

## Monotoniesatz und Transzendenz von $e$

Von H. KARCHER in Bonn

In diesem Artikel demonstriere ich an zwei berühmten Beispielen, der Transzendenz von  $e$  und der Irrationalität von  $\pi$ , die Leistungsfähigkeit des Monotoniesatzes.

### Gliederung

1. Übersicht und Absicht
2. Variationen zum Monotoniesatz  
(Theoretischer Teil der Arbeit)
3. Parabeln und Kreise
4. Die erste Nullstelle von  $\sin$
5. Irrationalität von  $\pi$
6. Wachstumsraten, Wachstumsfunktionen
7. Strategien zur numerischen Lösung von  $f' = f$
8. Transzendenz von  $e$

Anhang: Beweis des Monotoniesatzes

### 1. Übersicht und Absicht

Der Monotoniesatz wird auf der Schule in verhältnismäßig unauffälliger Weise bei Kurvendiskussionen benutzt, am raffiniertesten noch bei den hinreichenden Extremwertbedingungen. Ich will die Anwendungen zur Fehlerabschätzung in den Vordergrund stellen. In vielen Fällen unterscheiden sich diese von den gut bekannten Anwendungen nur dadurch, daß der Monotoniesatz auf geeignete Differenzen angewandt wird. Da dabei aber weniger geläufige Aussagen entstehen, habe ich dem (exemplarischen) Hauptteil dieser Arbeit den (theoretischen) Abschnitt über Variationen des Monotoniesatzes vorangestellt.

Die vom Mittelstufenunterricht bekannten Irrationalitätsbeweise für Quadratwurzeln geben keine Hinweise darauf, wie Fehlerabschätzungen der Analysis zusammen mit den Eigenschaften der ganzen Zahlen zu Irrationalitätsaussagen führen können. Ein besonders einfaches Beispiel hierfür ist die Irrationalität von  $e$ , die am Ende von Abschnitt 6 unabhängig von der übrigen Arbeit bewiesen wird. Die Beweisstrategien für die Irrationalität von  $\pi$  und die Transzendenz von  $e$  sind zu Beginn der Abschnitte 5 und 8 aufgeschrieben. Dort ist ausgeführt, daß die Beweise auf Polynomapproximationen von  $\sin$  und  $\exp$  beruhen, die wesentlich besser als die Taylorpolynome sind. Hat man diese guten Approximationen erst einmal, so sind die dann noch benötigten Beweisargumente - hoffentlich auch nach Ansicht des Lesers - nicht mehr schwieriger als andere auf der Schule vorkommende.

Der größte Teil dieser Arbeit besteht darin, Plausibilitätsargumente zu geben, die zu guten Approximationen führen könnten. Diese Plausibilitätsargumente haben sich in der numerischen Mathematik seit langem bewährt; daß sie zum Ziel führen, wird mit dem Monotoniesatz bewiesen -

selten komplizierter als mit den Argumenten aus Abschnitt 2. Hauptsächlich handelt es sich dabei um folgende Grundidee.

Falls eine Funktion  $f$  und ein Polynom oder eine rationale Funktion  $P$  an mehreren Stellen nicht nur dieselben Werte, sondern auch noch einige gleiche Ableitungen haben, so kann man erwarten (und mit dem Monotoniesatz zeigen), daß  $f$  von  $P$  besonders gut approximiert wird.

Als erstes Beispiel hierfür bespreche ich in Abschnitt 3 quadratische und biquadratische Approximationen des Kreises. Auch die weiteren Abschnitte sind nach folgendem Muster angelegt:

Plausibler Ansatz - Beweis mit dem Monotoniesatz. Am Schluß begreift man die Irrationalität von  $\pi$ . Ich hoffe, daß dem Monotoniesatz angesichts dieser Leistungsfähigkeit eine angemessenere Rolle im Unterricht eingestanden wird, als das zur Zeit geschieht.

## 2. Variationen zum Monotoniesatz

Wendet man den Monotoniesatz auf Linearkombinationen (meist Differenzen) an, so findet man Aussagen, die oft bequemer zu benutzen sind, aber doch als inhaltsgleich durchschaut werden sollten, also nicht als "verschiedene Sätze":

- 1) Monotoniesatz  
 $0 \leq f'$  impliziert:  $f$  ist nicht fallend.
- 2) Monotoniesatz (bequemere Fassung)  
 $f' \leq g'$  impliziert:  $g-f$  ist nicht fallend, oder:  
Für  $x_0 \leq x$  gilt  $f(x)-f(x_0) \leq g(x)-g(x_0)$ .
- 3) Schrankensatz (Spezialfall der vorigen Fassung)  
 $m \leq f' \leq M$  impliziert:  
Für  $x_0 \leq x$  gilt  $m(x-x_0) \leq f(x)-f(x_0) \leq M(x-x_0)$ .

## Bemerkungen.

- (i) Ein Beweis findet sich im Anhang.
- (ii) Da man mit dem Schrankensatz bequem argumentieren kann, möchte ich zur Benutzung im vorbereitenden Unterricht darauf hinweisen, daß der Schrankensatz für manche Funktionen trivial ist:

$$\text{Wegen } x^n - x_0^n = (x-x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0^{n-1})$$

gilt für  $x_0 \leq x_1$ :

$$n \cdot x_0^{n-1} \cdot (x_1 - x_0) \leq x_1^n - x_0^n \leq n \cdot x_1^{n-1} \cdot (x_1 - x_0).$$

Der in der Hochschullehre statt des Monotoniesatzes fast ausschließlich benutzte Mittelwertsatz besitzt demgegenüber nur die quadratische Parabel als exemplarischen Spezialfall, der keinen Beweis benötigt.

Eine gute bekannte Anwendung des Monotoniesatzes ist diese:

Sei  $f'' > 0$  in  $(a, b)$ , dann ist jedenfalls  $f'$  monoton wachsend. Sei zusätzlich für ein  $x_m \in (a, b)$  noch  $f'(x_m) = 0$ , dann folgt aus der Monotonie

$$f' < 0 \text{ in } (a, x_m), \quad f' > 0 \text{ in } (x_m, b).$$

Noch einmal mit dem Monotoniesatz ergibt sich schließlich:  $f$  ist fallend in  $[a, x_m]$ , und  $f$  ist wachsend in  $[x_m, b]$ , also hat  $f$  bei  $x_m$  sein Minimum (für  $x \in [a, b]$ ).

Diese wiederholte Anwendung des Monotoniesatzes ist sehr leistungsfähig und nicht auf Extremwertdiskussionen beschränkt. Wir wollen sehen, was Linearkombinationen daraus machen können:

Sei  $f'' > 0$  in  $(a, b)$ , dann gilt für jedes  $x_m \in (a, b)$ : Der Graph von  $f$  liegt oberhalb der Tangente in  $x_m$ .

Beweis. Die Differenz zwischen  $f$  und Tangente in  $x_m$ , also die Hilfsfunktion  $h(x) = f(x) - f(x_m) - f'(x_m) \cdot (x - x_m)$  hat

immer noch  $h'' > 0$ , aber zusätzlich  $h'(x_m) = 0$  und daher bei  $x_m$  das Minimum  $h(x_m) = 0$ .

Dieselbe Idee wird noch einmal benutzt; ich gebe eine physikalische Formulierung:

Kennt man Schranken für die Beschleunigung  $f''$ , etwa  $2b < f'' < 2B$  in  $(a, c)$ , so kann man angeben, wie weit  $f$  von den tangentialen gleichmäßig geradlinigen Bewegungen abweicht:

$$b \cdot (x - x_m)^2 \leq f(x) - (f(x_m) + f'(x_m) \cdot (x - x_m)) \leq B \cdot (x - x_m)^2.$$

(Geometrische Interpretation: der Graph von  $f$  liegt zwischen zwei Parabeln mit derselben Tangente bei  $x_m$ .)

