

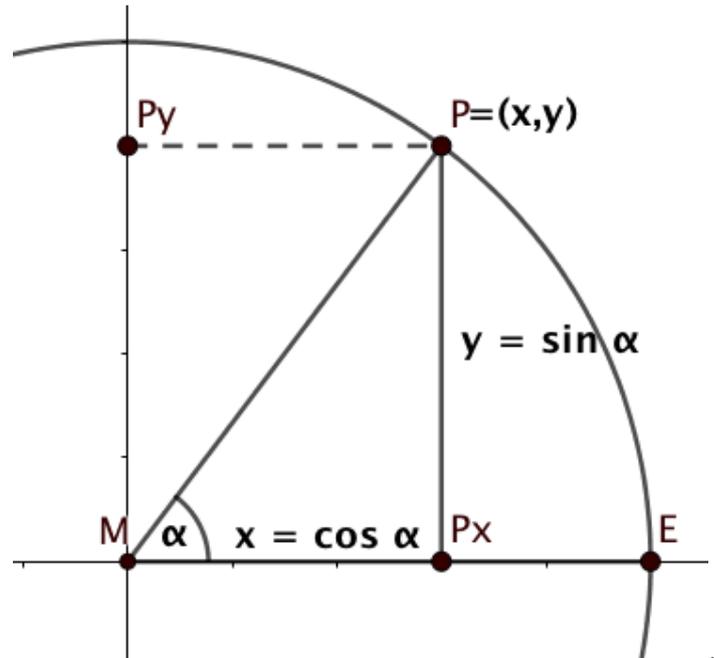
**Was weiß man über Sinus und Kosinus,  
wenn man ihre Definition am Einheitskreis kennt?** (Version 2.5.25)

**Geometrische Definition am Einheitskreis**  $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ :  
Wählt man einen Punkt  $P = (x, y)$  auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt  $M = (0, 0)$  und Einheitspunkt  $E = (1, 0)$  und gibt man dem Winkel  $\angle EMP$  den Namen  $\alpha$ , so kann man definieren:

$$\sin(\alpha) = y, \quad \cos(\alpha) = x.$$

Diese Definition ist ausreichend für den *zeichnerischen Umgang* mit Winkeln und deren Sinus- bzw. Kosinuswerten.

Sie erlaubt leider *nur in Ausnahmefällen*, zu einem Punkt  $P = (x, y)$  die *Größe des Winkels  $\alpha$  in Grad* anzugeben oder umgekehrt zu einer in Grad angegebenen Winkelgröße den zugehörigen Punkt auf dem Einheitskreis *genau* zu kennen.



Beispiele *ohne* Winkelgröße in Grad sind die “Pythagoräischen” Punkte auf dem Einheitskreis. Diese Punkte mit *rationalen* Koordinaten kann man als die einfachsten Kreispunkte ansehen, aber für die Bestimmung der Größe von  $\alpha$  in Grad braucht man Analysis:

Auf der Tangente im Punkt  $T = (0, 1)$  des Einheitskreises wähle einen *rationalen* Punkt  $P = (r, 1)$ . Projiziere  $P$  von  $Z = (0, -1)$  auf den Kreis. Das Bild sei  $Q = (x, y)$ . Dann gilt (Rechnung nebenstehend)

$$x = 4r / (4 + r^2),$$

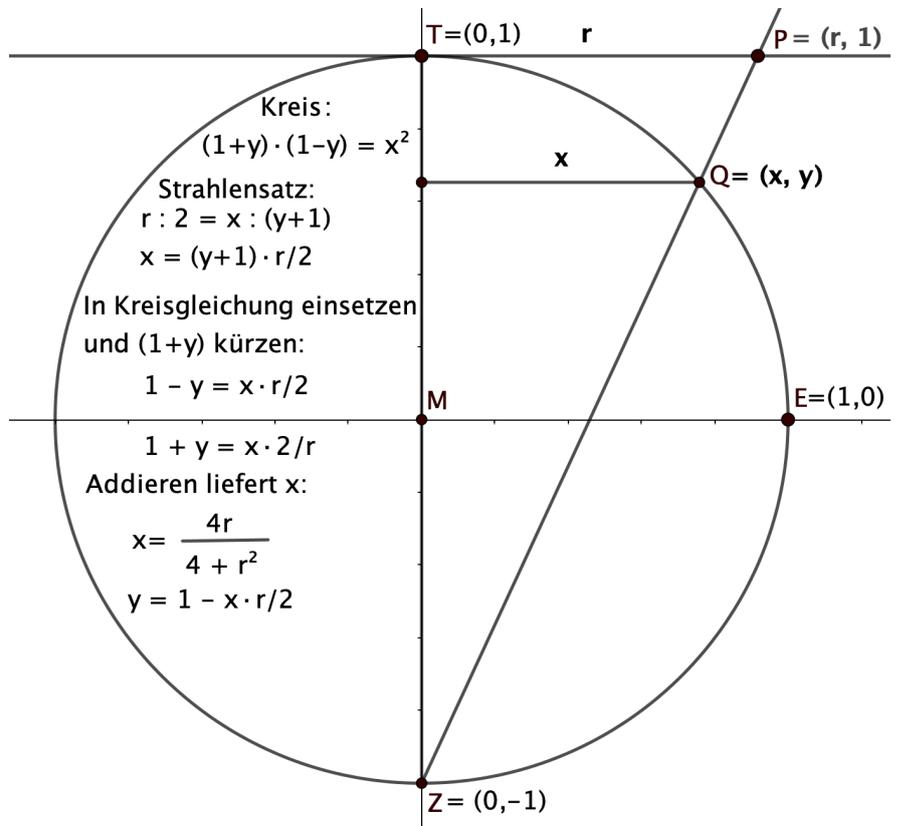
$$y = (4 - r^2) / (4 + r^2).$$

$Q$  hat also ebenfalls *rationale* Koordinaten!

