Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Mario Kassuba
Mathematisches Institut
Universität Bonn

Wintersemester 09/10
Abgabe: 18.12. (vor der Vorlesung)

9. Serie Globale Analysis II

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Seien $a(x,\theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, $a_i(x,\theta) \in S^{m_i}(X \times \mathbb{R}^N)$, $b_{ij}(x,\theta) \in S^{n_{ij}}$ mit $m_i \to -\infty$, $n_{ij} \to -\infty$ für alle i. Sei $a \sim \sum_i a_i$ und $a_i \sim \sum_j b_{ij}$. Gib $a \sim \sum_{ij} b_{ij}$ ein Bedeutung und zeige, dass dies eine asymptotische Entwicklung von a ist.

Aufgabe 2. (2+2+2 Punkte) [Methode der stationären Phase]

a) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi \in C^\infty(X)$ reellwertig mit $d\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Zeige, dass für $u \in C_0^\infty(X)$ die Funktion

$$\lambda \mapsto I(\lambda) := \int_X e^{i\lambda\varphi(x)} u(x)dx$$

schnell fallend ist für $\lambda \to \infty$. Genauer: Für $K \subset X$ kompakt und $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C = C_{K,\varphi,N}$, so dass

$$|I(\lambda)| \leq C(\sum_{|\alpha|\leq N} \sup|\partial^\alpha u(x)|)\lambda^{-N}, \quad \lambda \geq 1,\ u \in C_0^\infty(X),\ \operatorname{supp} u \subset K.$$

b) Sei Q eine invertierbare symmetrische $n \times n$-Matrix. Dann ist die Fouriertransformierte – im Sinne einer temperierten Distribution – von

$$f(x) = e^{i/2\,\langle Qx,x\rangle}$$

gegeben durch

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{n/2}(|\det Q|)^{-1/2} e^{i\pi/4 \operatorname{sgn} Q} e^{-i/2\,\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle}.$$

c) Zeige:

$$\int_X e^{i\lambda\langle x,Qx\rangle/2} u(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi^{n/2} e^{i\pi/4 \operatorname{sgn} Q}}{k!|\det Q|^{1/2}\lambda^{k+n/2}} (\frac{1}{2i}\langle\partial_x, Q^{-1}\partial_x\rangle)^k u(0) + S_N(u,\lambda),$$

wobei

$$|S_N(u,\lambda)| \leq C(N!)^{-1}\lambda^{-N-n/2} \sum_{|\alpha|\leq n+1} ||D^\alpha(\frac{1}{2}\langle D_x, Q^{-1}D_x\rangle)^N u||_{L^1}.$$

Hinweis: Parsevalsche Gleichung und Taylor-Entwicklung.

Diskutiere den speziellen Fall

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$