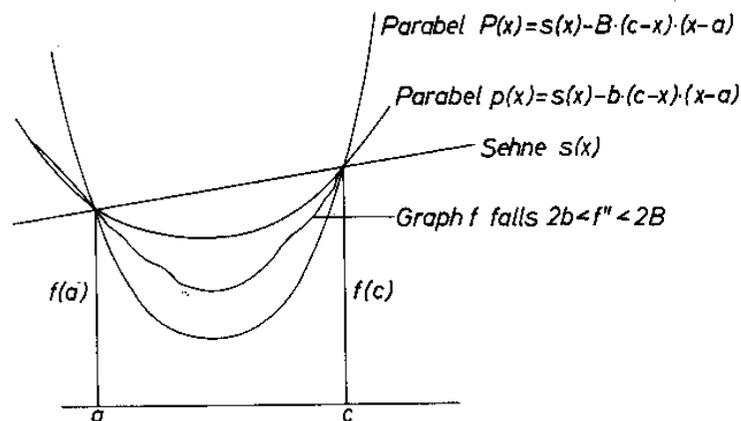
Beweis. Wie schon mehrfach beweisen wir statt  $B \geq A$  lieber  $B - A \geq 0$ . In der Tat, die Hilfsfunktionen

$$h(x) = f(x) - b \cdot (x - x_m)^2, \quad H(x) = B \cdot (x - x_m)^2 - f(x)$$

erfüllen  $h'' > 0$  bzw.  $H'' > 0$ , liegen also oberhalb ihrer Tangenten bei  $x_m$ , z. B.  $H(x) \geq -f(x_m) - f'(x_m) \cdot (x - x_m)$ . Das ist schon die Behauptung.

Dieser Einsatz von Linearkombinationen ist meiner Meinung nach nützlich und lehrreich. Ich führe als weiteres Beweismittel eine einfache Fallunterscheidung ein und komme zu einer Aussage, deren Beweis man beim Lesen kaum anmerkt, daß man selber Mühe hätte, ihn zu finden. Dies als Beispiel dafür, wie harmlose Variationen das zuerst zitierte "Extremwert-Argument" schon zu einem raffinierten Hilfsmittel machen können.

Wieder sei  $2b < f'' < 2B$  auf  $(a, c)$  (Beschleunigungsschranken). Betrachte die beiden Parabeln mit denselben Randwerten  $f(a), f(c)$  wie  $f$  und den Beschleunigungen  $+2b, +2B$ . (Ist es schwer oder leicht, diese Parabeln anzugeben?)



Figur 1

$$p(x) := \frac{1}{c-a} \cdot (f(a) \cdot (c-x) + f(c) \cdot (x-a)) - b \cdot (c-x) \cdot (x-a),$$

$$P(x) := \frac{1}{(c-a)} \cdot (f(a) \cdot (c-x) + f(c) \cdot (x-a)) - B \cdot (c-x) \cdot (x-a).$$

Behauptung:  $f$  liegt zwischen diesen Parabeln, also  $P(x) \leq f(x) \leq p(x)$ .

Wollen Sie vor dem Weiterlesen einen Beweisversuch machen? Ich fand es unerwartet schwierig, die nachträglich harmlose, über den vorhergehenden Beweis hinausgehende Zusatzidee (eine Fallunterscheidung) zu finden.

Beweis. Wegen guter Erfahrungen betrachten wir sofort die Differenzfunktionen

$$h(x) := f(x) - p(x) \quad H(x) := P(x) - f(x)$$

$$h'' > 0, h(a) = h(c) = 0, H'' > 0, H(a) = H(c) = 0.$$

Die Behauptung ist äquivalent zu  $h \leq 0$  und  $H \leq 0$  (gleiche Beweise). Zunächst ist  $h'$  wachsend. Für jedes  $x \in (a, c)$

ist entweder  $h'(x) \leq 0$  oder  $h'(x) > 0$ . Im ersten Fall ist  $h' < 0$  auf  $(a, x)$ , im zweiten ist  $h' > 0$  auf  $(x, c)$ . Dieses einfache Monotonieargument wird wiederholt:

Im ersten Fall ist  $h$  fallend auf  $[a, x]$ , also  $h(x) < h(a) = 0$ , im zweiten Fall ist  $h$  wachsend auf  $[x, c]$ , also  $h(x) < h(c) = 0$ .

#### Zwei weitere Beispiele.

- (i) Die wiederholte Anwendung des Monotoniesatzes führt zu den Taylorapproximationen von  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\exp$  [St] (vgl. Abschnitte 4 und 6).
- (ii) Die Keplersche Faßregel integriert bekanntlich kubische Polynome exakt; für die Fehlerabschätzung unter der Voraussetzung  $|f^{(4)}| \leq B$  denken wir uns von  $f$  das kubische Polynom  $P$  abgezogen, daß bei  $a, b, \frac{1}{2}(a+b)$  dieselben Werte wie  $f$  hat, und bei  $\frac{1}{2}(a+b)$  auch noch dieselbe Tangente.

Dann beweisen wir: Aus  $0 \leq h^{(4)}$ ,  $h(a) = h(\frac{1}{2}(a+b)) = h(b) = 0$  und  $h'(\frac{1}{2}(a+b)) = 0$  folgt  $h \leq 0$  in  $[a, b]$ , also  $|f-P| \leq \frac{1}{24} \cdot B \cdot (x-a) \cdot (x-\frac{1}{2}(a+b))^2 \cdot (b-x)$  (vgl. Abschnitt 3).

Die Einzelheiten sind mir nicht so wichtig wie die Beobachtung, daß das Monotonieargument iterierbar ist und daß damit nützliche Aussagen bewiesen werden können.

Ein anderes wohlvertrautes Hilfsmittel ist die Quotientenregel  $(\frac{g}{f})' = \frac{g}{f} \cdot (\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f})$  (z. B.). Sie liefert *direkt* eine multiplikative Version des Schrankensatzes zu Voraussetzungen über die Wachstumsraten  $\frac{f'}{f}, \frac{g'}{g}$ .

#### Multiplikativer Schrankensatz

Für positive Funktionen  $f, g$  gelte in  $[0, a]$ :  $\frac{f'}{f} \leq \frac{g'}{g}$ .

Dann ist  $\frac{g}{f}$  nicht fallend, d. h.  $\frac{f(x)}{f(0)} \leq \frac{g(x)}{g(0)}$ .

Bemerkung. Außerhalb des Mathematikunterrichts scheinen mir Wachstumsraten  $\frac{f'}{f}$  eine größere Rolle als Steigungen  $f'$  zu spielen. Warum? Kann man diese Kombination von zwei Standardargumenten schwierig nennen?

Ich gebe zwei Anwendungen auf Folgen. Ich nehme an, die meisten Leser haben kompliziertere Beweise dieser Aussagen gesehen. (Auf Linearkombinationen weise ich nicht explizit hin.)

- 1) Bernoullische Ungleichung: Die Funktion  $f(x) = (1+x)^n - 1 - n \cdot x$  ( $n > 1$ ) hat auf  $[-1, \infty)$  bei 0 das Minimum 0. Beweis mit dem (linearen) Monotoniesatz:  $f'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1} - n$ ,  $f' < 0$  auf  $[-1, 0)$ ,  $f' > 0$  auf  $(0, \infty)$ , also  $f(x) \geq f(0) = 0$ .
- 2) Definiere für  $x \geq 0$  die Funktionen  $a_n(x) := (1 + \frac{x}{n})^n$ . Behauptung:  $a_n(x) \leq a_{n+1}(x)$  ( $\leq e^x$  falls man  $e^x$  kennt). Beweis mit dem multiplikativen Schrankensatz:
- $$\frac{a'_n}{a_n}(x) = (1 + \frac{x}{n})^{-1} \leq \frac{a'_{n+1}}{a_{n+1}}(x) = (1 + \frac{x}{n+1})^{-1} \leq 1.$$
- Entsprechend folgt für  $b_n(x) := (1 - \frac{x}{n})^{-n}$  in  $0 \leq x < n$  ( $e^x \leq b_{n+1}(x) \leq b_n(x)$ ).

#### Bedeutung für die Integralrechnung

- (i) Die bekannte Tatsache, daß sich zwei Stammfunktionen von  $f$  auf einem Intervall nur um eine Konstante unterscheiden, besitzt folgende nützliche qualitative Variante, die auch nur eine Version des Monotoniesatzes ist:

Falls  $F' = f \leq G'$  und  $a \leq b$  sind, so gilt

$$F(b) - F(a) \leq G(b) - G(a).$$

Beispiel: Für  $x \geq 1$  ist

$$x^{-\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq x^{-1} \leq x^{-1 + \frac{1}{n}}, \quad \text{und daher} \\ n\left(1 - x^{-\frac{1}{n}}\right) \leq \ln x \leq n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

- (ii) Man sollte einen großen Unterschied machen zwischen Funktionen  $f$ , für die man Stammfunktionen raten kann, und solchen, für die das nicht der Fall ist. Für erstere wird das Problem des Flächeninhalts unter dem Graphen von  $f$  nämlich durch den Monotoniesatz erledigt und nicht erst durch den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Definition des Inhalts krummlinig begrenzter Figuren hat im Laufe der Geschichte große Mühe gemacht. Ich finde, man verdunkelt an einer bedeutenden Stelle die Leistungsfähigkeit der Analysis, wenn man Stammfunktionen mit Hilfe von Flächeninhalten definiert. Die folgenden Argumente zeigen u. a., warum man z. B. den Flächeninhalt unter den Potenzfunktionen  $f(x) = x^n (n \neq -1)$  sehr viel leichter verstehen kann als die Kreisfläche.

