} \\ &= \Delta^T + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ (P\nabla_{e_i}^T e_i \cdot \psi + Pe_i \nabla_{e_i}^T \psi + \nabla_{e_i}^T e_i P\psi + e_i P\nabla_{e_i}^T \psi) + (Pe_i \nabla_{e_i}^T \psi + e_i P\nabla_{e_i}^T \psi) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \operatorname{div}(e_i)Pe_i + \operatorname{div}(e_i)e_iP - \frac{1}{2}(Pe_iPe_i - P^2 + e_iP^2e_i + e_iPe_iP) \right\} \psi \\ &= \Delta^T + \sum_{i=1}^n \left\{ Pe_i \nabla_{e_i}^T \psi + e_i P\nabla_{e_i}^T \psi - \frac{1}{4}(Pe_iPe_i - P^2 + e_iP^2e_i + e_iPe_iP) \psi \right\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|\nabla^P \psi|^2 = |\nabla^T \psi|^2 + \sum_{i=1}^n \langle \psi, (e_iP + Pe_i) \nabla_{e_i}^T \psi \rangle + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |(e_iP + Pe_i)\psi|^2.$$

Schreiben wir diese Gleichung nach $|\nabla^T \psi|^2$ um und setzen in (13) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{M^n} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle &= \int_{M^n} |\nabla^P \psi|^2 + \int_{M^n} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |(e_iP + Pe_i)\psi|^2 - \frac{1}{4}|T\psi|^2 + \frac{1}{8}|T|^2|\psi|^2 \right\} \\ (14) \quad &\quad + \int_{M^n} \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{Scal}^g |\psi|^2 + |P\psi|^2 - \langle TP\psi, \psi \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen in der folgenden

Proposition 1. *Gelte $\nabla^T T = 0$ und sei $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ein symmetrischer Endomorphismus mit $\nabla^T P = 0$, $[T, P] = 0$. Dann ist für alle $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, $\psi \in \Gamma(\Sigma)$*

$$\nabla_X^P \psi := \nabla_X^T \psi - \frac{1}{2}(XP + PX)\psi$$

eine metrische kovariante Ableitung im Spinor-Bündel. Falls M^n kompakt ist, gilt weiterhin die Formel

$$\begin{aligned} \int_{M^n} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle &= \int_{M^n} |\nabla^P \psi|^2 + \int_{M^n} \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |(e_i P + P e_i) \psi|^2 - \frac{1}{4} |T\psi|^2 + \frac{1}{8} |T|^2 |\psi|^2 \right\} \\ &+ \int_{M^n} \left\{ \frac{1}{4} \text{Scal}^g |\psi|^2 + |P\psi|^2 - \langle TP\psi, \psi \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Beispiel 1. Das einfachste Beispiel erhält man, wenn man P als Multiplikationsoperator wählt, $P = -f \cdot \text{Id}$, $f \in C^\infty(M)$. Dann ist

$$\nabla_X^f \psi := \nabla_X^P \psi = \nabla_X^T \psi + f \cdot X \cdot \psi$$

und unsere verallgemeinerte Schrödinger-Lichnerowicz-Formel lautet

$$\begin{aligned} \int_{M^n} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle &= \int_{M^n} |\nabla^f \psi|^2 + \int_{M^n} \left\{ -nf^2 |\psi|^2 - \frac{1}{4} |T\psi|^2 + \frac{1}{8} |T|^2 |\psi|^2 \right\} \\ &+ \int_{M^n} \left\{ \frac{1}{4} \text{Scal}^g |\psi|^2 + f^2 |\psi|^2 + f \langle T\psi, \psi \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man $T = 0$, so erhält man die bekannte Integralformel aus [Fr80] zurück.

Abschließend diskutieren wir noch den Fall, dass ψ ein Eigenspinor von $(D^{1/3})^2$ zum Eigenwert λ ist. $(D^{1/3})^2$ kommutiert mit T , $(D^{1/3})^2 \circ T = T \circ (D^{1/3})^2$ ([AF04b]). Also existiert ein Teilbündel $\Sigma_\mu \subset \Sigma$ und ein Spinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_\mu)$ mit

$$(D^{1/3})^2 \psi = \lambda \psi, \quad T \cdot \psi = \mu \psi \quad \text{und} \quad P\psi = \tilde{\mu} \psi.$$

Dann folgt mit (14):

$$\begin{aligned} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle_{L^2} &= \langle (D^{1/3} + \tilde{\mu}) \psi, (D^{1/3} + \tilde{\mu}) \psi \rangle_{L^2} \\ &= \|\nabla^P \psi\|^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \|(e_i P + P e_i) \psi\|^2 - \frac{1}{4} \|T\psi\|^2 + \frac{1}{8} \int_{M^n} |T|^2 |\psi|^2 \\ &+ \frac{1}{4} \int_{M^n} \text{Scal}^g |\psi|^2 + \tilde{\mu}^2 \|\psi\|^2 - \mu \tilde{\mu} \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \langle (D^{1/3} + P)^2 \psi, \psi \rangle_{L^2} &= \langle (D^{1/3})^2 \psi, \psi \rangle_{L^2} + \langle D^{1/3} P \psi, \psi \rangle_{L^2} + \langle P D^{1/3} \psi, \psi \rangle_{L^2} + \langle P^2 \psi, \psi \rangle_{L^2} \\ &= \lambda \|\psi\|^2 + 2\tilde{\mu} \langle \psi, D^{1/3} \psi \rangle_{L^2} + \tilde{\mu}^2 \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lambda \|\psi\|^2 + 2\tilde{\mu} \langle \psi, D^{1/3} \psi \rangle_{L^2} &= \|\nabla^P \psi\|^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \|(e_i P + P e_i) \psi\|^2 - \frac{1}{4} \|T\psi\|^2 \\ (15) \quad &+ \frac{1}{8} \int_{M^n} |T|^2 |\psi|^2 + \frac{1}{4} \int_{M^n} \text{Scal}^g |\psi|^2 - \mu \tilde{\mu} \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

1.3. Krümmungsformeln

In diesem Abschnitt wollen wir die Krümmung der Zusammenhänge ∇^P berechnen und die Beziehung zwischen dem Ricci-Tensor Ric^{∇^T} und dem Krümmungstensor \mathcal{R}^{∇^T} zum Zusammenhang ∇^T herstellen. Als Anwendung werden wir diskutieren, wie der Ricci-Tensor Ric^{∇^T} auf Spinoren wirkt, die bzgl. des Zusammenhanges ∇^P parallel sind.

Wir erinnern zunächst daran, dass die Krümmung \mathcal{R}^Σ der spinoriellen kovarianten Ableitung ∇^T eine endomorphismenwertige 2-Form ist, $\mathcal{R}^\Sigma \in \Gamma(\wedge^2 M \otimes \text{End}(\Sigma))$, und mittels

$$\mathcal{R}^\Sigma(X, Y)\psi = \nabla_X^T \nabla_Y^T \psi - \nabla_Y^T \nabla_X^T \psi - \nabla_{[X, Y]}^T \psi$$

berechnet wird. Der Krümmungstensor \mathcal{R}^{∇^T} von (M, g) zum affinen Zusammenhang ∇^T kann als Endomorphismus auf den 2-Formen, $\mathcal{R}^{\nabla^T} \in \Gamma(\text{End}(\wedge^2 M))$, via

$$\mathcal{R}^{\nabla^T}(e_i \wedge e_j) := \sum_{k < l} R_{ijkl} e_k \wedge e_l$$

aufgefasst werden. Schließlich fassen wir den Ricci-Tensor Ric^{∇^T} von ∇^T als Bündelmorphismus $TM \rightarrow TM$ durch

$$\text{Ric}(X) := \sum_{i=1}^n \text{Ric}(X, e_i) e_i$$

auf. Eine lokale Rechnung zeigt, dass dann

$$(16) \quad \mathcal{R}^\Sigma(X, Y)\psi = \frac{1}{2} \mathcal{R}^{\nabla^T}(X \wedge Y) \cdot \psi$$

gilt (vgl. [BFGK91] für den Fall $T = 0$). Wir zitieren nun die erste Bianchi-Identität aus [FI02] für einen metrischen Zusammenhang mit total-schiefsymmetrischer Torsion:

Satz 1. *Für einen metrischen Zusammenhang ∇^T mit total-schiefsymmetrischer Torsion T gilt*

$$\mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} \mathcal{R}(X, Y, Z, V) = dT(X, Y, Z, V) - \sigma_T(X, Y, Z, V) - (\nabla_V^T T)(X, Y, Z).$$

Für einen Beweis dieser Identität verweisen wir auf den Anhang.