Außer den rechten Winkeln zwischen den Durchmesser von  $(x, y)$  nach  $(-x, -y)$  und  $(y, -x)$  nach  $(-y, x)$  kann man für **keinen** Winkel zwischen diesen Punkten die Größe in Grad angeben!

Schreibt man  $Q = (a/c, b/c)$  mit  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{Pythagoras}).$$

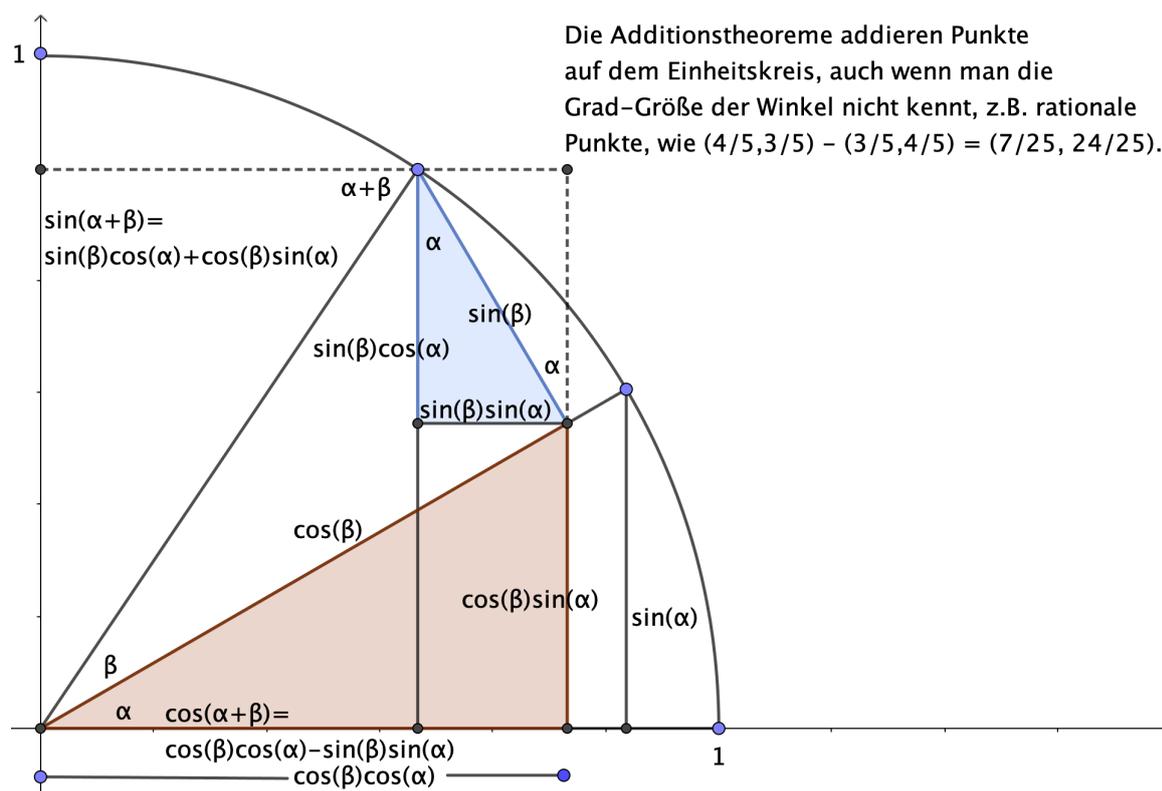


Die angegebene Definition am Einheitskreis ermöglicht wie gesagt das übliche Addieren und Subtrahieren von Winkeln und das Ablesen ihrer Sinus- und Kosinuswerte in *Zeichnungen*. Darüber hinaus kann man die Definition auch benutzen, um das Verhalten dieser trigonometrischen Funktionen bei Addition und Subtraktion von Winkeln mit Formeln zu beschreiben, den sogenannten

**Additionstheoremen:** (Beweis unter dem Bild)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\beta) \cos(\alpha) + \cos(\beta) \sin(\alpha), \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha), \quad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$



**Beweis**

Wichtigster Punkt des Beweises sind die **ähnlichen** Verkleinerungen des rechtwinkligen Dreiecks mit Winkel  $\alpha$ , sodass die Hypotenuse die Länge  $\sin(\beta)$  (blau) bzw.  $\cos(\beta)$  (rot) bekommt. Die beiden eingezeichneten Winkel  $\alpha$  sind wirklich gleich, weil die Schenkel beider Winkel auf einander senkrecht stehen. Die Zeichnung zeigt, dass dann die Summe der vertikalen Katheten  $\sin(\beta) \cos(\alpha) + \cos(\beta) \sin(\alpha) = \sin(\alpha + \beta)$  ist und die Differenz ihrer horizontalen Katheten  $\cos(\beta) \cos(\alpha) - \sin(\beta) \sin(\alpha) = \cos(\alpha + \beta)$  ist.

Außerdem kann man mit den Additionstheoremen (und Quadratwurzeln) **Winkel halbieren**:

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}, \quad \cos(\alpha/2) = \frac{\sin(\alpha)}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

Bleibt die Frage: Zu welchen in Grad gegebenen Winkeln  $\alpha$  kennt man  $\sin(\alpha), \cos(\alpha)$ ?

Oder umgekehrt: Zu welchen Punkten  $P = (x,y)$  auf dem Einheitskreis kennt man die Größe des Winkels  $\angle EMP$  in Grad?

Der Winkel zwischen x-Achse und y-Achse ist nach Definition  $360^\circ/4 = 90^\circ$ .