Wenn man über den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion sprechen will, setzt man den Inhalt endlicher Vereinigungen achsenparalleler Rechtecke als bekannt voraus. Man ist bereit, als Inhalt der Fläche unter dem Graphen einer positiven Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a, b]$  eine solche Zahl  $A$  zu bezeichnen, die folgende Eigenschaften hat:

(\*)  $A$  ist kleiner als die Fläche aller Obertreppen zu  $f$  und größer als die Fläche aller Untertreppen zu  $f$ .

(\*\*) Es gibt keine andere Zahl  $\tilde{A}$  mit Eigenschaft (\*).

Satz. Falls  $F$  eine Stammfunktion zu  $f$  ist, so hat  $A = F(b) - F(a)$  die Eigenschaften (\*), (\*\*).

Beweis. Zu einer Ober- (bzw. Unter-)treppe gehört eine Einteilung  $a = a_0 < a_1 \dots < a_n = b$  und Zahlen  $M_i$  (bzw.  $m_i$ ), so daß gilt

$$f(x) \leq M_i \quad (\text{bzw. } m_i \leq f(x)) \quad \text{für } x \in [a_{i-1}, a_i].$$

Aus dem Schrankensatz für  $F$  folgt

$$F(a_i) - F(a_{i-1}) \leq M_i \cdot (a_i - a_{i-1}) \quad \text{bzw.} \\ m_i (a_i - a_{i-1}) \leq F(a_i) - F(a_{i-1}).$$

Diese Ungleichungen werden über die Teilintervalle summiert und wegen  $\sum_i (F(a_i) - F(a_{i-1})) = F(b) - F(a)$  folgt:  $F(b) - F(a)$  liegt tatsächlich zwischen den Inhalten aller Untertreppen und aller Obertreppen.

Um auch (\*\*) zu beweisen, mache ich die für die augenblickliche Diskussion nicht sehr schwerwiegende Zusatzvoraussetzung

$$|f'| \leq L \quad \text{in } [a, b].$$

Nun wird zunächst eine Einteilung gewählt, deren maximale Breite  $d := \max_i (a_i - a_{i-1})$  wir uns "klein" vorstellen (s.u.). Wegen  $|f'| \leq L$  und dem Schrankensatz für  $f$  können wir jetzt Unter- und Obertreppen wählen durch

$$m_i = f(a_{i-1}) - L \cdot (a_i - a_{i-1}) \\ M_i = f(a_{i-1}) + L \cdot (a_i - a_{i-1}).$$

Als Differenz der Flächen dieser Treppen finden wir

$$\sum M_i \cdot (a_i - a_{i-1}) - \sum m_i \cdot (a_i - a_{i-1}) = \\ = \sum 2L \cdot (a_i - a_{i-1})^2 \leq 2L \cdot (b-a) \cdot d.$$

Diese Differenz können wir also durch Wahl von  $d$  so klein machen, wie wir wollen; damit ist es unmöglich, daß zwei verschiedene Zahlen zwischen den Inhalten aller Untertreppen einerseits und aller Obertreppen andererseits liegen. Da dem Leser die einzelnen Schritte sicher mehr oder weniger bekannt sind, wiederhole ich: Wichtig ist, daß der Flächeninhalt krumm begrenzter Figuren nicht als selbstverständlich vorausgesetzt wird, sondern mit Hilfe der Analysis erklärt werden kann.

### 3. Parabeln und Kreise

Tangenten der Parabel und Flächeninhalte unter der Parabel sind zugänglicher als die Kreisfläche. Sie sind explizit angebar und nicht nur zu approximieren. Ich werde darum versuchen, den Kreis durch quadratische und biquadratische Funktionen zu approximieren. Die Güte dieser Approximationen soll anschließend durch Vergleiche von Flächeninhalten getestet werden.

Approximiert wird der verschobene Einheitskreis

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = 2y - y^2.$$

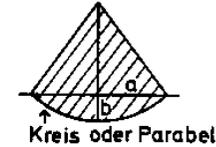
- (i) Der Parabelbogen, der im tiefsten Punkt *berührt* und durch  $(a,b)$  mit  $a^2 = 2b - b^2$  geht, ist

$$p(x) = b \cdot \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2}{2-b}, \quad -a \leq x \leq a.$$

$$\text{Wegen } x^2 + (p(x)-1)^2 - 1 = \frac{-b}{2-b} x^2 + \frac{x^4}{(2-b)^2} \leq$$

$$\frac{-b}{2-b} x^2 + \frac{a^2 x^2}{(2-b)^2} = 0$$

liegt der Parabelbogen *innerhalb* des Kreises.



Figur 2

Der Inhalt der schraffierten Fläche ist

$$A_p = a \cdot (1-b) + 2ab - \int_{-a}^a p(x) dx = a + \frac{1}{3} ab.$$

Dies ist eine *untere* Schranke für die Fläche des Kreissektors (und zwar der Wert, den die Keplersche Faßregel für den Kreissektor liefert).

- (ii) Der Parabelbogen, der den Kreis in  $(\pm a, b)$  berührt, ist

$$p(x) = b + \frac{x^2 - a^2}{2-2b}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Wegen  $x^2 + (p(x)-1)^2 \geq 1$  liegt dieser Parabelbogen außerhalb des Kreises. Der wie eben berechnete Inhalt des Parabelsektors ist

$$A_p = a + \frac{1}{3} ab \frac{1+b}{1-b},$$

und dies ist eine *obere* Schranke für die Fläche des Kreissektors.

- (iii) Als Fehlerschranke für die Fläche des Kreissektors erhalten wir

$$A_p - A_p = \frac{2}{3} a \cdot \frac{b^2}{1-b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^5}{(1-b)(2-b)^2}.$$

Zum Beispiel für den  $60^\circ$ -Sektor, also  $a = \frac{1}{2}$ ,  
 $b = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3}$ , ergibt sich:  $(A_p - A_p)(60^\circ) \approx \frac{1}{148}$ .

Außerdem beobachten wir folgendes: Halbiert man den Sektorwinkel, so wird  $a^5$  ungefähr um den Faktor  $\frac{1}{32}$  kleiner. Das heißt: berechnet man die Fläche des  $60^\circ$ -Sektors mit Hilfe von zwei  $30^\circ$ -Sektoren, so ist der Fehler nur etwa  $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{148}$ ; usw. Bei jedem Halbierungsschritt wird der Fehler etwa um den Faktor  $\frac{1}{16}$  kleiner. Die Halbierungsiteration geht schon auf Archimedes zurück, sie lautet in trigonometrischen Bezeichnungen

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Für weitere Einzelheiten vgl. [F].

- (iv) Da die eigentliche Halbierungsiteration unabhängig von der Approximation der Kreissektoren ist, kann man durch bessere Kreisapproximationen die Genauigkeit sehr vergrößern, ohne den Rechenaufwand nennenswert zu erhöhen. Wir wählen jetzt die folgenden biquadratischen Approximationen

$$P_\alpha(x) = (1-\alpha) \cdot b \cdot \frac{x^2}{a} + \alpha \cdot b \cdot \frac{x^4}{a}$$

Diese berühren offenbar alle den Kreis im tiefsten Punkt und gehen durch  $(\pm a, b)$ , Linearkombinationen! Nach Einsetzen in die Kreisgleichung findet man  $\alpha_0 = \frac{b}{2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{b}{2-b}$  so, daß für  $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$  die Graphen von  $P_\alpha$  den Kreis noch je einmal zwischen 0 und  $\pm a$  schneiden.  $P_{\alpha_1}$  berührt den Kreis dreimal, nämlich bei 0 und bei  $\pm a$  und verläuft sonst *außerhalb*.  $P_{\alpha_0}$  berührt den Kreis bei 0 mit Übereinstimmung auch der zweiten und dritten Ableitung und verläuft bis  $\pm a$  *innen*. (Die Nachprüfung ist eine kleine Übung im Umgang mit Kreisen und Polynomen.)

Die Fläche des den Kreis approximierenden Sektors wird wie vorher berechnet mit dem Ergebnis:

$$A_\alpha = a \cdot a \cdot b - \int_{-a}^a P_\alpha(x) dx = a + \frac{1}{3} a \cdot b + \alpha \cdot \frac{4}{15} a \cdot b.$$

Die Fehlerschranke beträgt diesmal:

$$A_{\alpha_1} - A_{\alpha_0} = \frac{2}{15} a \cdot \frac{b^3}{2-b} = \frac{2}{15} \cdot \frac{a^7}{(2-b)^4};$$

$$(A_{\alpha_1} - A_{\alpha_0})(60^\circ) \approx \frac{1}{11700}.$$

Die Genauigkeit steigt jetzt bei jedem Halbierungsschritt etwa um den Faktor  $\frac{1}{64}$ . Das bessere Berühren der biquadratischen Polynome steigert also die Genauigkeit erheblich.