Wir stellen jetzt die Beziehung zwischen \mathcal{R}^Σ und Ric^{∇^T} her. Per definitionem gilt zunächst

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e_k \cdot \mathcal{R}^\Sigma(e_l, e_k) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n e_k \cdot \mathcal{R}^{\nabla^T}(e_l \wedge e_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i < j} R_{lkij} e_k \cdot e_i \cdot e_j \\ &= R_1 + R_2, \end{aligned}$$

wobei wir die letzte Doppelsumme zerlegt haben in

$$R_1 := \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j \\ i < j}} R_{lkij} e_k \cdot e_i \cdot e_j$$

und

$$R_2 := \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left[\sum_{p=1}^{r-1} R_{lppr} e_p \cdot e_p \cdot e_r + \sum_{q=r+1}^n R_{lqrq} e_q \cdot e_r \cdot e_q \right].$$

Wir beschäftigen uns mit R_1 . Indem wir geeignet umsummieren, können wir schreiben

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j \\ i < j}} R_{lkij} e_k \cdot e_i \cdot e_j \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i < j} \left(\sum_{k < i} R_{lkij} e_k \cdot e_i \cdot e_j + \sum_{i < k < j} R_{lkij} e_k \cdot e_i \cdot e_j + \sum_{j < k} R_{lkij} e_k \cdot e_i \cdot e_j \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k < i < j} (\mathfrak{S}_{\{k,i,j\}} R_{lkij}) e_k \cdot e_i \cdot e_j.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun unter Beachtung von (11) die erste Bianchi-Identität für ∇^T -paralleles T anwenden, so folgt

$$R_1 = -\frac{1}{4} e_l \lrcorner dT.$$

Wir wenden uns jetzt R_2 zu. Weil ∇^T ein metrischer Zusammenhang ist, ist der als $(4,0)$ -Tensor aufgefasste Krümmungstensor \mathcal{R}^{∇^T} schiefssymmetrisch in der dritten und vierten Komponente. Die wohlbekannten Regeln der Cliffordmultiplikation ausnutzend erhalten wir

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left[\sum_{p=1}^{r-1} R_{lppr} e_p \cdot e_p \cdot e_r + \sum_{q=r+1}^n R_{lqqr} e_q \cdot e_r \cdot e_q \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left[\sum_{p=1}^{r-1} R_{lppr} e_p \cdot e_p \cdot e_r + \sum_{q=r+1}^n R_{lqqr} e_q \cdot e_q \cdot e_r \right] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \left[\sum_{p=1}^{r-1} R_{lppr} e_r + \sum_{q=r+1}^n R_{lqqr} e_r \right].
\end{aligned}$$

Bekanntlich entsteht der Ricci-Tensor durch Spurbildung in der zweiten und dritten Komponente von \mathcal{R}^{∇^T} , so dass folgt

$$R_2 = -\frac{1}{2} \text{Ric}^{\nabla^T}(e_l).$$

Damit ist das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 2. *Unter der Voraussetzung, dass $\nabla^T T = 0$ gilt, sind der Ricci-Tensor Ric^{∇^T} und der Krümmungstensor \mathcal{R}^Σ , aufgefasst als Endomorphismen im Spinor-Bündel ΣM^n , durch*

$$\text{Ric}^{\nabla^T}(X) = -2 \sum_{k=1}^n e_k \cdot \mathcal{R}^\Sigma(X, e_k) + \frac{1}{2} X \lrcorner dT$$

miteinander verbunden.

Bemerkung 1. Ist $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ ein ∇^T -paralleler Spinor, dann folgt aus dem Lemma, dass $\text{Ric}^{\nabla^T}(X) \cdot \psi = \frac{1}{2} X \lrcorner dT \cdot \psi$ gelten muss. Das ist ein Spezialfall der allgemeinen Integrabilitätsbedingung in [F102]. Der Fall $T = 0$ liefert die bekannte Beziehung aus [BFGK91] zurück.

Wir wenden uns nun der Krümmung der Zusammenhänge ∇^P zu. Per definitionem gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\nabla^P}(X, Y)\psi &= \nabla_X^P \nabla_Y^P \psi - \nabla_Y^P \nabla_X^P \psi - \nabla_{[X, Y]}^P \psi \\
&= (\nabla_X^T - \frac{1}{2}(XP + PX))(\nabla_Y^T - \frac{1}{2}(YP + PY))\psi \\
&\quad - (\nabla_Y^T - \frac{1}{2}(YP + PY))(\nabla_X^T - \frac{1}{2}(XP + PX))\psi \\
&\quad - (\nabla_{[X, Y]}^T - \frac{1}{2}(P[X, Y] + [X, Y]P))\psi \\
&= \mathcal{R}^\Sigma(X, Y)\psi - \frac{1}{2}T(X, Y)P\psi - \frac{1}{2}PT(X, Y)\psi \\
&\quad + \frac{1}{4}(XP + PX)(YP + PY)\psi - \frac{1}{4}(YP + PY)(XP + PX)\psi.
\end{aligned}$$

Lemma 3. Die Krümmung des Zusammenhanges ∇^P ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\nabla^P}(X, Y) &= \mathcal{R}^\Sigma(X, Y) - \frac{1}{2}T(X, Y)P - \frac{1}{2}PT(X, Y) \\
&\quad + \frac{1}{4}(XP + PX)(YP + PY) - \frac{1}{4}(YP + PY)(XP + PX).
\end{aligned}$$

Nun können wir Lemma 2 und Lemma 3 miteinander kombinieren:

Lemma 4. Ist $\psi \in \Gamma(\Sigma)$ ein ∇^P -paralleler Spinor, dann ist die Wirkung des Ricci-Tensors Ric^{∇^T} auf ψ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\text{Ric}^{\nabla^T}(X)\psi &= - \sum_{i=1}^n \left[e_i T(X, e_i)P + e_i P T(X, e_i) - \frac{1}{2}e_i(XP + PX)(e_i P + P e_i) \right] \psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n e_i P e_i (XP + PX)\psi + \frac{n}{2}P(XP + PX) + \frac{1}{2}X \lrcorner dT \cdot \psi.
\end{aligned}$$

1.4. Wann erhält ∇^P die Aufspaltung $\Sigma M^n = \sum \Sigma_\mu$?

Wir hatten in Abschnitt 1.2 jedem symmetrischen, ∇^T -parallelen und mit T vertauschenden Endomorphismus $P \in \Gamma(\Sigma)$ eine metrische kovariante Ableitung ∇^P zugeordnet. In diesem Abschnitt wollen wir diskutieren, welche Klasse von Endomorphismen P für unsere Zwecke die optimale ist. Wir bemerken zunächst, dass wegen $\nabla^T T = 0$ T konstante Eigenwerte auf Σ hat ([AF04b]). Σ zerfällt demnach in die direkte und endliche Summe der Eigenräume von T . Betrachte nun $\Sigma_\mu := \{\sigma \in \Sigma; T\sigma = \mu\sigma\}$ und $\psi \in \Gamma(\Sigma_\mu)$. Wir sehen sofort, dass wieder $\nabla_X^T \psi \in \Gamma(\Sigma_\mu)$, denn $T\nabla_X^T \psi = \nabla_X^T(T \cdot \psi) = \mu \nabla_X^T \psi$. Fragen wir also nach einer unteren Schranke für den ersten Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2$, so legt es diese Beobachtung nahe, zunächst nur untere Schranken C_μ für die Operatoren $(D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_\mu)}$, $\mu \in \text{spec}_p T$ zu produzieren. Weil $(D^{1/3})^2$ mit T kommutiert, ist $(D^{1/3})^2 \geq \min \{C_\mu; \mu \in \text{spec}_p T\}$. Wir werden diese Vorgehensweise systematisch in Kapitel 2 verfolgen.

Im allgemeinen werden die Eigenräume von T nun nicht mehr ∇^P -parallel sein. Wir können aber für ein einzelnes Teilbündel Σ_μ nach solchen Endomorphismen P fragen, für die

$$\nabla_{\Gamma(\Sigma_\mu)}^P : \Gamma(\Sigma_\mu \otimes TM) \rightarrow \Gamma(\Sigma_\mu \otimes TM).$$

Die zusätzliche Bedingung, die wir also an ∇^P stellen lautet:

$$T((XP + PX)\psi) = \mu(XP + PX)\psi$$

oder

$$TXP\psi + TPX\psi = \mu XP\psi + \mu PX\psi$$

für alle $X \in TM^n$ und alle $\psi \in \Sigma_\mu$.

Weil T mit P kommutiert, transformiert P das Bündel Σ_μ in sich. Wir nehmen jetzt an, dass P auf dem Teilbündel Σ_μ durch $\tilde{\mu}$ wirkt. Dann folgt

$$\tilde{\mu}TX\psi + TPX\psi = \mu\tilde{\mu}X\psi + \mu PX\psi.$$

Ist nun speziell $P = P(T)$ ein Polynom in T , so gilt $\tilde{\mu} = P(\mu)$ und die Bedingung lautet

$$[P(\mu)T + TP(T) - \mu P(\mu) - \mu P(T)]X \cdot \psi = 0.$$

Betrachte den Raum $\{X \cdot \psi; X \in TM^n, \psi \in \Sigma_\mu\}$ und wähle die minimale Anzahl der Eigenwerte $\mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}$ von T mit

$$\{X \cdot \psi; X \in TM^n, \psi \in \Sigma_\mu\} \subset \Sigma_{\mu_{i_1}} \oplus \dots \oplus \Sigma_{\mu_{i_k}}.$$

Dann genügt es, dass $[P(\mu)T + TP(T) - \mu P(\mu) - \mu P(T)]$ auf $\Sigma_{\mu_{i_1}} \oplus \dots \oplus \Sigma_{\mu_{i_k}}$ verschwindet.

Damit haben wir den folgenden

Satz 2. Gegeben sei das Teilbündel $\Sigma_\mu \subset \Sigma$. Wähle die minimale Anzahl der Eigenwerte $\mu_{i_1} \dots \mu_{i_k}$ von T mit

$$\{X \cdot \psi; X \in TM^n, \psi \in \Sigma_\mu\} \subset \Sigma_{\mu_{i_1}} \oplus \dots \oplus \Sigma_{\mu_{i_k}}.$$

Gilt für alle $1 \leq \alpha \leq k$

$$(17) \quad \mu_{i_\alpha} P(\mu) + \mu_{i_\alpha} P(\mu_{i_\alpha}) - \mu P(\mu) - \mu P(\mu_{i_\alpha}) = 0,$$

so erhält die kovariante Ableitung

$$\nabla_X^P \psi = \nabla_X^T \psi - \frac{1}{2}(XP(T) + P(T)X)\psi$$

das Teilbündel Σ_μ .