Die Winkelhalbierenden haben Winkel  $\pm 45^\circ$  mit der x-Achse und ihre Sinus- und Kosinuswerte sind  $\pm \sqrt{1/2}$ .

Da die Winkelsumme im Dreieck  $180^\circ$  ist, sind die Winkel des gleichseitigen Dreiecks  $60^\circ$  mit  $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 = \cos(30^\circ)$ ,  $\cos(60^\circ) = 1/2 = \sin(30^\circ)$ .

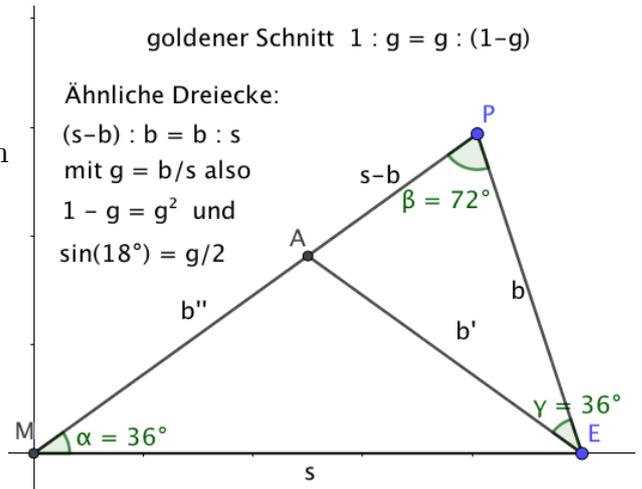
Das gleichschenklige Dreieck mit Scheitelwinkel  $36^\circ$  (also ein Sektor des regelmäßigen Zehnecks) kann durch eine Winkelhalbierende eines Basiswinkels ( $72^\circ$ ) in zwei *gleichschenklige* Dreiecke zerlegt werden. Eines von den Teildreiecken ist ähnlich zu dem Ausgangsdreieck. Bezeichnet man die Basislänge mit  $b$ , die Schenkellänge mit  $s$ , so zeigen die beiden ähnlichen Dreiecke:

$(s - b) : b = b : s$  oder  $s - b = b^2/s$ .

Mit der Abkürzung  $g = b/s$  folgt

$1 - g = g^2$ ,  $g = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Das ist das berühmte Verhältnis des *goldenen Schnittes*.

Außerdem folgt  $\sin(18^\circ) = g/2 = (\sqrt{5} - 1)/4$ .



Mit Hilfe der Additionstheoreme finden wir zuerst Sinus und Kosinus von  $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ , dann von  $3^\circ = 18^\circ - 15^\circ$  und schließlich von allen Vielfachen von  $3^\circ$ . Kleinere ganzzahlige Winkel sind mit dem genannten Wissen nicht erreichbar. Aber da wir Winkel halbieren können, wissen wir jetzt, dass alle Winkel von der Form

$$\alpha = (k/2^n) \cdot 3^\circ.$$

mit (iterierten) Quadratwurzeln berechenbare Sinus- und Kosinuswerte haben.

### Von hier an mit Analysis

*Kann man Sinus und Kosinus für alle in Grad gegebenen Winkel berechnen?*

Die Antwort wird "ja" sein, wenn wir auch Grenzwerte als "Berechnung" akzeptieren.

Bevor wir zu dieser endgültigen Antwort kommen, erwähne ich zwei Rechnungen, die im normalen Unterricht nicht vorkommen, aber vielleicht auf einzelne Interessenten stoßen.

#### 1. Weitere mit Quadratwurzeln berechenbare Sinus- und Kosinuswerte

Die bisher genannten Sinus- und Kosinuswerte lassen sich mit Quadratwurzeln hinschreiben, kompliziertere Funktionen werden nicht benutzt. Die entsprechenden Kreispunkte lassen sich mit Zirkel und Lineal konstruieren. Überraschender Weise gibt es davon noch weitere. Gauß hat nämlich herausgefunden, dass sich regelmäßige  $p$ -Ecke mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen, wenn  $p$  eine Primzahl der Form  $p = 2^{2^n} + 1$  ist. Die ersten vier Zahlen sind  $p = 3$ ,  $p = 5$ ,  $p = 17$  und  $p = 257$ . Die Sinus- und Kosinuswerte zu diesen Winkeln,  $360^\circ/p$ , sind also mit der Wurzelfunktion berechenbar.

## 2. Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten als Nullstellen von Polynomen

Spezielle Additionstheoreme lassen sich für Rechnungen in Reichweite der Schule nutzen:

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha) \\ &= +3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) \\ \cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\ &= -3\cos(\alpha) + 4\cos^3(\alpha).\end{aligned}$$

**Mit diesen Formeln kann man nämlich Winkel dritteln:**

Mit Hilfe des Polynoms  $P_3(y) := 3y - 4y^3$  formulieren wir um:

$$\sin(\alpha) = P_3(\sin(\alpha/3)), \quad \cos(\alpha) = -P_3(\cos(\alpha/3)).$$