#### 4. Die erste Nullstelle von $\sin$

Nach dieser guten Erfahrung mit der biquadratischen Kreisapproximation gewinnen wir als nächstes die Einsicht, daß man  $\pi$  noch viel *räscher* aus der ersten Nullstelle von  $\sin$  berechnen kann. Diese Methode bestimmt  $\pi$  so gut, daß man eine Chance erhält, die Irrationalität zu beweisen. Die Idee ist zweiteilig.

*Erstens.* Weil  $\sin$  bei  $\pi$  keine gewöhnliche Tangente hat, sondern eine *Wendetangente* der Steigung  $-1$ , ist das Newtonverfahren in der Form

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n}{\sin' \pi} = x_n + \sin x_n$$

rascher konvergent, als ein Newtonverfahren allgemein verspricht. Dabei ist die Korrektur  $\sin x_n = \sin(\pi - x_n)$  offenbar eine Näherung für  $y = \pi - x_n$ . Kennt man eine noch bessere, so kann man die Konvergenz weiter beschleunigen. Zum Beispiel folgt aus  $\sin y \approx y - \frac{1}{6} y^3$  (s. u.) zunächst  $y \approx \sin y + \frac{1}{6} \sin^3 y$  und damit die hervorragende Iteration  $x_{n+1} = x_n + \sin x_n + \frac{1}{6} \sin^3 x_n$ . Sie ist so gut, daß bei

$x_0 = 3$  schon  $|\pi - x_2| \leq 10^{-25}$  wird, was Taschenrechner weit überfordert. Ich will hier jedoch auf die Fehlerabschätzung verzichten.

*Zweitens.* Damit der erste Schritt überzeugend ist, müssen wir  $\sin x_n$  ohne große Mühe berechnen können. Zunächst ist die gute Approximation durch die Taylorpolynome eine schon oft beschriebene einfache Anwendung des Monotoniesatzes [St]:

- 1) Aus  $\sin' = \cos$ ,  $\cos' = -\sin$ ,  $\sin(0) = 0$ ,  $\cos(0) = 1$  folgt  
 $(\sin^2 x + \cos^2 x)' = 0$ ,  $\sin^2 + \cos^2 = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 1$ .

Weiter folgt für  $0 \leq x$  jeder Schritt direkt aus dem Monotoniesatz (zweite Fassung  $f' \leq g' \Rightarrow f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$ ):

- 2) Wegen  $\cos x \leq 1$  ist  $\sin x \leq x$ ,  
 3) wegen  $-x \leq -\sin x$  ist  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ ,  
 4) wegen  $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$  ist  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ ,  
 5) wegen  $-\sin x \leq -x + \frac{x^3}{6}$  ist  $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$  usw.

Trotz der sehr guten Konvergenz dieser alternierenden (einfache Fehlerdiskussion!) Polynome ist die Berechnung von  $\sin$  in der Nähe von  $\pi$  damit mühsam. Die Physiker, die  $\sin$  und  $\cos$  zur Beschreibung von Drehbewegungen und periodischen Vorgängen *benutzen* wollen, bestehen noch darauf, die Additionstheoreme zu lehren. Wir wollen sie benutzen.

Beweis eines Additionstheorems mit dem Schrankensatz und Linearkombinationen:  $f(x) = \sin(a+x)$  erfüllt  $f''+f=0$ ,  $f(0) = \sin a$ ,  $f'(0) = \cos a$ .  $g(x) = \sin a \cdot \cos x + \cos a \cdot \sin x$  erfüllt natürlich auch  $g''+g=0$ , und die Linearkombination von  $\sin$  und  $\cos$  wurde so gewählt, daß  $f(0) = g(0)$ ,  $f'(0) = g'(0)$ . Schließlich folgt für  $h(x) = f(x) - g(x)$ :

$$h'' + h = 0, h(0) = 0, h'(0) = 0, \text{ also}$$

$$(h'^2 + h^2)' = 2h'(h+h'') = 0, h'^2(x) + h^2(x) = h'^2(0) + h^2(0) = 0.$$

Es folgt  $f = g$ , also das Additionstheorem.

Wir benutzen speziell  $\sin 3x = \sin x \cdot (3 - 4 \sin^2 x)$ . Mit Hilfe des Polynoms  $S_3(y) = y \cdot (3 - 4y^2)$  haben wir insbesondere

$$\sin x = S_3\left(\sin \frac{x}{3}\right), \sin x = S_3(S_3\left(\sin \frac{x}{9}\right)).$$

Die Ableitung von  $S_3$  ist nicht besonders groß:  $S_3'(y) = 3 - 12y^2$ , z.B.  $y^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |S_3'| \leq 3$ . Daher ist die Fehlervergrößerung bei zweimaliger Anwendung von  $S_3$  ein Faktor  $\leq 9$ , die Fehlerverkleinerung aber, wenn man  $\frac{x}{9}$  statt  $x$  etwa in das fünfte Taylorpolynom  $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$  einsetzt, ist - wegen  $|\sin x - T_5(x)| \leq \frac{1}{7!}|x|^7$  - ein Faktor  $9^{-7}$ ! Daher kommt z. B. die Approximation

$$S_3(S_3(T_5(\frac{x}{9}))) \approx \sin x$$

erstens im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  an die Grenzen des Taschenrechners und zweitens benötigt sie offenbar nicht besonders viele Rechenoperationen.

Bemerkung. Wenn man mit einem Verfahren aus Abschnitt 3  $\frac{\pi}{6}$  *sehr genau* (z. B.  $\pm 10^{-100}$ ) bestimmen will, indem man aus

$$a = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, 1-b = \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$1-b_1 = \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}},$$

$$2a_1 = 2 \sin 15^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 15^\circ} \text{ ausrechnet, usw.}$$

$$1-b_{n+1} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} b_n}, 2a_{n+1} = \frac{a_n}{b_{n+1}}, \text{ so muß man leider von}$$

Anfang an mit der endgültig beabsichtigten Genauigkeit rechnen.

Bei dem zuletzt beschriebenen Newtonverfahren kann man die ersten Schritte dagegen großzügiger, mit geringerer Genauigkeit rechnen, so daß der Rechenaufwand im wesentlichen bei der Berechnung des letzten  $\sin$ -wertes vor Abbruch des Verfahrens entsteht.

5. Die Irrationalität von  $\pi$ 

Nach den beiden vorhergehenden Abschnitten liegt folgender Ausgangspunkt nahe:  $\pi$  wird als erste Nullstelle von  $\sin$  definiert, und  $\sin$  soll durch Polynome approximiert werden, die den Graphen bei 0 und bei  $\pi$  möglichst gut berühren. Die ersten Beispiele findet man leicht:

$$F_1(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right), \quad F_1'(0) = -F_1'(\pi) = 1$$

$$F_2(x) = F_1(x) + \frac{1}{\pi} F_1(x)^2, \quad F_2''(0) = F_2''(\pi) = 0,$$

$$F_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0,982.$$

Hierdurch ermutigt macht man den Ansatz

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left(x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\right)^k, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{\pi},$$

und versucht, die  $a_k$  nacheinander so zu bestimmen, daß möglichst viele Ableitungen von  $F_n$  bei 0 und  $\pi$  dieselben sind wie bei  $\sin$ . Dies liefert tatsächlich eine Rekursionsformel für die  $a_k$ .

Beweisstrategie

Zunächst sieht man sicher nicht, was die  $F_n$  mit der Irrationalität von  $\pi$  zu tun haben. Man kann aber hoffen, daß die  $F_n$  deutlich besser als die Taylorpolynome approximieren. Das bedeutete dann, daß die  $a_k$  deutlich rascher als  $\frac{1}{k!}$  klein werden müßten. Tatsächlich können wir mit dem Monotoniesatz beweisen, daß

$$0 < a_k \leq \frac{1}{k!(k-1)!} \text{ ist.}$$

Andererseits folgt aus der Annahme  $\pi = \frac{p}{q}$ , daß die Startwerte und die Koeffizienten der erwähnten Rekursionsformel rational sind. Es ist nun leicht zu sehen - bei nur geringen Erfahrungen mit Rekursionsformeln sogar als bekannt anzusehen -, daß die Nenner der  $a_k = \frac{2k}{N_k}$  nicht zu rasch

wachsen, hier  $N_k \leq k! \cdot p^{k-1}$ . Daher folgt aus  $0 < a_k$  sogar  $\frac{1}{N_k} \leq a_k$ , im Widerspruch zu  $a_k \leq \frac{1}{k!(k-1)!}$ .