Bemerkung 2. (17) ist immer erfüllt für $\mu_\alpha = \mu$. Es genügt also in einer konkreten Situation, das Kriterium für alle $\mu_\alpha \neq \mu$ zu diskutieren.

Eigenwertabschätzung im Fall $n = 5$

Es sei $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ eine kompakte 5-dimensionale Spin-Mannigfaltigkeit, die eine Sasaki-Struktur trägt. Wir bezeichnen mit ∇^T den eindeutig bestimmten charakteristischen Zusammenhang, der die Kontaktstruktur erhält. Weiter orientieren wir M^5 durch die Forderung, dass $d\eta = 2(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$. Dann ist T durch

$$T = \eta \wedge d\eta$$

gegeben und ∇^T -parallel ([FI02]). In einer Eigenbasis hat T in der 5-dimensionalen Spin-Darstellung Δ_5 die Matrixdarstellung

$$(1) \quad T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend werden T^2 und T^3 dargestellt durch

$$(2) \quad T^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} -64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = 16 T.$$

Wir setzen also unseren Endomorphismus P wie folgt an,

$$P(T) = a_0 I + a_1 T + a_2 T^2$$

mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und erhalten so eine 3-parametrische Schar von Polynomen.

2.1. Der Sasaki-Fall in Σ_0 – Abschätzung und Klassifikation

Wir betrachten jetzt das Teilbündel

$$\Sigma_0 = \{\psi \in \Sigma; T\psi = 0\}$$

- den Kern von T . Man rechnet leicht nach, dass $TM^n \cdot \Sigma_0$ in keinem echten Unterbündel von ΣM enthalten ist. Im Sinne von Satz 2, Kapitel 1 sind also alle drei Eigenwerte von T relevant. Die Bedingungen an unser Polynom P lauten nun

$$-4P(0) - 4P(-4) = 0 \text{ oder } P(0) = -P(-4)$$

und

$$4P(0) + 4P(4) = 0 \text{ oder } P(0) = -P(4).$$

Mit $P = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$ folgt daraus

$$a_0 = -a_0 + 4a_1 - 16a_2, \quad a_0 = a_1 - 8a_2$$

und

$$a_0 = -a_0 - 4a_1 - 16a_2, \quad a_0 = -2a_1 - 8a_2.$$

Wir bekommen also eine ein-parametrische Schar von Polynomen in T , $P(T) = -8a_2I + a_2T^2$, die kovariante Ableitungen in Σ_0 induzieren. Wir lesen von (1) und (2) deren Matrixdarstellungen in der 5-dimensionalen Spin-Darstellung ab:

$$-8a_2I + a_2T^2 = \begin{pmatrix} 8a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8a_2 \end{pmatrix}.$$

P wirkt also mit

$$\tilde{\mu} = -8a_2$$

auf Σ_0 .

Wir schätzen nun die Eigenwerte von $(D^{1/3})^2$ mit Eigenspinoren $\psi \in \Gamma(\Sigma_0)$ ab.

Die Formel (12), Kapitel 1 liefert auf Σ_0

$$(D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_0)} = \Delta^T + 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g.$$

Dann können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \langle (D^{1/3})^2\psi, \psi \rangle_{L^2} &= \langle \Delta^T\psi, \psi \rangle_{L^2} + \langle (1 + \frac{1}{4})\text{Scal}^g\psi, \psi \rangle \\ &\geq (1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g)\|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Damit erfüllt der kleinste Eigenwert von $(D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_0)}$

$$(3) \quad \lambda_{\min} \geq 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Falls $\lambda = 1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g$ gilt, dann ist ein zugehöriger Eigenspinor ψ ∇^T -parallel. In **[F103]** wurde gezeigt, dass M in dem Fall der Quotient aus der 5-dimensionalen Heisenberggruppe H^5 und einer auf H^5 wirkenden diskreten Gruppe Γ ist. Der Raum H^5/Γ hat aber Skalarkrümmung -4 , so dass sofort $\lambda = 0$ folgt.

Mit (15), Kapitel 1 und P wie oben können wir abschätzen

$$(4) \quad \begin{aligned} \lambda_{\min}\|\psi\|^2 + 2(-8a_2)\langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2} &\geq \|\nabla^P\psi\|^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^5 \|(e_iP + Pe_i)\psi\|^2 \\ &\quad + \|\psi\|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g\|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Wir berechnen $\sum_{i=1}^5 |(e_iP + Pe_i)\psi|^2$, $\psi \in \Sigma_0$. In der Spin-Darstellung gilt

$$\sum_{i=1}^5 |(e_iP + Pe_i)(0, 1, 0, 0)|^2 = 2 \cdot 16^2 a_2^2.$$

In (4) eingesetzt liefert das

$$(5) \quad \lambda_{\min} \geq 16a_2 \frac{\langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} - \frac{1}{4}16^2 a_2^2 + 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Um (5) zu optimieren, bestimmen wir das Maximum der Funktion

$$h_\psi(x) := 16 \frac{\langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} x - \frac{1}{4}16^2 x^2.$$

Wir berechnen $h'_\psi(x) = 16\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}/\|\psi\|^2 - 1/2 \cdot 16^2x$ und $h''_\psi(x) = -1/2 \cdot 16^2$. Daraus folgt, dass das Maximum in

$$x = \frac{1}{8} \frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}$$

angenommen wird. Also bekommen wir

$$\lambda_{\min} \geq 2 \frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}^2}{\|\psi\|^4} - \frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}^2}{\|\psi\|^4} + 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g,$$

oder mit $y := \langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}/\|\psi\|^2$

$$\lambda_{\min} \geq y^2 + 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Proposition 1. *Für einen Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ zum Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_0)$ gilt die Ungleichung*

$$\lambda_{\min} \geq y^2 + 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g \geq 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g,$$

wobei $y := \langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}/\|\psi\|^2$.

Wir betrachten weiter einen Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_0)$ des Operators $(D^{1/3})^2$ zum Eigenwert λ und zerlegen $D^{1/3}\psi = \alpha_4 + \alpha_0 + \alpha_{-4}$, wobei $\alpha_k := \text{pr}_{\Gamma(\Sigma_k)} D^{1/3}\psi$ die Projektion von $D^{1/3}\psi$ auf $\Gamma(\Sigma_k)$ bezeichnet, $k \in \{-4, 0, 4\}$. Dann ist einerseits

$$(D^{1/3})^2 D^{1/3}\psi = (D^{1/3})^2 \alpha_4 + (D^{1/3})^2 \alpha_0 + (D^{1/3})^2 \alpha_{-4}$$

und andererseits

$$(D^{1/3})^2 D^{1/3}\psi = \lambda \alpha_4 + \lambda \alpha_0 + \lambda \alpha_{-4}.$$

Weil $(D^{1/3})^2 \alpha_k \in \Gamma(\Sigma_k)$ gilt, $k \in \{-4, 0, 4\}$, folgt

$$(D^{1/3})^2 \alpha_{\pm 4} = \lambda \alpha_{\pm 4}$$

und

$$(D^{1/3})^2 \alpha_0 = \lambda \alpha_0.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle: Wenn α_4 oder α_{-4} nicht identisch 0 ist, dann ist α_4 bzw. α_{-4} Eigenspinor des Operators $(D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_4)}$ bzw. des Operators $(D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_{-4})}$ und damit λ größer oder gleich dem kleinsten Eigenwert von $(D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}$, $\lambda \geq \lambda_{\min}((D^{1/3})^2|_{\Gamma(\Sigma_{\pm 4})})$.

Andernfalls können wir annehmen, dass $\text{pr}_{\Gamma(\Sigma_4)} D^{1/3}\psi = 0$ und $\text{pr}_{\Gamma(\Sigma_{-4})} D^{1/3}\psi = 0$ sind für alle Eigenspinoren $\psi \in \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_0)})$, weil es sonst wenigstens einen Eigenspinor gäbe, dessen Bild unter $D^{1/3}$ einen nichttrivialen $\Gamma(\Sigma_{-4})$ - oder $\Gamma(\Sigma_4)$ -Anteil hätte und wir λ wie oben abschätzen könnten. Insbesondere folgt also aus $\psi \in \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_0)})$ auch $D^{1/3}\psi \in \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_0)})$. Damit entsteht ein symmetrischer Operator

$$D^{1/3}|_{\text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_0)})} : \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_0)}) \rightarrow \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_0)})$$

eines endlichdimensionalen Vektorraumes, d.h. es gibt eine Basis aus Eigenvektoren. Für einen Eigenvektor ψ_0 haben wir aber

$$D^{1/3}\psi_0 = A\psi_0$$

und

$$(D^{1/3})^2\psi_0 = \lambda\psi_0,$$

also $A^2 = \lambda$. Mit $y = \langle\psi_0, D^{1/3}\psi_0\rangle/\|\psi_0\|^2 = A$ und Proposition 1 folgt nun für das Minimum der Skalarkrümmung $\text{Scal}_{\min}^g \leq -4$.