Daher gilt:  $\sin(\alpha/3)$  ist **Nullstelle** der kubischen Gleichung:

$$4y^3 - 3y + \sin(\alpha) = 0,$$

und ebenso:  $\cos(\alpha/3)$  ist **Nullstelle** der kubischen Gleichung:

$$4y^3 - 3y - \cos(\alpha) = 0.$$

Wegen  $\sin(30^\circ) = 0.5$  kann man daher  $\sin(10^\circ)$  als Lösung von

$$P(y) := 4y^3 - 3y + 0.5 = 0$$

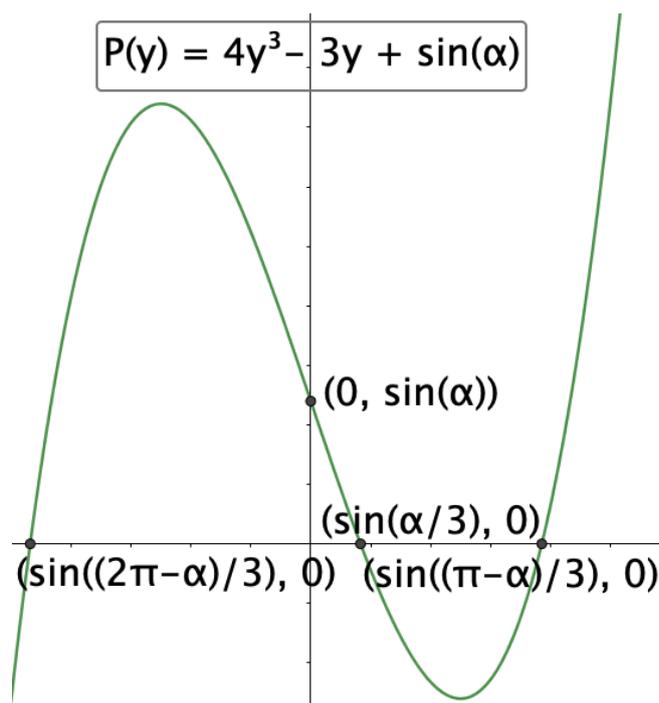
mit dem Newton Verfahren berechnen:

Die Tangente bei  $(0, \sin(30^\circ))$ , also

$$t_0(y) = -3y + 0.5,$$

hat die Nullstelle bei  $y_1 = 1/6$ . Eine gute Näherung gibt schon der nächste Schritt, die Nullstelle  $y_2$  der Tangente bei  $(y_1, P(y_1))$ , also

$$\begin{aligned}t_1(y) &= P\left(\frac{1}{6}\right) + P'\left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{54} - \frac{8}{3} \cdot \left(y - \frac{1}{6}\right) \Rightarrow \\ y_2 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{144} \approx \sin(10^\circ), \\ \sin(10^\circ) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{143,23\dots}\end{aligned}$$



Diese Sorte Rechnung ist nicht auf das Dritteln von Winkeln beschränkt. Für alle *ungeraden*  $n$  gibt es solche Additionstheoreme, die  $\sin(n \cdot \alpha)$  aus ungeraden Potenzen von  $\sin(\alpha)$  berechnen. Das führt schließlich dazu, dass man für alle *rationalen* Vielfachen von  $360^\circ$  Sinus und Kosinus berechnen kann, notfalls aus Polynomgleichungen hohen Grades – aber z.B. nicht  $\sin(360^\circ/\sqrt{5})$  oder  $\sin(360^\circ/\pi)$ .

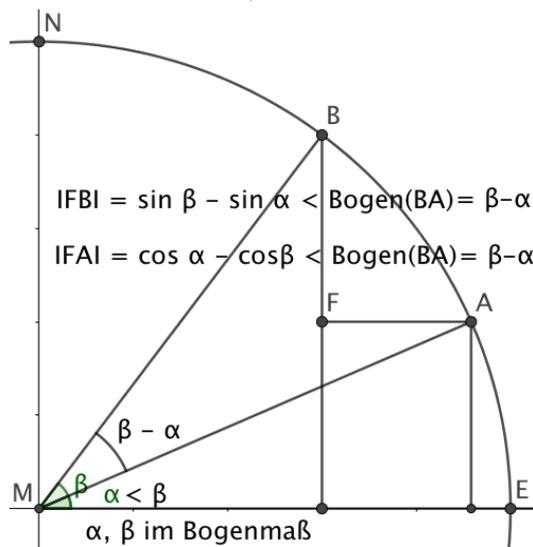
## Noch fehlende Berechnungen mit Hilfe von Grenzwerten

Schließlich sollen für alle reellen Vielfachen von  $360^\circ$  Sinus und Kosinus mit Hilfe von Grenzwerten berechnet werden. Dabei ist es recht unbequem, die Größe von Winkeln in Grad zu messen. Schon bei der Herstellung eines Winkelmessers bringt man die Winkelmarkierungen auf einem Kreisbogen an und einem  $1^\circ$  Grad Abstand zwischen zwei Kreispunkten  $A, B$  entspricht eine bestimmte Länge des Kreisbogens zwischen ihnen, nämlich  $\text{Länge}(1^\circ) = (2\pi/360) \cdot r$ . Wenn man  $r = 1$  wählt, heißt diese Länge Bogenmaß des Winkels. Also, wenn ein Winkel  $\alpha$  die Größe  $w^\circ$  hat, dann gilt  $\text{Bogenmaß}(\alpha) = (\pi/180) \cdot w$ . Oft wird das Bogenmaß als Vielfaches von  $\pi$  angegeben, z.B.  $60^\circ = \pi/3$ .

Um die Diskussion abzuschließen, benötigen wir sogenannte **Dehnungsschranken** für Sinus und Kosinus; damit sind folgende Ungleichungen gemeint ( $\alpha, \beta$  im Bogenmaß):

$$\begin{aligned} |\sin(\beta) - \sin(\alpha)| &\leq |\beta - \alpha| \\ |\cos(\beta) - \cos(\alpha)| &\leq |\beta - \alpha| \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen gelten, weil die Strecken  $FB$  und  $FA$  nach dem Satz des Pythagoras kürzer als die Sehne  $BA$  sind und diese nach Definition der Bogenlänge kürzer als der Bogen  $(B,A)$  ist. Diese Ungleichungen sagen mehr aus als "sin und cos sind stetige Funktionen", nämlich: "sin und cos sind in besonders übersichtlicher Weise stetig", sie sind **dehnungsbeschränkt**.