Die Rekursionsformel

$$\left(x^k \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^k\right)' = k \cdot x^{k-1} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)$$

$$\left(x^k \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^k\right)'' = k \cdot (k-1) \cdot x^{k-2} \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{k-2} - \frac{2}{\pi} k \cdot (2k-1) \cdot x^{k-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{k-1}.$$

Setzen wir  $F_n''(x) + F_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^k$ , so finden wir  $b_k = a_k - \frac{2}{\pi}(k+1)(2k+1)a_{k+1} + (k+2) \cdot (k+1) \cdot a_{k+2}$ . Wir können also  $F_n''(x) + F_n(x) = b_{n-1} x^{n-1} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{n-1} + a_n \cdot x^n \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^n$  erreichen durch die Rekursionsdefinition:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad a_{k+2} = \frac{2}{\pi} \left(2 - \frac{3}{k+2}\right) a_{k+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot a_k.$$

Dabei ergibt sich noch  $b_{n-1} = -(n+1) \cdot n \cdot a_{n+1}$ .

Bemerkung. Wählt man z. B. Anfangswerte  $\tilde{a}_1 = 0, \tilde{a}_2 = 1$ , so findet man leicht, daß die  $\tilde{a}_k$  ungefähr wie eine geometrische Reihe mit dem Faktor  $\frac{4}{\pi}$  wachsen. Aus zwei Lösungen der Rekursionsformel gewinnt man durch Linearkombination alle Lösungen, so daß es höchstens eine beschränkte Lösung geben kann. Man wird also nicht erwarten, daß sich die angekündigte Abschätzung  $0 < a_k \leq \frac{1}{k!(k-1)!}$  aus der Rekursionsformel allein beweisen läßt. Dazu benutzen wir den Monotoniesatz. Das Resultat zeigt dann, daß (für alle  $k$ )  $a_{k+2}$  durch die Rekursionsformel als Differenz fast gleich großer Zahlen bestimmt ist!  $\pi$  inszeniert also eine so perfekte Rundungsfehlerkatastrophe, daß man nur wenige  $a_k$  aus der Rekursionsformel berechnen kann.

Z.B. wird bei  $\pi = 3,141592653589793$  schon  $a_9 < 0$ .

Die Abschätzung der  $a_k$ 

Bei dem üblichen Ausbildungshintergrund ist es jetzt übersichtlicher, den Schrankensatz in der Form

$f \leq g \Rightarrow \int_0^{\pi} f \leq \int_0^{\pi} g$  zu benutzen. Wegen

$$F_n''(x) + F_n'(x) = a_n \cdot x^n \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{n-n(n+1)} \cdot a_{n+1} \cdot x^{n-1} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{n-1}$$

und  $(F_n' \cdot \sin - F_n \cdot \cos)' = (F_n'' + F_n') \cdot \sin$  folgt (erste Schrankensatzanwendung, leider nicht motivierbarer Trick):

$$\int_0^{\pi} (F_n'' + F_n')(x) \cdot \sin x \, dx = 0 \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} a_n \cdot \int_0^{\pi} x^n \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^n \sin x \, dx &= \\ &= n \cdot (n+1) a_{n+1} \cdot \int_0^{\pi} x^{n-1} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^{n-1} \sin x \, dx. \end{aligned}$$

Alle Integrale sind  $>0$ , daher folgt zunächst  $0 < a_n$  - schon dies kann ich nicht aus der Rekursionsformel folgern. Als zweite Schrankensatzanwendung vergrößern wir das linke Integral durch Vergrößern des Integranden via  $x \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \leq \frac{\pi}{4}$ , ein Standardtrick. Die Integrale sind nun gleich, wir kürzen, ohne sie auszurechnen und erhalten

$$a_n \geq \frac{4}{\pi} n \cdot (n+1) \cdot a_{n+1}.$$

Mit der Abkürzung  $A_n := a_n \cdot n! \cdot (n-1)!$ ,  $A_1 = 1$  impliziert diese Ungleichung  $A_n \geq A_{n+1}$ , also offenbar  $1 \geq A_n$  und daher die Behauptung:

$$a_n \leq \frac{1}{n! (n-1)!}.$$

Ich möchte noch einmal sagen, daß ich keine Möglichkeit sehe, dies aus der Rekursionsformel allein zu folgern.

Angenommen,  $\pi$  wäre rational,  $\pi = \frac{P}{Q}$

Nach Wegmultiplizieren der Nenner lautet die Rekursionsformel

$$P \cdot (k+2) \cdot (k+1) \cdot a_{k+2} = 2Q \cdot (2k+1) \cdot (k+1) \cdot a_{k+1} - P \cdot a_k.$$

Dies vereinfacht sich durch die Definition

$$B_k := P^{k-1} \cdot k! \cdot a_k \text{ zu}$$

$$B_{k+2} = 2Q \cdot (2k+1) \cdot B_{k+1} - P^2 \cdot B_k, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 2Q.$$

Nun haben wir eine Rekursion mit ganzzahligen Koeffizienten und ganzzahligen Startwerten, also sind alle  $B_k$  ganz. Wegen

$$0 < a_k = \frac{B_k}{k! P^{k-1}} \quad \text{ist sogar} \quad B_k \in \mathbf{N}.$$

Damit sind die  $a_k$  rationale Zahlen  $\geq \frac{1}{k! P^{k-1}}$ . Diese Folgerung kann wegen  $a_k \leq \frac{1}{k! (k-1)!}$  nur richtig sein, solange  $(k-1)! \leq P^{k-1}$  ist, was z. B. für  $k-1 \geq 2P^2$  sicher nicht mehr der Fall ist.

Das widerlegt die Annahme  $\pi = \frac{P}{Q}$ .

Sicherlich kommen sogar in mancher Klassenarbeit kompliziertere Rechnungen als die dieses Beweises vor. Ich denke, man kann auch keinen Einzelschritt besonders schwierig nennen. Ich glaube ferner, daß der Leser die Argumente mit der Rekursionsformel durchaus selbst finden könnte. Als raffinierter Trick erscheint nur die erste Schrankensatzanwendung und der Approximationsansatz.

6. Wachstumsraten, Wachstumsfunktionen

Das Ende dieses Artikels wird der Beweis der Transzendenz von  $e$  sein. Offenbar müssen wir dazu die Exponentialfunktion ein wenig studieren. Wie im Irrationalitätsbeweis für  $\pi$  führen gute numerische Verfahren bei der Approximation der Exponentialfunktion auf einen für den Transzendenzbeweis

geeigneten Ansatz. Dabei spielt die Differentialgleichung  $f' = f$  eine besondere Rolle. Leider sind seit Jahrzehnten Grundkenntnisse über einfachste Differentialgleichungen in systematische Vorlesungen für höhere Semester ausgelagert worden, so daß nicht jedem geläufig ist, wie mit einfachen Mitteln  $f' = f$  behandelt werden kann.

Ich habe schon gesagt, daß Wachstumsraten ( $\frac{f'}{f}$ ), Geburtenraten, Zinsraten, Zerfallsraten außerhalb des Mathematikunterrichts eine große Rolle spielen. Wenn man Ableitungen schon kennt, ist der Begriff der Wachstumsrate  $\frac{f'}{f}$  nicht weit. Hat man den multiplikativen Schrankensatz, so kann man ebenso leicht mit Wachstumsraten wie mit Steigungen umgehen. Wir betrachten deshalb die Exponentialfunktion als Funktion mit Wachstumsrate  $\frac{f'}{f} = 1$ . In der weiteren Diskussion werden Mathematiker durch das hier noch ungelöste Existenzproblem irritiert. Ich schlage daher vor, zunächst die einfachere und praktisch *ebenso wichtige Frage nach Funktionen mit Wachstumsrate  $\frac{f'}{f} \leq 1$  bzw.  $\frac{g'}{g} \geq 1$  zu stellen.*

Hierzu können mühelos Beispiele angegeben werden! Wir kennen bereits:

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ mit Wachstumsrate } \frac{a'_n}{a_n}(x) = \frac{1}{1+x/n} \leq 1,$$

$$b_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \text{ mit Wachstumsrate } \frac{b'_n}{b_n}(x) = \frac{1}{1-x/n} \geq 1.$$

Wegen der Bernoullischen Ungleichung gilt außer der in Abschnitt 2 gezeigten Monotonie  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{m+1} \leq b_m$  auch noch

$$\begin{aligned} 0 \leq b_n(x) - a_n(x) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} - 1\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{n}} - 1\right) = a_n(x) \cdot \frac{x^2}{n-x^2}. \end{aligned}$$

Wegen des multiplikativen Schrankensatzes wissen wir auch schon  $a_n(x) \leq b_m(x) \leq \frac{1}{1-x}$ , so daß für

$0 \leq x < 1$   $\{[a_n(x), b_n(x)]\}$  sogar als Intervallschachtelung erkannt ist. Und: Jede Funktion  $f$  mit  $\frac{f'}{f} = 1$ ,  $f(0) = 1$  erfüllt  $a_n(x) \leq f(x) \leq b_n(x)$  in  $0 \leq x < n$ .