Wir fassen zusammen in dem folgenden

Satz 1. *Es sei $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ eine kompakte Sasaki-Mannigfaltigkeit mit $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ und $T = \eta \wedge d\eta$ die charakteristische Torsion. Ist $\psi \in \Gamma(\Sigma_0)$ ein Eigenspinor von $(D^{1/3})^2$ zum Eigenwert λ , so zerlegen wir*

$$D^{1/3}\psi = \alpha_4 + \alpha_0 + \alpha_{-4},$$

wobei $\alpha_k = \text{pr}_{\Gamma(\Sigma_k)} D^{1/3}\psi$, $k \in \{-4, 0, 4\}$. $\alpha_{\pm 4} \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ sind dann Eigenspinoren von $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}$ zum Eigenwert λ und nicht gleichzeitig 0. Insbesondere ist der kleinste Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}$ immer größer oder gleich dem kleinsten Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}$,

$$\lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}) \geq \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}).$$

2.2. Der Sasaki-Fall in Σ_4 und Σ_{-4} – Abschätzung und Klassifikation

Wir betrachten jetzt das Teilbündel

$$\Sigma_4 = \{\psi \in \Sigma; T\psi = 4\psi\}.$$

Dieser Fall unterscheidet sich insofern von dem vorherigen, als dass Σ_4 ein eindimensionales Bündel ist. Ein qualitativer Unterschied manifestiert sich darin, dass nun $TM^5 \cdot \Sigma_4$ in einem echten Unterbündel von ΣM enthalten ist: Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$TM^n \cdot \Sigma_4 \in \Sigma_0 \oplus \Sigma_4.$$

Im Sinne von Satz 2 aus Kapitel 1 sind also die Eigenwerte $\mu_1 = 4$ und $\mu_2 = 0$ von T relevant. Das Kriterium (17) aus Satz 2, Kapitel 1 für die Einschränkung von P auf Σ_4 lautet nun

$$(6) \quad \mu_\alpha P(4) + \mu_\alpha P(\mu_\alpha) - 4P(4) - 4P(\mu_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Wir haben den Fall $\mu_2 = 0$ zu diskutieren. Dann vereinfacht sich (6) zu

$$-4P(4) - 4P(0) = 0, \quad \text{also } P(4) = -P(0).$$

Somit ergibt jedes Polynom $P(T) = a_0 + a_1T + a_2T^2$, das $P(4) = -P(0)$ erfüllt, eine gemäß Definition 1, Kapitel 1 kovariante Ableitung ∇^P im Bündel Σ_4 . Wegen $P(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2$ und $-P(0) = -a_0$ ist (6) äquivalent zu

$$a_0 + 2a_1 + 8a_2 = 0.$$

Wir haben nun eine zwei-parametrische Schar von Polynomen in T , $P(T) = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$, die kovariante Ableitungen ∇^P in Σ_4 induzieren. Deren Matrixdarstellungen in der 5-dimensionalen Spin-Darstellung lauten

$$(-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2 = \begin{pmatrix} 8a_2 - 6a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_1 - 8a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_1 - 8a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_1 + 8a_2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere wirkt $P = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$ im Bündel Σ_4 mit

$$\tilde{\mu} = 2a_1 + 8a_2.$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Abschätzung der Eigenwerte von $(D^{1/3})^2$ auf $\Gamma(\Sigma_4)$.

Die einfache Formel (12) aus Kapitel 1 liefert auf $\Gamma(\Sigma_4)$

$$(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_4)} = \Delta^T - 4 + 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g,$$

denn T wirkt durch Multiplikation mit 4 auf Σ_4 und $|T|^2 = 8$. Dann schätzt man ab

$$\begin{aligned} \left\langle (D^{1/3})^2\psi, \psi \right\rangle_{L^2} &= \langle \Delta^T\psi, \psi \rangle_{L^2} + \langle (-3 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g)\psi, \psi \rangle \\ &\geq (-3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g) \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Wir können den kleinsten Eigenwert von $(D^{1/3})_{\Gamma(\Sigma_4)}^2$ also nach unten abschätzen durch

$$(7) \quad \lambda_{\min} \geq -3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Benutzen wir $P = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$ so gilt mit (15) aus Kapitel 1

$$(8) \quad \begin{aligned} \lambda_{\min}\|\psi\|^2 + 2(2a_1 + 8a_2)\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2} &\geq \|\nabla^P\psi\|^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^5\|(e_iP + Pe_i)\psi\|^2 - 4\|\psi\|^2 \\ &+ \|\psi\|^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g\|\psi\|^2 - 4(2a_1 + 8a_2)\|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Damit müssen wir wieder $\sum_{i=1}^5|(e_iP + Pe_i)\psi|^2$ berechnen, jetzt aber für $\psi \in \Sigma_4$. In der Spin-Darstellung gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5(e_iP + Pe_i) \cdot (0, 0, 0, 1) &= (e_5P + Pe_5) \cdot (0, 0, 0, 1) \\ &= (0, 0, 0, 4i(a_1 + 4a_2)). \end{aligned}$$

Damit ist

$$(9) \quad \sum_{i=1}^5|(e_iP + Pe_i)\psi|^2 = 16(a_1 + 4a_2)^2|\psi|^2.$$

Setzen wir (9) in (8) ein und dividieren durch $\|\psi\|_{L^2}^2$, so folgt

$$\lambda_{\min} + 2(2a_1 + 8a_2)\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle}{\|\psi\|^2} \geq -4(a_1 + 4a_2)^2 - 3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g - 4(2a_1 + 8a_2),$$

oder, wenn wir $x := 2a_1 + 8a_2$ setzen,

$$(10) \quad \lambda_{\min} \geq -x^2 - 4x - 2x\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle}{\|\psi\|^2} - 3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g,$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir wollen (10) nach x optimieren, um die größtmögliche Schranke zu erhalten. Dazu bestimmen wir das Maximum von

$$g_{\psi}(x) := -x^2 - 4x - 2x\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}.$$

Wir erhalten $g'_{\psi}(x) = -2x - 4 - 2\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}/\|\psi\|^2$ und $g''_{\psi}(x) = -2$. Das Maximum wird also bei

$$x = -2 - \frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|_{L^2}^2}$$

angenommen. Wir setzen diesen speziellen x -Wert in (10) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &\geq -\left(2 + \frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}\right)^2 + 8 + 4\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} + 2\left(2 + \frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}\right)\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} \\ &\quad - 3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g \\ &= -4 - 4\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} + \left(\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}\right)^2 + 8 + 8\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} - 3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g \\ &= 1 + 4\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2} + \left(\frac{\langle\psi, D^{1/3}\psi\rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g, \end{aligned}$$

oder, wenn wir $y := \langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2} / \|\psi\|^2$ setzen,

$$(11) \quad \lambda_{\min} \geq 1 + 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Wir sehen sofort, dass (11) eine bessere Abschätzung liefern kann als (7), denn die quadratische Funktion $1 + 4z + z^2$ nimmt ihr Minimum genau in -2 an mit dem zugehörigen Funktionswert -3 . Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert uns aber

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{\langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2}^2}{\|\psi\|^4} \\ &\leq \frac{\|\psi\|^2 \cdot \|D^{1/3}\psi\|^2}{\|\psi\|^4} \\ &= \frac{\langle \psi, (D^{1/3})^2\psi \rangle}{\|\psi\|^2} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Mit (11) folgt somit für jeden Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_4)}$

$$(12) \quad \lambda \geq \min_{y \in [-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]} \{1 + 4y + y^2\} + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Falls $\lambda < 4$ ist, bekommen wir

$$\begin{aligned} \min_{y \in [-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]} \{1 + 4y + y^2\} &= \{1 + 4y + y^2\}_{|y=-\sqrt{\lambda}} \\ &= 1 - 4\sqrt{\lambda} + \lambda. \end{aligned}$$

Aus (12) entsteht damit

$$4\sqrt{\lambda} \geq 1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Ist nun $1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g \geq 0$, d.h. $\text{Scal}_{\min}^g \geq -4$, so folgt

$$\lambda \geq \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g)^2 > -3 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g.$$

Damit erfüllt jeder Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ mit Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ die Ungleichung

$$\lambda \geq \min \left\{ 4, \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g)^2 \right\}.$$

Für $\text{Scal}_{\min}^g \geq 28$ bleibt (7) allerdings die bessere Abschätzung. Wir halten das Ergebnis dieser Diskussion fest in der folgenden

Proposition 2. *Für einen Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ zum Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ gilt die Ungleichung*

$$\lambda \geq \begin{cases} 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2; & -4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 28 \\ -3 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g; & 28 \leq \text{Scal}_{\min}^g \end{cases}.$$

Wir halten noch zwei Konsequenzen im Gleichheitsfall fest:

Proposition 3. *Tritt in (11) der Gleichheitsfall auf, d.h. gilt $\lambda_{\min} = 1 + 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g$, $y = \langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2} / \|\psi\|^2$, so hat (M, g) konstante Skalarkrümmung Scal^g . Ferner existieren Zahlen a_1 und a_2 , so dass der zugehörige Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ parallel ist bezüglich ∇^P , $P = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$.*

Beweis. Beide Aussagen ergeben sich unmittelbar aus den obigen Abschätzungen. Der Übergang zum Minimum der Skalarkrümmung zeigt, dass diese im Gleichheitsfall konstant sein muss, das Weglassen der nichtnegativen Zahl $\|\nabla^P\|^2$ beim Übergang von (8) zu (10) beweist die Parallelität von ψ bzgl. eines gewissen Zusammenhangs ∇^P . \square

Umgekehrt sei nun $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ mit $\nabla^P \psi = 0$ für ein gewisses P , das (6) erfüllt. Nach Definition 1, Kapitel 1 ist also $\nabla_X^T \psi - \frac{1}{2}(XP + PX)\psi = 0$. Daraus ergibt sich nach Cliffordmultiplikation mit e_i und Aufsummation

$$D^T \psi + \frac{5}{2}P\psi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 e_i P e_i \psi = 0.$$

Der Vergleich von D^T und $D^{1/3}$ sowie die Tatsache, dass T als Multiplikationsoperator auf Σ_4 wirkt, liefern dann

$$(13) \quad D^{1/3} \psi + 2\psi + \frac{5}{2}P\psi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 e_i P e_i \psi = 0.$$