Nun sei ein Winkel  $\alpha$  im Bogenmaß gegeben, also  $\alpha \in [0, 2\pi]$ . Wir wählen aus den Zahlen der Form  $(k/2^n) \cdot (3/180) \cdot \pi$  - für die wir ja Sinus und Kosinus kennen - eine Intervallschachtelung  $[a_n, b_n]$  mit  $b_n - a_n \leq (b_{n-1} - a_{n-1})/2$  für das gewünschte Bogenmaß  $\alpha$ , also  $\alpha \in [a_n, b_n]$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad n_1, n_2 > m \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < b_m - a_m \leq (b_0 - a_0) \cdot 2^{-m}$$

Daraus folgt mit den Dehnungsschranken für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} \quad n_1, n_2 > m &\Rightarrow |\sin(a_{n_1}) - \sin(a_{n_2})| \leq (b_0 - a_0) \cdot 2^{-m} \\ \forall m \in \mathbb{N} \quad n_1, n_2 > m &\Rightarrow |\cos(a_{n_1}) - \cos(a_{n_2})| \leq (b_0 - a_0) \cdot 2^{-m} \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen bedeuten (wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$ ), dass die beiden Folgen  $\{\sin(a_n)\}$ ,  $\{\cos(a_n)\}$  konvergieren, so dass wir nun *definieren* können

$$\sin(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n), \quad \cos(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(a_n).$$

Wir haben damit aus der Definition am Einheitskreis Berechnungsvorschriften für Sinus und Kosinus erhalten, die man wohl als mühsam ansehen muß. Immerhin zeigen die hergeleiteten Dehnungsschranken, dass die beiden Funktionen in sehr expliziter Weise stetig sind. Tatsächlich sind sie sogar differenzierbar und das wird uns zu *einfacheren Berechnungsverfahren* führen.

## Die Ableitungen von Sinus und Kosinus

Mit den Additionstheoremen (also  $\sin(x + a) = \sin(x) \cos(a) + \cos(x) \sin(a)$  usw.) kann man Sinus und Kosinus überall differenzieren, wenn man die Ableitungen bei 0 kennt:

$$\begin{aligned}\sin'(0 + a) &= \sin'(0) \cos(a) + \cos'(0) \sin(a), & \sin' &= \cos \\ \cos'(0 + a) &= \cos'(0) \cos(a) - \sin'(0) \sin(a), & \cos' &= -\sin.\end{aligned}$$

*Bemerkung.* Die Additionstheoreme spielen also eine ähnlich zentrale Rolle wie bei der Exponentialfunktion das Potenzgesetz  $e^{a+b} = \exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b) = e^a \cdot e^b$ .

Falls  $\sin'(0)$  existiert, können wir  $\cos'(0)$  mit der Kettenregel aus

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \quad \text{folgern:} \quad \cos'(0) = \frac{-2 \sin(0) \sin'(0)}{2\sqrt{1 - \sin^2(0)}} = 0.$$

Wir brauchen also nur noch zu zeigen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h - 0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = (\text{Beh.}) \quad 1.$$

Üblicher Weise wird dazu benutzt (Beweis siehe unten)

$$\sin(h) \leq h \leq \tan(h), \quad \text{umgeformt:} \quad \cos(h) \leq \sin(h)/h \leq 1.$$

Die zitierte Dehnungsschranke sagt

$$|\cos(0) - \cos(h)| \leq |0 - h|, \quad \text{also} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) = 1$$

und daher auch  $\sin'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$  (Siehe auch Seite 11)

Aber warum gilt  $\sin(h) \leq h \leq \tan(h)$  ?

## Längenvergleiche

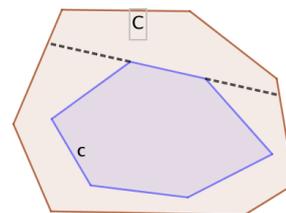
Die Ungleichung  $\sin(h) \leq h$  ist schon mit den Dehnungsschranken bewiesen.

(i) Falls der Flächeninhalt von Kreissektoren behandelt wurde, nämlich  $F = r^2 \cdot \alpha / 2$ , dann folgt  $h \leq \tan(h)$ , weil der  $\alpha$ -Kreissektor enthalten ist in dem Dreieck mit Kathete  $\tan(\alpha)$ .

(ii) Wenn man mit Längenabschätzungen arbeiten will oder muss, dann scheint mir zum Beweis von  $h \leq \tan(h)$  folgende Aussage am einfachsten:

Liegt eine konvexe Kurve  $c$  im Inneren einer konvexen Kurve  $C$ , so gilt:  
 $\text{Umfang}(c) \leq \text{Umfang}(C)$ .

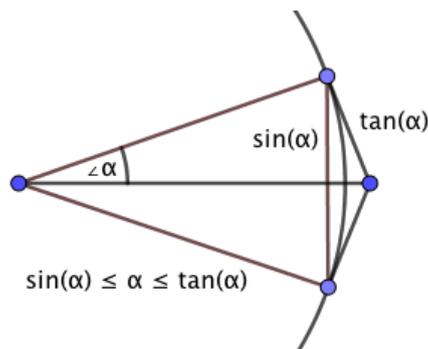
Der wesentliche Beweisschritt für konvexe Polygone  $c, C$  ist: Man verkleinert längenverkürzend das äußere Polygon  $C$ , indem man mit der Verlängerung einer Seite von  $c$  ein Stück von  $C$  abschneidet. Für beliebige konvexe Kurven benötigt man die Definition von deren Länge als Supremum der Umfänge einbeschriebener Sehnenpolygone. Ausführlicher in Text G3, Seite 6.