Andererseits konvergieren die Folgen  $a_n(x)$ ,  $b_n(x)$  schlecht. Man kann den Schrankensatz auch so einsetzen [St]:

$$1 \leq f = f' \quad \Rightarrow \quad (1+x) \leq f(x), \quad (0 \leq x)$$

$$1 + x \leq f(x) = f'(x) \quad \Rightarrow \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq f(x).$$

Vermutung:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leq f(x).$$

In der Tat:

$$\frac{T'_n}{T_n}(x) = 1 - \frac{1}{n!} \frac{x^n}{T_n(x)} \leq 1.$$

Wegen  $\frac{a'_n}{a_n}(x) \leq \frac{T'_n}{T_n}(x) \leq 1$  folgt  $a_n(x) \leq T_n(x) \leq b_m(x)$ . Die

Folge  $\{T_n(x)\}$  hat also denselben Grenzwert wie die Intervallschachtelung und konvergiert bedeutend besser.

Bemerkung. In der neueren didaktischen Diskussion hat sich endlich die Erkenntnis durchgesetzt, daß es besser ist, Analysis an Funktionen zu lehren statt an Folgen. Hier treten Folgen auf, aber diese Folgen sind nicht als willkürliche Übungsbeispiele hingeschrieben, sondern als Folge des Versuchs, ein zunächst umgangssprachlich beschriebenes Problem ("Wachstumsfunktionen", was ist das?) zu lösen. Daß wir so rasch zu Intervallschachtelungen gekommen sind, kann uns nur recht sein, wenn wir von der Vollständigkeit der reellen Zahlen profitieren wollen.

Nun sollen dieselben Ideen, die sich bei der Behandlung von sin bewährt haben, ausprobiert werden. Wie die Funktional-

gleichung aus der Differentialgleichung  $f' = f$  folgt, ist wohl bekannt: Die Funktion  $h(x) = \frac{f(x) \cdot f(a)}{f(x+a)}$  erfüllt  $h(0) = 1$  und (wegen der Quotientenregel)  $h' = 0$ , also  $h(x) = 1$  oder  $f(x+a) = f(x) \cdot f(a)$ . Insbesondere  $f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n$ . Wir werden an  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  erinnert und versuchen, diese Idee auf höhere Taylorpolynome auszudehnen:  $T_2\left(\frac{x}{n}\right)^n, T_3\left(\frac{x}{n}\right)^n, \dots$ . Da numerische Beispiele die sehr gute Konvergenz zeigen, untersuchen wir die Idee noch genauer:

Es sei  $F > 0$  und  $\frac{F'}{F} \leq 1$ . Definiere  $F_n(x) = \left(F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$ . Dann gilt entsprechend unseren Erwartungen

$$\frac{F'_n}{F_n}(x) = \frac{F'}{F}\left(\frac{x}{n}\right) \leq 1.$$

Sogar mehr: Falls die Wachstumsrate  $\frac{F'}{F}$  monoton fällt ( $x \geq 0$ ), was bei allen bisherigen Approximationen der Fall war, so gilt

$$\frac{F'_n}{F_n}(x) \leq \frac{F'_{n+1}}{F_{n+1}}(x), \text{ d. h. } \{F_n(x)\}_{n=1, \dots} \text{ ist eine wachsende Folge.}$$

Ich breche hier ab und hoffe, der Leser ist überzeugt, daß er keine Mühe hat, Funktionen anzugeben, deren Wachstumsrate  $\leq 1$  oder  $\geq 1$  oder sehr nahe an 1 ist.

Definition.  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ .

Satz. Diese Definition ist so gut, daß die Irrationalität von  $e$  folgt.

Beweis. Die Reihe für  $\frac{1}{e}$  ist alternierend, also

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} < \frac{1}{e} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Angenommen  $\frac{1}{e} = \frac{Z}{N}$ . Dann können  $\frac{1}{e}$  und die Approximation

$\sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$  auf den Hauptnenner  $N!$  gebracht werden:

$\frac{1}{e} - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{\text{Ganze Zahl}}{N!}$ . Wegen  $0 \neq \frac{1}{e} - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$  ist

die ganze Zahl  $\neq 0$ , also  $\frac{1}{N!} \leq \left| \frac{1}{e} - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \right|$ .

Andererseits folgt aus der alternierenden Reihe

$$\left| \frac{1}{e} - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{N!}.$$

Der Widerspruch widerlegt die Annahme  $\frac{1}{e} = \frac{Z}{N}$ .

## 7. Strategien zur numerischen Lösung von $f' = f$

Die im vorherigen Abschnitt erhaltenen Approximationen der Exponentialfunktion sind leider noch nicht gut genug, um die Transzendenz von  $e$  zu beweisen. Wir schlagen hier (in der numerischen Analysis bewährte) Plausibilitätsargumente zum Gewinnen von Näherungslösungen der Differentialgleichung vor und testen das Resultat durch Berechnen der Wachstumsrate. Praktisch üben wir dabei den Umgang mit Polynomen. Ich hoffe, daß auch dies die verbleibende Zurückhaltung gegenüber  $f' = f$  abbauen hilft.

Die älteste bekannte Näherungsmethode ist wohl Eulers Polyzugverfahren:

Das Intervall  $[0, x]$  wird in  $n$  gleiche Teile unterteilt. In jedem dieser Teilintervalle sucht man *lineare* Funktionen, die wenigstens am linken Intervallende die Eigenschaft  $l' = l$  haben. Dann setzt man diese Stücke richtig aneinander, also:

$$l(s) = 1+s \text{ für } 0 \leq s \leq \frac{x}{n}, \quad l(s) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot \left(1 + (s - \frac{x}{n})\right)$$

$$\text{in } \frac{x}{n} \leq s \leq \frac{2x}{n}$$

$$l(s) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 \cdot \left(1 + (s - \frac{2x}{n})\right) \text{ in } \frac{2x}{n} \leq s \leq \frac{3x}{n}, \text{ usw.}$$

Offenbar produzieren wir die uns schon bekannte Näherung  $(1 + \frac{x}{n})^n$  für die Lösung zu  $f' = f$ ,  $f(0) = 1$ .

Die Beschreibung des Verfahrens wird durch die vielen Teilintervalle sehr schwerfällig. Zum Schluß haben wir nur erreicht, was schon der  $F(\frac{x}{n})^n$ -Trick (Abschnitt 6) aus der linearen Approximation  $1+x$  gemacht hätte. Ich verzichte daher im folgenden auf die Erwähnung von Teilintervallen und konstruiere Näherungslösungen auf einem festen Intervall. Man soll dabei in Erinnerung behalten, daß der  $F(\frac{x}{n})^n$ -Trick gestattet, diese Näherungen jederzeit auf Teilintervalle umzurechnen und zusammenzusetzen. Es werden nur Näherungen entstehen, deren Wachstumsraten  $\geq 1$  und wachsend oder  $\leq 1$  und fallend sind, was ja nach Abschnitt 6 für den  $F(\frac{x}{n})^n$ -Trick der günstigste Fall ist. Als heuristische Idee zur Konstruktion der Näherungen greife ich die Approximation mit mehreren Tangenten, so gut es geht, wieder auf: Man kennt zwar die Werte an Stellen  $x > 0$  nicht, aber man kann von den Näherungen die Ableitungsbedingung  $P'(x_1) = P(x_1)$  an möglichst vielen Stellen  $x_1$  verlangen.

Erste Verbesserung von Eulers Verfahren: Wir suchen ein quadratisches Polynom  $P_2(s) = 1+a \cdot s+bs^2$ , das an beiden Intervallenden, also bei  $s = 0$  und bei  $s = x$  die Eigenschaft  $P_2'(0) = P_2(0)$ ,  $P_2'(x)$  hat. Wir finden  $a = 1$  und

$$P_2'(x) = 1 + 2bx = P_2(x) = 1 + x + bx^2, \text{ also}$$

$$b \cdot (2-x) = 1, P_2(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2-x}.$$

Wir berechnen  $P_2$  bei  $s = x$  und finden

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2-x} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} \text{ mit } \frac{f_2}{f_2}(x) = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} \geq 1.$$

$f_2$  ist also eine Oberfunktion, deren Wachstumsrate für  $x$  nahe 0 deutlich näher an 1 liegt als die der ersten Näherung  $1+x$ .