$P = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$ wirkt mit $\tilde{\mu} = 2a_1 + 8a_2$ auf ψ . Die Matrixdarstellung

$$\sum_{i=1}^5 e_i P e_i = \begin{pmatrix} 14a_1 + 24a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10a_1 - 24a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10a_1 - 24a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6a_1 + 24a_2 \end{pmatrix}$$

zeigt weiter, dass

$$\left(\sum_{i=1}^5 e_i P e_i \right) \psi = (6a_1 + 24a_2)\psi.$$

Also bekommen wir aus (13)

$$D^{1/3} \psi + 2\psi + \frac{5}{2}(2a_1 + 8a_2)\psi - (3a_1 + 12a_2)\psi = 0$$

oder

$$(14) \quad D^{1/3} \psi = -(2 + 2a_1 + 8a_2)\psi.$$

Proposition 4. *Ist $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ ∇^P -parallel, dann ist ψ Eigenspinor des Operators $D^{1/3}$ zum Eigenwert $-(2 + 2a_1 + 8a_2)$.*

Wir kommen noch einmal auf den Fall zurück, in dem die untere Grenze aus (11) realisiert wird, d.h. der kleinste Eigenwert von $(D^{1/3})_{\Gamma(\Sigma_4)}^2$ erfüllt

$$(15) \quad \lambda_{\min} = 1 + 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g, \quad y = \frac{\langle \psi, D^{1/3} \psi \rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}.$$

Wir hatten in Proposition 3 festgestellt, dass der zugehörige Eigenspinor ψ ∇^P -parallel ist für gewisse reelle Zahlen a_1, a_2 . Proposition 4 besagt dann, dass

$$\lambda_{\min} = (2 + 2a_1 + 8a_2)^2$$

und

$$y = -(2 + 2a_1 + 8a_2).$$

Daraus bekommen wir für die Skalarkrümmung die Gleichung

$$y^2 = 1 + 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g,$$

d.h.

$$\text{Scal}^g = -(4 + 16y) = 28 + 32a_1 + 128a_2.$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen in dem

Satz 2. Sei $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit, die eine Sasaki-Struktur trägt, und $T = \eta \wedge d\eta$ die charakteristische Torsion. Dann gilt für jeden Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ mit Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ die Ungleichung

$$\lambda \geq 1 + 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g \geq \begin{cases} 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2; & -4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 28 \\ -3 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g; & 28 \leq \text{Scal}_{\min}^g \end{cases}$$

mit

$$y = \frac{\langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}.$$

Tritt die Gleichheit

$$\lambda = 1 + 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g$$

ein, so folgt

- (1) es existieren Zahlen a_1, a_2 derart, dass mit $P = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$ der Spinor ψ ∇^P -parallel ist,
- (2) die Skalarkrümmung Scal^g ist konstant und durch $\text{Scal}^g = -(4 + 16y) = 28 + 32a_1 + 128a_2$ gegeben,
- (3) ψ ist sogar Eigenspinor des Operators $D^{1/3}$ zum Eigenwert $-(2 + 2a_1 + 8a_2)$, d.h.

$$y = -(2 + 2a_1 + 8a_2)$$

und

$$\lambda = (2 + 2a_1 + 8a_2)^2,$$

- (4) λ ist explizit gegeben durch

$$\lambda = \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{4}\text{Scal}^g)^2$$

und realisiert den kleinsten Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_4)}$, falls $-4 \leq \text{Scal}^g \leq 28$ ist.

Beweis. Die Abschätzung haben wir in Proposition 2 formuliert. Die ersten beiden Punkte im Gleichheitsfall sind genau die Aussagen aus Proposition 3. Punkt (3) hatten wir in Proposition 4 ff. festgestellt. Punkt (4) schließlich ergibt sich unmittelbar, indem man in (15) y durch $-\sqrt{\lambda}$ ersetzt. \square

Das Teilbündel

$$\Sigma_{-4} = \{\psi \in \Sigma; T\psi = -4\psi\}$$

behandelt man analog zum obigen Fall. Wir machen die Rechnungen nicht explizit vor und formulieren nur den

Satz 3. Sei $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit, die eine Sasaki-Struktur trägt und $T = \eta \wedge d\eta$ die charakteristische Torsion. Dann gilt für jeden Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ mit Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_{-4})$ die Ungleichung

$$\lambda \geq 1 - 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g \geq \begin{cases} 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2; & -4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 28 \\ -3 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g; & 28 \leq \text{Scal}_{\min}^g \end{cases}$$

mit

$$y = \frac{\langle \psi, D^{1/3}\psi \rangle_{L^2}}{\|\psi\|^2}.$$

Tritt die Gleichheit

$$\lambda = 1 - 4y + y^2 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g$$

ein, so folgt

- (1) es existieren Zahlen a_1, a_2 derart, dass mit $P = (-2a_1 - 8a_2)I + a_1T + a_2T^2$ der Spinor ψ ∇^P -parallel ist,

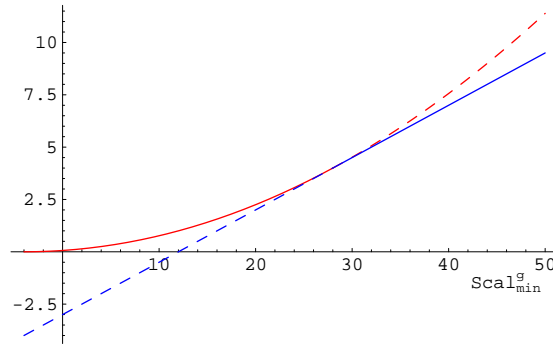


Abbildung 1. Untere Schranke für $\lambda((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_{\pm 4})})$ gemäß den Sätzen 2 und 3.

- (2) die Skalar­krümmung Scal^g ist konstant und durch $\text{Scal}^g = -4 + 16y = 28 + 32a_1 - 128a_2$ gegeben,
(3) ψ ist sogar Eigenspinor des Operators $D^{1/3}$ zum Eigenwert $2 + 2a_1 + 8a_2$, d.h.

$$y = 2 + 2a_1 - 8a_2$$

und

$$\lambda = (2 + 2a_1 - 8a_2)^2,$$

- (4) λ ist explizit gegeben durch

$$\lambda = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{4} \text{Scal}^g\right)^2$$

und realisiert den kleinsten Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_{-4})}$, falls $-4 \leq \text{Scal}^g \leq 28$ ist.

Bemerkung 1. In [AF04b] wurde ein gewisser Differentialoperator Ω zweiter Ordnung – der Casimir-Operator – eingeführt, der ebenso wie der Dirac-Operator auf Schnitten des Spinor-Bündels wirkt. Der Kern dieses Operators enthält alle ∇^T -parallelen Spinoren. Ω lässt sich auf die Bündel $\Sigma_4 \oplus \Sigma_{-4}$ und Σ_0 zu den Operatoren $\Omega_{\pm 4}$ und Ω_0 einschränken. Es ist nun bemerkenswert, dass die Bedingung (4) aus den Sätzen 2 und 3 für die Realisierung des kleinsten Eigenwertes auch in diesem anderen Kontext relevant ist: Für $\text{Scal}^g \neq -4$ ist $\ker \Omega_0$ trivial und $\Omega_{\pm 4}$ kann nur dann einen nicht-trivialen Kern haben, falls $-4 \leq \text{Scal}^g \leq 28$ ist.

Bemerkung 2. Offenbar ist die Abschätzung für $28 < \text{Scal}^g$ nicht optimal, denn aus $\lambda = -3 + 1/4 \text{Scal}^g_{\min}$ folgt der Grenzfall, und das impliziert $\lambda = 1/16(1 + 1/4 \text{Scal}^g_{\min})^2$ im Widerspruch zur Annahme. Abbildung 1 zeigt den Graph der Abschätzungen in Satz 2 und Satz 3: Das durchgezogene Parabelstück kennzeichnet die untere Schranke von $\lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{\Gamma(\Sigma_{\pm 4})})$ im Bereich $-4 < \text{Scal}^g_{\min} \leq 28$, das durchgezogene Geradenstück im Bereich $28 \leq \text{Scal}^g_{\min}$.

Bemerkung 3. Falls $-4 \leq \text{Scal}^g \leq 28$ ist, besagen die Sätze 2 und 3 insbesondere, dass die Existenz eines Eigenspinors ψ in $\Gamma(\Sigma_4)$ bzw. $\Gamma(\Sigma_{-4})$ mit optimalem Eigenwert λ_{\min} äquivalent ist zur Existenz eines ∇^P -parallelen Spinors ψ in $\Gamma(\Sigma_4)$ bzw. $\Gamma(\Sigma_{-4})$. Weil Σ_4 und Σ_{-4} eindimensionale Bündel sind, folgt aus optimalem Grenzverhalten also das Verschwinden der Krümmung \mathcal{R}^{∇^P} auf $\Gamma(\Sigma_4)$ bzw. $\Gamma(\Sigma_{-4})$ und umgekehrt, sofern wir M zusätzlich als einfach zusammenhängend voraussetzen. Die geometrischen Konsequenzen werden wir am Ende dieses Abschnittes diskutieren.