Anwendung:

Das gleichschenklige Dreieck mit der Basis  $2 \sin(\alpha)$  ist enthalten in dem Kreissektor mit Zentriwinkel  $2\alpha$  und dieser ist enthalten in dem Drachen, der zwei Seiten tangential an den Kreis hat. Alle drei Gebiete sind konvex und diese Zeichnung zeigt für ihre Umfänge:

$$2 + 2 \sin(\alpha) \leq 2 + 2\alpha \leq 2 + 2 \tan(\alpha).$$



Wir haben also gezeigt:

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin, \quad \text{also } f'' = -f \text{ für beide Funktionen}$$

## Theoretische Folgerungen aus der Kenntnis der Ableitungen

Dieser Abschnitt soll zeigen, dass die Analysis Werkzeuge zur Verfügung stellt, die völlig neuartige Argumente ermöglichen. Ableitungen sind zwar auch, aber nicht hauptsächlich, zur Bestimmung von Extremstellen und Wendetangenten da.

Zunächst ein technisch klingender **Hilfssatz** (der in der Physik **Energiesatz** heißt):

Für Funktionen  $f$  mit der Eigenschaft  $f'' = -c \cdot f$  ist die Funktion  $h := c \cdot f^2 + (f')^2$  konstant.

*Beweis:*

$$h' = 2c \cdot f \cdot f' + 2f' \cdot f'' = 2c \cdot f \cdot f' - 2f' \cdot c \cdot f = 0$$

Nach dem Monotoniesatz ist daher die Funktion  $h$  konstant.

Als unmittelbare Folgerung haben wir einen **Eindeutigkeitssatz**:

Hat man zwei Funktionen  $f, g$  mit  $f'' = -f$ ,  $g'' = -g$  und gilt an einer Stelle  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$ , so stimmen die Funktionen überein.

*Beweis:*

Die Funktion  $h = f - g$  hat ebenfalls die Eigenschaft  $h'' = -h$ . Nach dem Hilfssatz folgt  $h(x)^2 + h'(x)^2 = h(a)^2 + h'(a)^2 = 0$ , also  $h = 0$  oder  $f = g$ .

### Als Beispiel ein neuer Zugang zu den Additionstheoremen:

$f(x) = \sin(x + b)$ ,  $g(x) = \sin(x) \cos(b) + \cos(x) \sin(b)$  mit  
 $f'' = -f$ ,  $g'' = -g$ ,  $f(0) = \sin(b) = g(0)$ ,  $f'(0) = \cos(b) = g'(0)$ .  
Deshalb folgt  $f = g$ .

Ebenso

$$f(x) = \cos(x + b), \quad g(x) = \cos(b) \cos(x) - \sin(b) \sin(x) \Rightarrow f = g.$$

Mit etwas mehr Zwischenrechnung beweist der Eindeutigkeitssatz auch *nicht* lineare Formeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(3x), & g(x) &= 3 \sin(x) - 4 \sin^3(x), & f(0) &= g(0) = 0 \\ f'(x) &= 3 \cos(3x), & g'(x) &= 3 \cos(x) - 12 \sin^2(x) \cos(x), & f'(0) &= g'(0) = 3 \\ f''(x) &= -9f(x), & g''(x) &= -3 \sin(x) - 24 \sin(x) \cos^2(x) + 12 \sin^3(x), \\ & & g''(x) &= -27 \sin(x) + 36 \sin^3(x), \\ & & g''(x) &= -9g(x). \end{aligned}$$

Also:  $f = g$ .

## Approximative Berechnung von Sinus und Kosinus mit dem Monotoniesatz

Als wichtige Anwendung der Ableitungen lernen wir eine wesentlich effektivere approximative Berechnung der trigonometrischen Funktionen kennen, als wir unmittelbar aus der Definition am Einheitskreis herleiten konnten. Zunächst erinnere ich wieder daran, dass die Koeffizienten eines Polynoms sehr einfach aus den Ableitungen an der Entwicklungsstelle zu berechnen sind:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \cdot (x-b)^k, \quad a_0 = P(b), \quad a_1 = P'(b), \dots, a_j = P^{(j)}(b)/j!, \quad (j \leq n)$$

*Propagandabemerkung.* Diese Formel zeigt zum Beispiel:

Aus  $P(b) = 0$  folgt  $a_0 = 0$ , sodass das Polynom  $P(x)$  durch  $(x-b)$  teilbar ist.

Da die Ableitungen von Sinus bei  $x=0$  sehr leicht ausrechenbar sind (nämlich:  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin'(0) = 1$ ,  $\sin'' = -\sin$ ), kann man zunächst ausprobieren, wie die Graphen der Polynome  $T_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \sin^{(k)}(0) \cdot x^k/k!$ , deren von Null verschiedene Ableitungen bei 0 dieselben sind wie die der Sinusfunktion, also

$$T_1(x) := x, \quad T_3(x) := x - x^3/6, \quad T_5(x) := x - x^3/3! + x^5/5!, \quad T_7(x) = T_5(x) - x^7/7!$$

sich an den Graphen der Sinusfunktion anschmiegen. Da die Werte dieser Polynome abwechselnd oberhalb und unterhalb der Sinusfunktion liegen, kommen diese Approximationen automatisch mit einer Fehlerabschätzung. Wir führen das für  $0 \leq x$  einige Schritte weit mit dem Monotoniesatz vor. Aus dem Hilfssatz folgt  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , also als Anfang  $\cos(x) \leq 1$ . Damit ist jede der folgenden Zeilen eine Anwendung des Monotoniesatzes und jede Zeile liefert die Voraussetzung für die nächste:

$$\begin{aligned} \sin'(x) = +\cos(x) \leq 1 = T_1'(x) &\quad \Rightarrow \quad \sin(x) \leq +T_1(x) = x \\ -\cos'(x) = +\sin(x) \leq T_1(x) = -T_3''(x) &\quad \Rightarrow \quad -\cos(x) \leq -T_3'(x) = -1 + x^2/2 \\ -\sin'(x) = -\cos(x) \leq -T_3'(x) &\quad \Rightarrow \quad -\sin(x) \leq -T_3(x) = -x + x^3/6 \\ +\cos'(x) = -\sin(x) \leq -T_3(x) = T_5''(x) &\quad \Rightarrow \quad +\cos(x) \leq +T_5'(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! \\ +\sin'(x) = +\cos(x) \leq T_5'(x) &\quad \Rightarrow \quad +\sin(x) \leq +T_5(x) = x - x^3/3! + x^5/5! \\ -\cos'(x) = +\sin(x) \leq T_5(x) = -T_7''(x) &\quad \Rightarrow \quad -\cos(x) \leq -T_7'(x) = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \\ -\sin'(x) = -\cos(x) \leq -T_7'(x) &\quad \Rightarrow \quad -\sin(x) \leq -T_7(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \end{aligned}$$

Da diese Rechnung abwechselnd zu große und zu kleine Approximationen liefert, zum Beispiel für  $x \geq 0$ :

$$T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = T_5(x),$$

bekommt man sehr gute **Fehlerschranken** mitgeliefert, etwa:  $|\sin(x) - T_5(x)| \leq \frac{|x|^7}{7!}$ .

Wir berechnen  $T_5(x) = x \cdot (1 + \frac{x^2}{6} \cdot (-1 + \frac{x^2}{20}))$  mit einmal Quadrieren und zwei Multiplikationen von Zahlen der gewünschten Stellenzahl.

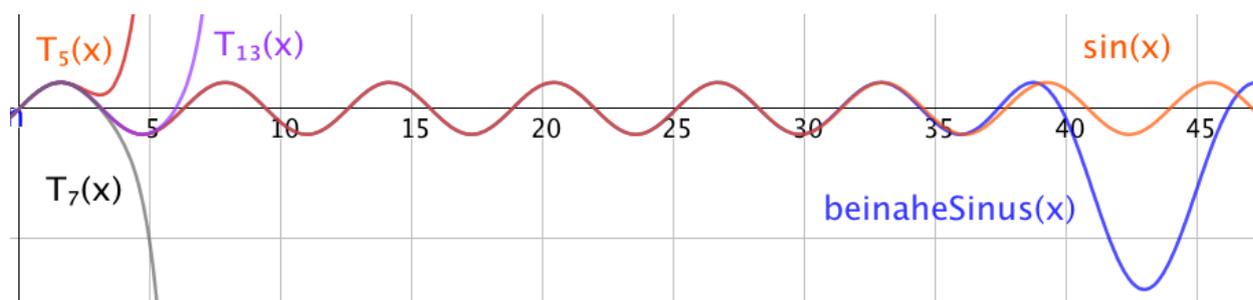
Um zu illustrieren, dass diese Polynome in der Nähe von 0 **viel** besser approximieren als für größere  $x$ , kombinieren wir sie mit dem Polynom (Seite 4) zur Winkelverdreifung  $P_3(y) = 3y - 4y^3 = y \cdot (3 - 4y^2)$ . Wir benutzen also:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 3 \sin(x/3) - 4 \sin^3(x/3) \\ &= P_3(\sin(x/3)) = P_3(P_3(\sin(x/9))) = P_3(P_3(P_3(\sin(x/27))))). \end{aligned}$$

Wir erwarten eine sehr gute Approximation von  $\sin(x)$ , wenn wir hierin statt  $\sin(x/27)$  eine bei 0 sehr gute Approximation der Sinusfunktion wählen, z.B.  $T_5(x/27)$ . Daher wird definiert:

$$\text{beinaheSinus}(x) := P_3(P_3(P_3(T_5(x/27)))).$$

Der Vergleich zwischen den Funktionen beinaheSinus (blau) und  $\sin$  (rot) ist eindrucksvoll:



$$\text{beinaheSinus}(\pi) = -0.0000000016, \quad \text{beinaheSinus}(5\pi/2) = 0.999999999995.$$

Man kommt also mit erreichbaren Mitteln an die Genauigkeit der TR heran.

Beachte dazu: Für 10-stellige Genauigkeit bei  $x \in [0, \pi/2]$  benötigt man nur **9**(!) Multiplikationen 10-stelliger Zahlen, denn  $P_3$  benötigt zwei und  $T_5$  drei Multiplikationen.

Da jetzt Sinus schnell berechnet werden kann, kann man auch  $\pi$  als Nullstelle von  $\sin(x)$  mit dem Newton Verfahren schnell berechnen. Wenn man das standard Verfahren mit dem Startwert  $c_1$  beginnt, dann ist  $c_2$  die Nullstelle der Tangente  $T(x)$ :

$$T(x) := \sin(c_1) + \sin'(c_1) \cdot (x - c_1), \text{ also } c_2 = c_1 - \tan(c_1), \dots, c_{n+1} = c_n - \tan(c_n).$$

Im Text zu Grenzwerten (A3) wird in Abschnitt "5 Beispiele" das Newton Verfahren an mehreren Beispielen besprochen. Dort wird erläutert, dass man statt der Steigung  $\sin'(c_1)$  irgendeine Steigung zwischen den Stellen  $c_1$  und  $\pi$  nehmen kann. Besonders schnell konvergiert das Verfahren, wenn man die Steigung  $-1$  der Wendetangente in  $\pi$  nimmt. Dies modifizierte Newton Verfahren berechnet dann die nächsten Näherungen als Nullstellen der Geraden  $G_n(x)$  mit Steigung  $-1$ :

$$G_n(x) := \sin(c_n) - (x - c_n), \text{ also } c_2 = c_1 + \sin(c_1), \dots, c_{n+1} = c_n + \sin(c_n).$$