Für die Fortsetzung des Verfahrens bieten sich nun sehr viele Möglichkeiten an. Zunächst: Wir können für den quadratischen Ansatz die Ableitungsbedingung  $P_2'(\lambda \cdot x) = P_2(\lambda \cdot x)$ ,  $P_2'((1-\lambda) \cdot x) = P_2((1-\lambda) \cdot x)$  nicht an den Intervallenden ( $\lambda=0$ ) fordern, sondern zu festem  $\lambda$  die Koeffizienten  $a, b$  bestimmen und dann  $\lambda$  so wählen, daß die Wachstumsrate möglichst nahe an 1 ist. Das funktioniert zwar gut, führt aber nicht zu dem Transzendenzbeweis hin. (Ganz zwangsläufig drängt sich auch dieser Beweis nicht auf.) Eine andere Idee ist, ein Polynom vierten Grades zu wählen und die Koeffizienten so zu bestimmen, daß  $P''(0) = P'(0) = P(0)$  und  $P''(x) = P'(x) = P(x)$  ist. Das funktioniert gut und ist für später brauchbar, aber es führt auf dieselbe Näherung, die wir einfacher aus einer dritten Idee bekommen:

$$P(s) = 1 + s \cdot a \cdot \frac{s^2}{2} + b \cdot \frac{s^3}{6}, P_3'(s) = 1 + a \cdot s + b \cdot \frac{s^2}{2};$$

bestimme  $a$  und  $b$  so, daß  $P'(\frac{x}{2}) = P(\frac{x}{2})$ ,  $P'(x) = P(x)$  ist ( $P'(0) = P(0)$  ist im Ansatz berücksichtigt). Wir finden die linearen (!) Gleichungen für  $a, b$ :

$$\frac{x}{2} + a \cdot \frac{x^2}{8} + b \cdot \frac{x^3}{48} = a \cdot \frac{x}{2} + b \cdot \frac{x^2}{8} \text{ oder}$$

$$1 = a \cdot (1 - \frac{x}{4}) + b \cdot (\frac{x}{4} - \frac{x^2}{24}),$$

$$x + a \cdot \frac{x^2}{2} + b \cdot \frac{x^3}{6} = a \cdot x + b \cdot \frac{x^2}{2} \text{ oder}$$

$$1 = a \cdot (1 - \frac{x}{2}) + b \cdot (\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}).$$

Durch Subtrahieren und anschließendes Einsetzen also schließlich

$$a = b \cdot (1 - \frac{x}{2}), \quad 1 = b \cdot (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}).$$

Mit diesen Werten für  $a, b$  berechnen wir  $P$  bei  $s = x$  und finden:

$$f_3(x) = 1 + \frac{x}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}}$$

$$\frac{f_3'}{f_3}(x) = 1 - \frac{x^4}{144} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{144}} \leq 1.$$

$f_3$  ist also wieder Unterfunktion, deren Wachstumsrate für kleine  $x$  noch wesentlich näher an 1 ist als die von  $f_2$ . Auch das vierte Taylorpolynom wird übertroffen:

$$\frac{T_4'}{T_4}(x) = 1 - \frac{x^4}{24} \frac{1}{T_4(x)}. \text{ Entsprechend ist}$$

$$f_3(1) = 2 \frac{5}{7} \approx 2.714 \text{ trotz kleinerem Nenner genauer als}$$

$$T_4(1) = 2 \frac{17}{24} \approx 2.708.$$

Ich fasse zusammen: Die von der Kreis- und sin-Approximation übernommene Idee der Approximation durch Berührung an mehreren Stellen erweist sich als gute Strategie zum Auffinden ausgezeichneter Näherungslösungen der Differentialgleichung  $f' = f$ . Natürlich ist ein gutes Plausibilitätsargument kein Beweis, aber der multiplikative Schrankensatz *bestätigt* mühe-los, was wir mit dem Ansatz erhofften. Ich glaube, es ist überflüssig, einen weiteren Beispielschritt vorzuführen. Statt dessen will ich nur noch erwähnen, daß die erhaltenen Näherungen die ersten Schritte der Kettenbruchentwicklung der Exponentialfunktion sind

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1 - x + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7}}}}$$

Endliche Kettenbrüche kann man auf dem Taschenrechner mit der Divisionstaste so schnell auswerten wie Polynome nach dem Horner Schema mit der Multiplikationstaste. Kettenbrüche werden in der Zahlentheorie zur Gewinnung optimaler Approximationen durch rationale Zahlen benutzt. Bricht man den Kettenbruch ab und bringt alles auf einen Hauptnenner, so erhält man optimale rationale Approximationen aus der numerischen Mathematik. Die Ansätze waren also wirklich gut. Ausdividieren der Potenzreihen  $e^x/e^{-x}$  liefert den Kettenbruch.

### 8. Transzendenz von $e$

Definition. Eine Zahl  $z \neq 0$  heißt algebraisch, falls es ganze Zahlen  $0 \neq a_0, a_1, \dots, a_m$  gibt, so daß gilt

$$\sum_{k=0}^m a_k z^k = 0.$$

Alle übrigen reellen Zahlen  $\neq 0$  heißen transzendent.

Beweisstrategie. Setzt man  $\sum_{k=0}^m a_k \cdot e^k = 0$ ,  $a_k \in \mathbb{Z}$  voraus, so muß man aus  $a_0 \neq 0$  einen Widerspruch folgern. Dies geschieht, indem man Approximationen  $\frac{M_k}{M_0}$  für  $e^k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) sucht mit der Eigenschaft:

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M_0} \text{ und } \sum_{k=1}^m |a_k \cdot \varepsilon_k| \leq \frac{1}{2}.$$
 Beweismittel ist hier der Monotoniesatz. In der Gleichheit  $\sum_{k=0}^m a_k M_k = - \sum_{k=1}^m a_k \varepsilon_k$  steht dann links eine ganze Zahl rechts eine Zahl vom Betrag  $\leq \frac{1}{2}$ . Falls  $a_0 \neq 0$  ist, kann man mit Hilfe der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung ein  $p$  finden, das die ganze Zahl  $\sum_{k=0}^m a_k M_k$  nicht teilt, so daß diese ganze Zahl  $\neq 0$  sein muß - der gesuchte Widerspruch.

Die aufgezählten Beweisschritte werden sich als einfach erweisen. Kernstück ist, eine geeignete Approximation für  $e^x$  zu "raten". Ich hoffe nun, daß der Ratevorgang durch den

Abschnitt über numerische Lösung von  $f' = f$  plausibel gemacht wird.

Hat man irgendein Polynom  $f$  vom Grad  $N$  und bildet damit - motiviert durch die Differentialgleichung -

$$F(x) := \sum_{j=0}^N f^{(j)}(x),$$

so folgt  $F'(x) = F(x) - f(x)$ . Immer dann, wenn  $f(x)$  sehr viel kleiner als  $F(x)$  ist, wird man erwarten, daß  $\frac{F(x)}{F(0)}$  eine gute Approximation von  $e^x$  ist. Die eigentliche Abschätzung folgt unmittelbar aus dem Schrankensatz:

$$\left( \frac{F(x)}{F(0) \cdot e^x} - 1 \right)' = \frac{-f(x)}{F(0) \cdot e^x}, \text{ also}$$

$$\left| \frac{F(x)}{F(0)} \cdot \frac{1}{e^x} - 1 \right| \leq \frac{\max_{x \in [0, m]} |f|}{|F(0)|} \cdot \int_0^x e^{-t} dt \leq \frac{\max_{x \in [0, m]} |f|}{|F(0)|}.$$

Nach diesem formalen Ansatz bleibt immer noch das Problem,  $f$  geeignet zu raten, wobei sich  $F$  als Polynom mit *ganzen* Koeffizienten ergeben soll, damit man später Nenner durch  $F(0)$  kontrollieren kann.

Man beachte nun, daß  $F$  die Differentialgleichung der Exponentialfunktion an all den Stellen  $x$  erfüllt, an denen  $f(x) = 0$  ist! Die Erfolge des numerischen Abschnitts lassen daher

$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-m)$$

als aussichtsreich erscheinen. Das Polynom  $F$  hat dann den Grad  $(m+1)$ , so daß seine Koeffizienten durch den Wert  $F(0)$  und die  $(m+1)$  linearen Gleichungen  $F'(0) = F(0)$ ,  $F'(1) = F(1)$ , ...,  $F'(m) = F(m)$  als bestimmt anzusehen sind. (Ich brauche nicht zu prüfen, ob das Gleichungssystem wirklich eindeutig lösbar ist, da ich ja nur den Ansatz als aussichtsreich hinstellen will.)