Wir studieren noch einmal $(D^{1/3})^2$ auf $\Gamma(\Sigma_4)$, wobei wir nun $\text{Scal}^g_{\min} \geq 28$ voraussetzen wollen. Wir beobachten zunächst, dass für einen Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ von $(D^{1/3})^2$ mit zugehörigem

Eigenwert λ , der Schnitt $D^{1/3}\psi \in \Gamma(\Sigma_4 \oplus \Sigma_0)$ ist. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} D^{1/3}\psi &= D^T - \frac{1}{2}T\psi \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^T \psi - \frac{1}{2}T\psi \end{aligned}$$

mit $T\psi \in \Gamma(\Sigma_4)$, $\nabla_{e_i}^T \psi \in \Gamma(\Sigma_4)$ und $e_i \cdot \nabla_{e_i}^T \psi \in \Gamma(\Sigma_0 \oplus \Sigma_4)$, wie wir am Anfang dieses Abschnittes festgestellt hatten. Entsprechend den Eigenräumen von T zerlegt sich

$$\begin{aligned} D^{1/3}\psi &= \text{pr}_{\Gamma(\Sigma_4)} D^{1/3}\psi + \text{pr}_{\Gamma(\Sigma_0)} D^{1/3}\psi \\ &=: \alpha_4 + \alpha_0. \end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst an, dass es wenigstens einen Eigenschnitt $\psi \in \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_4)})$ mit $\alpha_0 = 0$ gibt. Betrachte den Raum $W := \{\psi \in \Gamma(\Sigma_4); (D^{1/3})^2\psi = \lambda\psi \text{ und } D^{1/3}\psi \in \Gamma(\Sigma_4)\}$. W ist ein nichttrivialer und endlichdimensionaler Vektorraum, auf den sich $D^{1/3}$ als ein symmetrischer Operator einschränken lässt:

$$D^{1/3}_{|W} : W \rightarrow W.$$

W besitzt demnach eine Eigenbasis und ein Eigenschnitt ψ^* erfüllt

$$D^{1/3}\psi^* = A\psi^*$$

und

$$(D^{1/3})^2\psi^* = \lambda\psi^*,$$

woraus $A^2 = \lambda$ folgt. Mit $y = \langle \psi^*, D^{1/3}\psi^* \rangle / \|\psi^*\|^2 = \pm\sqrt{\lambda}$ und (11) folgt

$$\lambda \geq 1 \pm 4\sqrt{\lambda} + \lambda + \frac{1}{2} \text{Scal}_{\min}^g.$$

Weil wir $28 \leq \text{Scal}^g$ vorausgesetzt hatten, können wir quadrieren und erhalten

$$(16) \quad \lambda \geq \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{4} \text{Scal}_{\min}^g\right)^2,$$

d.h. die Schranke, die wir für den Bereich $-4 \leq \text{Scal}^g \leq 28$ produziert hatten, bleibt in diesem Fall auch für $28 \leq \text{Scal}^g$ bestehen.

Natürlich kann es aber auch sein, dass $\text{pr}_{\Gamma(\Sigma_0)} D^{1/3}\psi \neq 0$ für alle Eigenschnitte $\psi \in \text{Eig}_\lambda((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_4)})$. In dem Fall erhalten wir aus

$$(D^{1/3})^3\psi = (D^{1/3})^2\alpha_0 + (D^{1/3})^2\alpha_4$$

und

$$(D^{1/3})^3\psi = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_4$$

die Eigenwertgleichungen

$$(17) \quad (D^{1/3})^2\alpha_0 = \lambda\alpha_0$$

und

$$(18) \quad (D^{1/3})^2\alpha_4 = \lambda\alpha_4,$$

denn $(D^{1/3})^2$ lässt sich auf $\Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ und $\Gamma(\Sigma_0)$ einschränken. Somit ist λ Eigenwert von $(D^{1/3})^2$ mit Eigenspinor $\alpha_0 \in \Gamma(\Sigma_0)$ und genügt daher der Ungleichung aus Proposition 1:

$$\lambda \geq 1 + \frac{1}{4} \text{Scal}_{\min}^g.$$

Nun ist aber $1 + 1/4 \text{Scal}^g \geq 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}^g)^2$ für $\text{Scal}^g \leq 60$. Damit können wir die Abschätzung aus den Sätzen 2 und 3 verbessern zu:

Proposition 5. *Jeder Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ mit dem Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ erfüllt die Ungleichung*

$$\lambda \geq \begin{cases} 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2; & -4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 60 \\ 1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g; & 60 \leq \text{Scal}_{\min}^g \end{cases}$$

und diese ist optimal in dem Bereich $-4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 60$.
Insbesondere gilt

$$\lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}) \geq \min\left(\frac{1}{16}(1 + \frac{1}{4}\text{Scal}_{\min}^g)^2, \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)})\right).$$

Wir können die Abschätzung aus Proposition 5 für $60 \leq \text{Scal}_{\min}^g$ noch ein wenig verbessern. Wir hatten in (16) festgestellt, dass jeder Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_4)}$, der einen Eigenspinor ψ besitzt, für den $D^{1/3}\psi$ einen trivialen $\Gamma(\Sigma_0)$ -Anteil hat, größer oder gleich der Zahl $1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2$ ist. Also genügt es, sich auf die Eigenwerte λ mit Eigenspinoren ψ zu beschränken, für die $\alpha_0 = \text{pr}_{\Gamma(\Sigma_0)} D^{1/3}\psi \neq 0$ gilt. Nach (17) ist dann $\alpha_0 \in \Gamma(\Sigma_0)$ ein Eigenspinor von $(D^{1/3})^2$ zum Eigenwert λ . Dann schreiben wir mit (6), Kapitel 1

$$\begin{aligned} \lambda \alpha_0 &= (D^g + \frac{1}{4}T)(D^g + \frac{1}{4}T)\alpha_0 \\ &= (D^g + \frac{1}{4}T)D^g\alpha_0 \\ &= D^g D^g \alpha_0 + \frac{1}{4}TD^g\alpha_0. \end{aligned}$$

Nach Skalarmultiplikation mit α_0 erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda \|\alpha_0\|^2 &= \|D^g\alpha_0\|^2 + \frac{1}{4}\langle TD^g\alpha_0, \alpha_0 \rangle \\ &= \|D^g\alpha_0\|^2 + \frac{1}{4}\langle D^g\alpha_0, T\alpha_0 \rangle \\ &= \|D^g\alpha_0\|^2 \end{aligned}$$

oder

$$\lambda = \frac{\|D^g\alpha_0\|^2}{\|\alpha_0\|^2}.$$

Jetzt folgt aber aus der allgemeinen Riemannschen Abschätzung in [Fr80]

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \lambda_{\min}((D^g)^2) \\ &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \text{Scal}_{\min}^g \\ &= \frac{5}{16} \text{Scal}_{\min}^g. \end{aligned}$$

Weil $5/16 \text{Scal}_{\min}^g \geq 1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g$ ist für $16 \leq \text{Scal}_{\min}^g$, folgt die

Proposition 6. *Jeder Eigenwert λ des Operators $(D^{1/3})^2$ mit dem Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ erfüllt die Ungleichung*

$$\lambda \geq \begin{cases} 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2; & -4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5}) \\ 5/16 \text{Scal}_{\min}^g; & 4(9 + 4\sqrt{5}) \leq \text{Scal}_{\min}^g \end{cases}$$

und diese ist optimal in dem Bereich $-4 \leq \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$.

Mit den Sätzen 1, 2, 3 und den Propositionen 5, 6 erhalten wir den folgenden

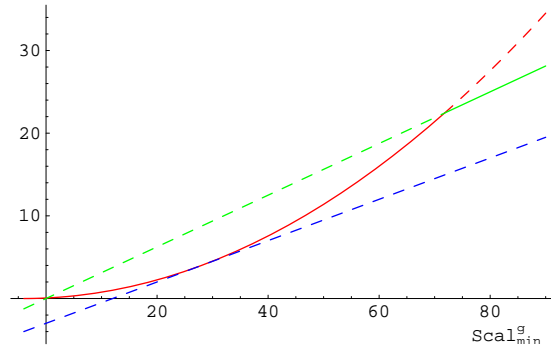


Abbildung 2. Untere Schranke für $\lambda((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})})$ gemäß Satz 4.

Satz 4. *Es sei $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ eine kompakte Sasaki-Mannigfaltigkeit mit $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ und $T = \eta \wedge d\eta$ die charakteristische Torsion. Dann sind für die kleinsten Eigenwerte der Operatoren $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}$ und $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}$ zwei Fälle möglich:*

- (1) $\lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}) \geq \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}) \geq 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2$,
- (2) $1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2 > \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}) = \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}) \geq 5/16 \text{Scal}_{\min}^g$.

Ferner tritt im Bereich $-4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$ immer der erste Fall ein.

Bemerkung 4. Abbildung 2 veranschaulicht die Abschätzungen aus Satz 4. Die blaue gestrichelte Gerade entspricht der einfachen unteren Schranke, die wir mit Hilfe der Weitzenböckformel für $D^{1/3}$ erhalten hatten. Die rote Parabel entspricht Fall (1), die grüne Gerade Fall (2).

Abschließend wollen wir noch den Grenzfall auswerten für $-4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$. Wir hatten in Bemerkung 3 festgestellt, dass der zu einem optimalen Eigenwert $\lambda = 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2$ gehörige Eigenspinor ∇^P -parallel ist und daher $\mathcal{R}^{\nabla^P} = 0$ ist. Das Verschwinden der Krümmung erlaubt es uns, den Riemannschen Ricci-Tensor Ric^g zu berechnen, indem wir Lemma 4, Kapitel 1 algebraisch auswerten. Wir erinnern noch daran, wie sich Ric^g und Ric^{∇^T} zueinander verhalten ([FI02]):

$$\text{Ric}^g - \text{diag}(2, 2, 2, 2, 4) = \text{Ric}^g - \frac{1}{4} T_{imn} T_{jmn} = \text{Ric}^{\nabla^T}.$$

Damit folgt

Satz 5. *Sei $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ eine kompakte Spin-Mannigfaltigkeit mit $-4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$, die eine Sasaki-Struktur trägt, und $T = \eta \wedge d\eta$ die charakteristische Torsion. Wenn ein Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ mit*

$$(D^{1/3})^2 \psi = \frac{1}{16} (1 + \frac{1}{4} \text{Scal}^g)^2 \psi$$

existiert, so ist (M^5, g) ein η -Einstein-Raum, d.h. der Riemannsche Ricci-Tensor hat die Gestalt

$$\text{Ric}^g = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

($A = 6 + 8a_1 \pm 32a_2$).