Wenn wir den Iterationsvorschriften Namen geben, sehen diese Newton Verfahren wie Fixpunkt Iterationen aus:

$$\text{Für das standard Verfahren } h(x) := x - \tan(x), \quad h(\pi) = \pi,$$

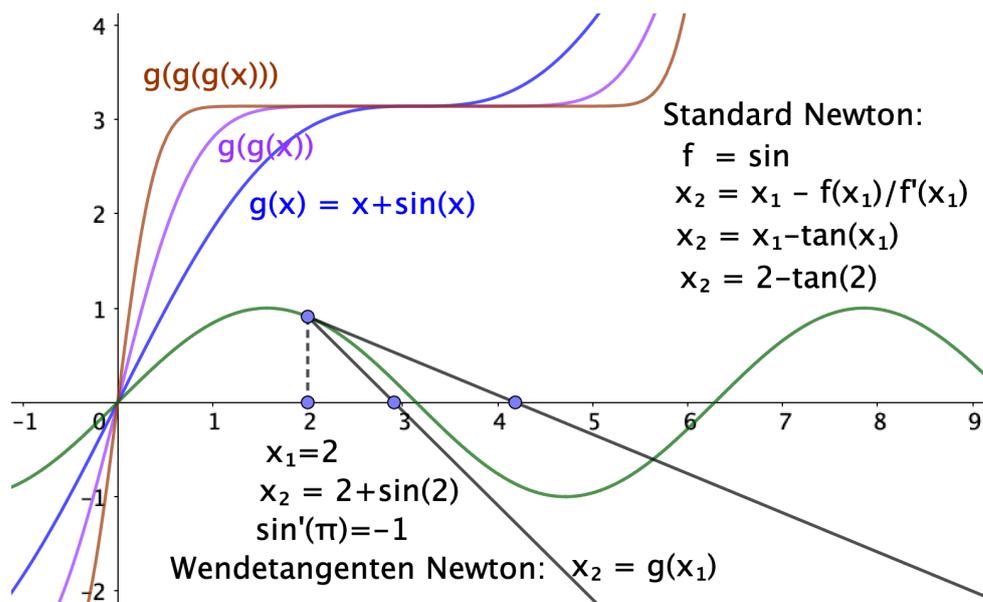
$$\text{für das modifizierte Verfahren } g(x) := x + \sin(x), \quad g(\pi) = \pi.$$

Beginnt die Iteration mit  $c_1 = 3$ , dann sehen die ersten Werte so aus:

$$\begin{aligned} 0 < h(3) - \pi < 10^{-3}, \quad 0 < \pi - h(h(3)) < 10^{-9}, \\ 0 < \pi - g(3) < 5 \cdot 10^{-4}, \quad 0 < \pi - g(g(3)) < 10^{-10}. \end{aligned}$$

Zwei Funktionsauswertungen von  $g(x) = x + \sin(x)$  liefern uns  $\pi$  auf 10 Stellen genau.

Graphische Veranschaulichung:



Die Wendetangenten Variante konvergiert für Startwerte  $c \in (0, 2\pi)$  rasch gegen  $\pi$ . Beim standard Newton Verfahren  $h(x) = x - \tan(x)$  gibt es schlechte Startwerte, etwa  $c = \pi/2$  oder den Startwert  $c = 1.976031468382582$ , für welchen folgt  $h(h(c)) = c$ . Das Newton Verfahren konvergiert dann nicht sondern oszilliert, die Zahl  $c$  ist bestimmt durch die Gleichung  $\tan(\pi - c) = 2 \cdot (\pi - c) = -\tan(c)$ .

Entsprechend dem Vorschlag in dem Text A7 möchte ich noch zeigen, wie man  $\sin'(0) = 1$  nicht als Grenzwert von Sehnensteigungen beweist, sondern indem gezeigt wird, dass die lineare Funktion  $T_0(x) = x$  den Graph der Sinusfunktion so gut approximiert, wie das bei Kreistangenten der Fall ist.

Wir beginnen mit der auf Seite 5 hergeleiteten Ungleichung (mit  $0 \leq h \leq 1$ ):

$$\sin(h) \leq h \leq \tan(h) \quad \text{oder} \quad \cos(h) \cdot h \leq \sin(h) \leq h.$$

Wegen  $\cos(0) = 1$  führt das zu der Vermutung, dass die Tangente bei 0 die Steigung 1 hat. Wir müssen uns nur noch von der höchstens quadratischen Abweichung überzeugen:

$$\cos(h) = \sqrt{1 - \sin^2(h)} \geq 1 - \sin^2(h) \geq 1 - h^2$$

Die erste Ungleichung wird durch Quadrieren verifiziert (beachte  $\sin^2(h) \geq \sin^4(h)$ ):

$$(1 - \sin^2(h))^2 = 1 - 2\sin^2(h) + \sin^4(h) \leq 1 - \sin^2(h).$$

Diese Ungleichung für  $\cos(h)$  beweist die Behauptung (beachte  $0 \leq h \leq 1 \Rightarrow h^3 \leq h^2$ ):

$$h - h^2 \leq (1 - h^2) \cdot h \leq \sin(h) \leq h \quad \text{oder} \quad |x - 0| \leq 1 \Rightarrow |\sin(x) - T_0(x)| \leq |x|^3 \leq x^2.$$

Im Text A7 ist erklärt, warum diese Ungleichung eine etwas schärfere Eigenschaft ist, als die endgültige Differenzierbarkeitsdefinition verlangt. Man sieht wegen  $|x|^3 \leq x^2$  auch, dass die Tangente bei 0 besser als normale Tangenten approximiert. Sie ist Wendetangente.