Im numerischen Abschnitt konnte die Approximation mit Hilfe weiterer Zwischenstellen verbessert werden, falls das nötig war. Die Kontrolle der Polynomkoeffizienten hat sich als übersichtlicher erwiesen, wenn man nicht Polynome  $f$  mit weiteren Nullstellen benutzt, sondern an den ganzen Stellen  $0, 1, \dots, m$  Nullstellen höherer Ordnung, was wir ja auch schon kennen. Das führt zu dem Ansatz

$$f(x) = x^p \cdot (x-1)^p \cdot (x-2)^p \cdot \dots \cdot (x-m)^p, \text{ } p \text{ groß.}$$

Nun gilt an den ganzen Stellen  $x = 0, 1, \dots, m$  und für  $j < p$ :

$$f^{(j)}(k) = 0, \text{ also}$$

$$F^{(j)}(k) = F(k), \text{ } k = 0, 1, \dots, m \text{ und } j = 1, 2, \dots, p.$$

Man kann also erwarten, daß große  $p$  zu besseren Approximationen führen. Hierauf beruht die Kontrolle über die Nenner der Approximation: In der Summe (in der die  $f^{(j)}$  nach der Produktregel differenziert zu denken sind)

$$\sum_{j=0}^N f^{(j)}(k) \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

sind nur solche Summanden von Null verschieden, in denen der Faktor  $(x-k)^p$  von  $f$  genau  $p$ -mal differenziert wurde! Daraus folgt

$$p! \text{ ist Teiler von } F(k), \text{ } k = 0, 1, \dots, m.$$

Setze vorläufig  $M_k := \frac{F(k)}{p!}$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ), dann ergibt unsere Schrankensatzabschätzung:

$$\left| \frac{M_k}{M_0} - e^k \right| \leq \frac{\max_{x \in [0, m]} |f| \cdot e^k}{M_0 \cdot p!} \text{ und } \max |f| \leq (m!)^p.$$

Damit ist  $\varepsilon_k(p) \leq \frac{m!^p \cdot e^m}{p!}$  in der Tat beliebig klein zu machen dadurch, daß  $p$  genügend groß gewählt wird. (Zur Erinnerung:  $m$  ist eine feste Zahl, die von der Annahme

$\sum_{k=0}^m a_k e^k = 0$  herkommt,  $p$  kann in der Definition von  $f$  frei gewählt werden.) Jetzt sind alle in der Beweisstrategie aufgezählten Punkte erfüllt bis auf einen: Wir können nicht zeigen, daß die ganze Zahl  $\sum_{k=0}^m a_k M_k$  ungleich Null ist!

Dazu bedarf es nur noch einer kleinen Modifikation. Es sei von jetzt an  $p$  immer eine Primzahl  $> a_0$ ; wir setzen endgültig

$$f(x) = x^{p-1} \cdot (x-1)^p \cdot \dots \cdot (x-m)^p.$$

Dann gilt wie eben:  $p!$  ist Teiler von  $F(k)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , aber nur:  $(p-1)!$  ist Teiler von  $F(0)$  und  $p$  ist *nicht* Teiler von  $F(0)$ , da  $F(0)$  genau einen Summanden enthält, der *nicht* durch  $p$  teilbar ist. Wir setzen nun endgültig:

$$M_k = \frac{F(k)}{(p-1)!}, \quad k = 0, \dots, m;$$

dann sind die  $M_k$  ganz und  $p \nmid M_0$ ,  $p \mid M_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Infolgedessen gilt jetzt wegen  $0 \neq a_0 < p$  und der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung (!):  $p \nmid a_0 \cdot M_0$ ,  $p \mid a_k \cdot M_k$ , also  $p \nmid \sum_{k=0}^m a_k M_k$  und daher  $\sum_{k=0}^m a_k M_k \neq 0!$  Die Abschätzung bleibt fast dieselbe:

$$\left| \frac{M_k}{M_0} - e^k \right| \leq \frac{m!^p \cdot e^m}{M_0 \cdot (p-1)!}, \quad \text{also } \varepsilon_k \leq \frac{m!^p \cdot e^m}{(p-1)!}.$$

Damit gilt  $\lim_{p \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$ , und  $p$  kann so gewählt werden, daß  $\sum |a_k \varepsilon_k| \leq \frac{1}{2}$ . Damit ist der Beweis beendet.

Ich hoffe, Leser, die bis hierher gekommen sind, davon überzeugt zu haben, daß der Schrankensatz vielseitig, schlagkräftig, ersatzlos, also wichtig ist.

### Anhang: Beweis des Monotoniesatzes

In der Hochschulliteratur dominiert, wie schon gesagt, der Mittelwertsatz. Aus ihm folgt natürlich der Monotoniesatz. Der Mittelwertsatz wird auf den Maximumsatz für stetige Funktionen zurückgeführt; dieser beruht wesentlich auf der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  und wird doppelt indirekt bewiesen. An einer kürzeren Argumentationskette besteht daher Interesse. Ich habe in [K] einen direkten Beweis des Schrankensatzes gegeben, der die Vollständigkeit nicht benutzt, aber eine zusätzliche Voraussetzung macht: Im interessierenden Intervall soll die Differenz zwischen  $f$  und seinen Tangenten unabhängig von den Tangenten abgeschätzt werden können. (Damit wird stillschweigend eine beschränkte zweite Ableitung vorausgesetzt.)

Den folgenden kurzen Beweis des Monotoniesatzes verdanke ich Manfred Toussaint (vgl. [B-H]). Er ist interessant, weil zunächst in einem direkten Beweis, der die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  benutzt, eine Aussage bewiesen wird, die aus Voraussetzungen über  $f$  auf Eigenschaften von  $f'$  schließt. Danach muß nicht mehr indirekt "argumentiert" werden, der Monotoniesatz ergibt sich unmittelbar durch Kontraposition.

Behauptung. Aus  $0 \leq f(b) - f(a)$  folgt:

Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $0 \leq f'(\xi)$ .

Kontraposition. Für kein  $\xi \in [a, b]$  gelte  $0 \leq f'(\xi)$ ; dann ist  $0 \leq f(b) - f(a)$  unmöglich. Mit anderen Worten: Aus  $f' < 0$  folgt  $f(b) - f(a) < 0$ .

Beweis. Wegen  $0 \leq (f(b) - f(\frac{a+b}{2})) + (f(\frac{a+b}{2}) - f(a))$  ist die erste oder die zweite Differenz  $\geq 0$ . Im ersten Fall setze  $b_1 = b$ ,  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ; im zweiten Fall setze  $a_1 = a$ ,  $b_1 = \frac{a+b}{2}$ . Dieser Schluß wird iteriert. So gewinnt man eine Intervallschachtelung  $[a_1, b_1]$  mit  $0 \leq f(b_1) - f(a_1)$  und dem Grenzwert  $\xi \in [a, b]$ .

Dann ist  $f'(\xi) = \lim_{b_1 - a_1} \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} \geq 0$ .

Dieser Beweis läßt sich nicht zu einem Beweis des Mittelwertsatzes modifizieren.

#### Literatur

- [1] BÄR, I., HESFORD P., u. a.: Differenzierbare Funktionen, Monotonie, Schrankensatz. Diff-Studienbrief MAZ, Tübingen 1980.
- [2] COERS, H.: Lokales Ordnen um den sogenannten Schrankensatz der Differentialrechnung. MU 15: 83-93, 1969.
- [3] DRINFELD, G.I.: Quadratur des Kreises und Transzendenz von  $\pi$ .
- [4] FÜHRER, L.: Die Kreisberechnung als Brennspiegel der Schulmathematik. PM, Hefte 10: 289-298; 11: 323-337, 1982.
- [5] KARCHER, H.: Erläuterungen zur Analysis. DdM 3: 169-187, 1976.
- [6] SPIVAK, M.: Calculus. Benjamin 1967.
- [7] VON DEN STEINEN, J.: Problemorientierte Zugänge zu quadratischen Funktionen (insbesondere Abschnitt 4: Der Inhalt der Parabelflächen). Mathematiklehrer Heft 2: 25-31, 1983.
- [8] STUCKE, R.: Ein fruchtbarer Satz der Differentialrechnung. ZfMNU 64: 116-120, 1933.

Eingegangen: 26.06.1984