Ist umgekehrt (M^5, g) ein einfach-zusammenhängender η -Einstein-Raum und sind a_1, a_2 reelle

Zahlen mit $A = 6 + 8a_1 \pm 32a_2$, so betrachte die zugehörige metrische kovariante Ableitung ∇^P . Weil $\mathcal{R}^{\nabla^P} = 0$ auf $\Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ ist, existiert ein ∇^P -paralleler Spinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ und dieser ist Eigenspinor des Operators $(D^{1/3})^2$ zum Eigenwert $1/16(1 + 1/4 \text{Scal}^g)^2$.

Beispiel 1. Alle regulären kompakten Sasaki-Räume erhält man als S^1 -Hauptfaserbündel über 4-dimensionalen Kähler-Mannigfaltigkeiten. Wenn der Sasaki-Raum zusätzlich noch eine Eta-Einstein-Mannigfaltigkeit ist, so wird die Basis ein Einstein-Raum. Umgekehrt konstruiert man aus 4-dimensionalen Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeit gewisse S^1 -Hauptfaserbündel, so dass der Totalraum M^5 eine Sasaki-Struktur besitzt und ein Eta-Einstein-Raum wird (vgl. [B176] für Existenz und speziell [FK99] für den Vergleich der Ricci-Tensoren in Basis- und Totalraum).

Beispiel 2. Beispiele nicht-regulärer Sasaki-Räume wurden kürzlich in [BGM06] konstruiert.

Anhang

Die erste Bianchi-Identität für ∇^T

Wir liefern an dieser Stelle den Beweis für die erste Bianchi-Identität eines metrischen Zusammenhanges ∇ mit total-schiefsymmetrischer Torsion nach. Wir werden den Beweis in mehreren Schritten führen. Insbesondere beweisen wir eine Identität, die für ∇ -paralleles T die Formel (11) aus Kapitel 1 als Spezialfall enthält.

Satz 6. *Für einen metrischen Zusammenhang ∇ mit total-schiefsymmetrischer Torsion T gilt*

$$\mathfrak{S}_{\{X,Y,Z\}}\mathcal{R}(X,Y,Z,V) = dT(X,Y,Z,V) - \sigma_T(X,Y,Z,V) - (\nabla_V T)(X,Y,Z).$$

Beweis.

Lemma 1. *Für alle Vektorfelder $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathfrak{X}(M)$ gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_T(X_1, X_2, X_3, X_4) &= g(T(X_1, X_2), T(X_3, X_4)) + g(T(X_2, X_3), T(X_1, X_4)) \\ &\quad + g(T(X_3, X_1), T(X_2, X_4)). \end{aligned}$$

Beweis. Per definitionem ist

$$\begin{aligned} \sigma_T(X_1, X_2, X_3, X_4) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (e_i \lrcorner T) \wedge (e_i \lrcorner T)(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (e_i \lrcorner T)(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}) (e_i \lrcorner T)(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn} \sigma \cdot g(T(e_i, X_{\sigma(1)}), X_{\sigma(2)}) g(T(e_i, X_{\sigma(3)}), X_{\sigma(4)}) \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_4} \operatorname{sgn} \sigma \cdot g(T(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), e_i) g(T(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}), e_i), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt von der Schiefsymmetrie von T Gebrauch gemacht haben. Wir beachten jetzt, dass

$$\sum_{i=1}^n g(T(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), e_i) g(T(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}), e_i) = g(T(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), T(X_{\sigma(3)}, X_{\sigma(4)}))$$

ist, woraus nach einem einfachen kombinatorischen Argument die Behauptung folgt. □

Lemma 2. *Für alle Vektorfelder $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:*

$$dT(X, Y, Z, V) = \mathfrak{S}_{\{X,Y,Z\}}(\nabla_X T)(Y, Z, V) - (\nabla_V T)(X, Y, Z) + 2\sigma_T(X, Y, Z, V).$$

Beweis. Wir wollen diese Identität punktweise überprüfen. Dazu seien $X, Y, Z, V \in T_x M$ vier Tangentialvektoren in $x \in M$. Wir setzen diese zu lokalen, ∇ -parallelen Vektorfeldern fort, indem wir entlang von Geodäten (bzgl. des Zusammenhanges ∇) parallel verschieben. Ohne für diese eine neue Bezeichnung einzuführen, drückt sich die Torsionsform T durch

$$[X, Y] = -T(X, Y)$$

aus. Die rechte Seite der Gleichung ist eine 4-Form. Wir schreiben dafür Ω . Nach Definition für die kovariante Ableitung von Tensorfeldern gilt dann:

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y, Z, V) &= \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_X T)(Y, Z, V) - (\nabla_V T)(X, Y, Z) + 2\sigma_T(X, Y, Z, V) \\
&= X(T(Y, Z, V)) - Y(T(X, Z, V)) + Z(T(X, Y, V)) - V(T(X, Y, Z)) \\
&\quad - T(\nabla_X Y, Z, V) - T(Y, \nabla_X Z, V) - T(Y, Z, \nabla_X V) \\
&\quad + T(\nabla_Y X, Z, V) + T(X, \nabla_Y Z, V) + T(X, Z, \nabla_Y V) \\
&\quad - T(\nabla_Z X, Y, V) - T(X, \nabla_Z Y, V) - T(X, Y, \nabla_Z V) \\
&\quad + T(\nabla_V X, Y, Z) + T(X, \nabla_V Y, Z) + T(X, Y, \nabla_V Z) \\
&\quad + 2\sigma_T(X, Y, Z, V) \\
&= X(T(Y, Z, V)) - Y(T(X, Z, V)) + Z(T(X, Y, V)) - V(T(X, Y, Z)) \\
&\quad + 2\sigma_T(X, Y, Z, V).
\end{aligned}$$

Für σ_T bekommen wir nach Lemma 1 und unserer Bemerkung

$$\begin{aligned}
\sigma_T(X, Y, Z, V) &= g(T(X, Y), T(Z, V)) + g(T(Y, Z), T(X, V)) + g(T(Z, X), T(Y, V)) \\
&= g([X, Y], [Z, V]) + g([Y, Z], [X, V]) + g([Z, X], [Y, V]).
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
\Omega(X, Y, Z, V) &= X(T(Y, Z, V)) - Y(T(X, Z, V)) + Z(T(X, Y, V)) - V(T(X, Y, Z)) \\
&\quad + 2g([X, Y], [Z, V]) + 2g([Y, Z], [X, V]) + 2g([Z, X], [Y, V]).
\end{aligned}$$

Nun zur linken Seite. Nach Definition des äußeren Differentials haben wir

$$\begin{aligned}
dT(X, Y, Z, V) &= X(T(Y, Z, V)) - Y(T(X, Z, V)) + Z(T(X, Y, V)) - V(T(X, Y, Z)) \\
&\quad - T([X, Y], Z, V) + T([X, Z], Y, V) - T([X, V], Y, Z) \\
&\quad - T([Y, Z], X, V) + T([Y, V], X, Z) - T([Z, V], X, Y) \\
&= X(T(Y, Z, V)) - Y(T(X, Z, V)) + Z(T(X, Y, V)) - V(T(X, Y, Z)) \\
&\quad - T(Z, V, [X, Y]) + T(Y, V, [X, Z]) - T(Y, Z, [X, V]) \\
&\quad - T(X, V, [Y, Z]) + T(X, Z, [Y, V]) - T(X, Y, [Z, V]) \\
&= X(T(Y, Z, V)) - Y(T(X, Z, V)) + Z(T(X, Y, V)) - V(T(X, Y, Z)) \\
&\quad + 2g([X, Y], [Z, V]) + 2g([Y, Z], [X, V]) + 2g([Z, X], [Y, V]).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3. Für alle Vektorfelder $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^g(X, Y, Z, V) &= \mathcal{R}^\nabla(X, Y, Z, V) - \frac{1}{2}(\nabla_X T)(Y, Z, V) + \frac{1}{2}(\nabla_Y T)(X, Z, V) \\
&\quad - \frac{1}{4}g(T(X, Y), T(Z, V)) - \frac{1}{4}\sigma_T(X, Y, Z, V).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen wieder punktweise und wie in Lemma 2 mit lokalen, ∇ -parallelen Fortsetzungen. Dann können wir schreiben

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_X^g Y, Z) - \frac{1}{2}T(X, Y, Z) = -\frac{1}{2}T(X, Y, Z)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^g(X, Y, Z, V) &= g(\mathcal{R}^g(X, Y)Z, V) \\
&= g(\nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \nabla_{[X, Y]}^g Z, V) \\
&=: A + B + C.
\end{aligned}$$

Wir berechnen A, B, C einzeln. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} A &= g(\nabla_X^g \nabla_Y^g Z, V) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y^g Z, V) - \frac{1}{2} T(X, \nabla_Y^g Z, V). \end{aligned}$$

Wir nutzen jetzt aus, dass ∇ metrisch ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} A &= X(g(\nabla_Y^g Z, V)) - g(\nabla_Y^g Z, \nabla_X V) + \frac{1}{2} g(T(X, V), \nabla_Y^g Z) \\ &= X(g(\nabla_Y Z, V)) - \frac{1}{2} X(T(Y, Z, V)) + \frac{1}{2} g(\nabla_Y Z, T(X, V)) - \frac{1}{4} T(Y, Z, T(X, V)) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y Z, V) - \frac{1}{2} X(g(T(Y, Z), V)) - \frac{1}{4} T(Y, Z, T(X, V)). \end{aligned}$$

Für B brauchen wir nur die Rollen von X und Y zu vertauschen:

$$B = -g(\nabla_Y \nabla_X Z, V) + \frac{1}{2} Y(T(X, Z, V)) - \frac{1}{4} g(T(Z, X), T(Y, V)).$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} C &= -g(\nabla_{[X, Y]}^g Z, V) \\ &= -g(\nabla_{[X, Y]} Z, V) + \frac{1}{2} T([X, Y], Z, V) \\ &= -g(\nabla_{[X, Y]} Z, V) + \frac{1}{2} g(T(Z, V), [X, Y]). \end{aligned}$$

Wir summieren nun A, B und C wieder auf und erhalten

$$\begin{aligned} A + B + C &= g(\mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z, V) - \frac{1}{2} X(T(Y, Z, V)) + \frac{1}{2} Y(T(X, Z, V)) \\ &\quad - \frac{1}{4} g(T(Y, Z), T(X, V)) - \frac{1}{4} g(T(Z, X), T(Y, V)) \\ &\quad + \frac{1}{2} g(T(Z, V), [X, Y]) \\ &= \mathcal{R}^\nabla(X, Y, Z, V) - \frac{1}{2} (\nabla_X T)(Y, Z, V) + \frac{1}{2} (\nabla_Y T)(X, Z, V) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sigma^T(X, Y, Z, V) + \frac{1}{4} g(T(X, Y), T(Z, V)) + \frac{1}{2} g(T(Z, V), [X, Y]). \end{aligned}$$

Nun ist

$$[X, Y] = -T(X, Y),$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Nach diesen Vorbereitungen können wir Satz 1 beweisen. Wir führen zunächst die folgende Abkürzung ein

$$K := \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} \mathcal{R}^\nabla(X, Y, Z, V)$$

und berechnen mit Hilfe von Lemma 3

$$\begin{aligned} K &= \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} \mathcal{R}^g(X, Y, Z, V) + \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} (\nabla_X T)(Y, Z, V) - \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} (\nabla_Y T)(X, Z, V) \\ &\quad + \frac{1}{4} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} g(T(X, Y), T(Z, V)) + \frac{1}{4} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} \sigma_T(X, Y, Z, V). \end{aligned}$$

Die erste Bianchi-Identität für den Levi-Civita-Zusammenhang besagt, dass

$$\mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} \mathcal{R}^g(X, Y, Z, V) = 0$$

ist. Also folgt mit Lemma 2

$$\begin{aligned}
K &= dT(X, Y, Z, V) - \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_X T)(Y, Z, V) + (\nabla_V T)(X, Y, Z) - 2\sigma_T(X, Y, Z, V) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_Y T)(X, Z, V) + \underbrace{\frac{1}{4} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} g(T(X, Y), T(Z, V))}_{\frac{1}{4} \sigma_T(X, Y, Z, V)} + \underbrace{\frac{1}{4} \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}} \sigma_T(X, Y, Z, V)}_{3\sigma_T(X, Y, Z, V)} \\
&= dT(X, Y, Z, V) + (\nabla_V T)(X, Y, Z) - \sigma_T(X, Y, Z, V) \\
&\quad - \frac{1}{2} (\mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_X T)(Y, Z, V) + \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_Y T)(X, Z, V)).
\end{aligned}$$

Wenn wir zeigen, dass

$$\mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_X T)(Y, Z, V) + \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_Y T)(X, Z, V) = 0$$

ist, dann ist der Satz bewiesen. Wir schreiben also

$$\mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_X T)(Y, Z, V) + \mathfrak{S}_{\{X, Y, Z\}}(\nabla_Y T)(X, Z, V) =: S_1 + S_2$$

und berechnen zunächst

$$S_1 = (\nabla_Y T)(X, Z, V) + (\nabla_Z T)(Y, X, V) + (\nabla_X T)(Z, Y, V).$$

Nach den Regeln für das kovariante Ableiten von Tensorfeldern erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y T)(X, Z, V) &= Y(T(X, Z, V)) - T(\nabla_Y X, Z, V) - T(X, \nabla_Y Z, V) - T(X, Z, \nabla_Y V) \\
&= g(\nabla_Y T(X, Z), V) + g(T(X, Z), \nabla_Y V) \\
&= g(\nabla_Y T(X, Z), V)
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z T)(Y, X, V) &= g(\nabla_Z T(Y, X), V), \\
(\nabla_X T)(Z, Y, V) &= g(\nabla_X T(Z, Y), V).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S_1 = g(\nabla_Y T(X, Z), V) + g(\nabla_Z T(Y, X), V) + g(\nabla_X T(Z, Y), V).$$

Für

$$S_2 = (\nabla_X T)(Y, Z, V) + (\nabla_Y T)(Z, X, V) + (\nabla_Z T)(X, Y, V)$$

bekommt man mutatis mutandis

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T)(Y, Z, V) &= g(\nabla_X T(Y, Z), V), \\
(\nabla_Y T)(Z, X, V) &= g(\nabla_Y T(Z, X), V)
\end{aligned}$$

und

$$(\nabla_Z T)(X, Y, V) = g(\nabla_Z T(X, Y), V),$$

also

$$S_2 = g(\nabla_X T(Y, Z), V) + g(\nabla_Y T(Z, X), V) + g(\nabla_Z T(X, Y), V).$$

Weil T schiefssymmetrisch ist, folgt $S_1 = -S_2$. □

Literaturverzeichnis

- [A06] I. Agricola, *The Srni lectures on non-integrable geometries with torsion*, math.DG/0606705.
- [AF04a] I. Agricola and Th. Friedrich, *On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion*, Math. Ann. 328 (2004), 711-748.
- [AF04b] I. Agricola and Th. Friedrich, *The Casimir operator of a metric connection with totally skew-symmetric torsion*, Journ. Geom. Phys. 50 (2004), 188-204.
- [BFGK91] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, *Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds*, Teubner-Verlag Leipzig/Stuttgart, 1991.
- [B176] D.E. Blair, *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Lect. Notes Math. 509, Springer-Verlag, 1976.
- [BGM06] Boyer, Galicki, Matzen, *On Eta-Einstein-Geometry*, math.DG/0406627.
- [Fr80] Th. Friedrich, *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*, Math. Nachr. 97 (1980), 117-146.
- [Fr00] Th. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol 25, American Mathematical Society, Prov., 2000.
- [Fr03] Th. Friedrich, *On types of non-integrable geometries*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 72 (2003), 99-113.
- [FI02] Th. Friedrich and S. Ivanov, *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*, Asian Journ. Math. 6 (2002), 303-336.
- [FI03] Th. Friedrich and S. Ivanov, *Almost contact manifolds, connections with torsion, and parallel spinors*, Journ. für die reine und angewandte Mathematik 559 (2003), 217-236.
- [FK99] Th. Friedrich, E.C. Kim, *The Einstein-Dirac Equation on Riemannian spin Manifolds*, Journ. Geom. Phys. 33 (2000), 128-172.

Thesen

- Die Weitzenböckformel des Operators $D^{1/3}$ einer kompakten Sasaki-Mannigfaltigkeit $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ mit Spin-Struktur und assoziiertem Spinor-Bündel $\Sigma M = \ker(T+4) \oplus \ker T \oplus \ker(T-4)$ liefert positive untere Schranken für den ersten Eigenwert von $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}$, falls $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ ist, und von $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}$, falls $12 < \text{Scal}_{\min}^g$ ist:

$$\lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}) \geq 1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g, \quad \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}) \geq -3 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g.$$

- Durch Stören des Operators $D^{1/3}$ mit Polynomen $P(T^c)$ in der charakteristischen Torsion T^c und Berechnung der Weitzenböckformel des gestörten Operators $D^{1/3} + P(T^c)$ folgt zunächst, dass für $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ jeder Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}$ stets größer oder gleich dem kleinsten Eigenwert des Operators $(D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}$ ist,

$$\lambda((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_0)}) \geq \lambda_{\min}((D^{1/3})^2_{|\Gamma(\Sigma_{\pm 4})}).$$

- Indem man die Weitzenböckformel des gestörten Operators $D^{1/3} + P(T^c)$ nutzt und über hinreichend viele Polynome $P(T^c)$ optimiert, entsteht im Bereich $-4 < \text{Scal}_{\min}^g$ eine bessere untere Schranke für $\lambda_{\min}((D^{1/3})^2)$ als durch die Weitzenböckformel des ungestörten Operators:

$$\lambda_{\min}((D^{1/3})^2) \geq \begin{cases} 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2; & -4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5}) \\ 5/16 \text{Scal}_{\min}^g; & 4(9 + 4\sqrt{5}) \leq \text{Scal}_{\min}^g \end{cases}.$$

Diese ist optimal, falls $-4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$ gilt.

- Wenn die Skalarkrümmung von $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ $-4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$ erfüllt und $\lambda_{\min}((D^{1/3})^2) = 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2$ den Grenzfall realisiert, dann ist ein zugehöriger Eigen-spinor ψ parallel bezüglich einer gewissen metrischen kovarianten Ableitung $\nabla^P : \Gamma(\Sigma M) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M)$ und (M, g) hat konstante Skalarkrümmung. In dem Fall ist $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ ein η -Einstein-Raum.

- Falls $(M^5, g, \xi, \eta, \phi)$ ein einfach-zusammenhängender η -Einstein-Raum mit $-4 < \text{Scal}_{\min}^g \leq 4(9 + 4\sqrt{5})$ ist, dann gibt es einen Eigenspinor $\psi \in \Gamma(\Sigma_{\pm 4})$ des Operators $(D^{1/3})^2$ zum Eigenwert $\lambda = 1/16 (1 + 1/4 \text{Scal}_{\min}^g)^2$, d.h. λ realisiert den Grenzfall.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 26. Oktober 2006