

## Anfänge der Geometrie bis zum Strahlensatz, Schritt für Schritt logisch argumentierend.

Auch mit diesem Text wende ich mich gegen das Verschwinden logischer Argumente aus dem Mathematikunterricht. Die Geometrie spricht die Menschen auf vielen Ebenen an, von der Ästhetik schöner Figuren bis zur Haptik beim Falten und Zeichnen. Sie war ein schönes Gebiet, um Jugendlichen Logik nahe zu bringen, und ich hoffe, dass es auch wieder dazu kommen kann. Es ist in der Geometrie schwieriger als in den mit Zahlen befassten Gebieten, genau zu sagen, was man als Voraussetzung eines Argumentes benutzen darf. Ich bringe zunächst Beispiele, *wie man in den einfacheren Situationen Voraussetzungen deutlich formulieren kann.*

Zur Definition von Primzahlen ist nur nötig, multiplizieren zu können. Kenntnis der Multiplikation erlaubt zu argumentieren: *Die Zahlen  $a$  und  $b$  sind **nicht** Teiler der Zahl  $a \cdot b + 1$ .* Damit ist man schon nahe an Euklids Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Euklid hatte formuliert: Zu **jeder** endlichen Menge von Primzahlen kann man weitere finden - und zwar ohne indirekten Beweis, ganz konkret. Betrachte z.B. zu drei Primzahlen  $p_1, p_2, p_3$  die Primzahlzerlegung von  $n := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \pm 1$ , in dieser kann keine der gegebenen Primzahlen vorkommen,  $n$  ist also entweder Primzahl oder Produkt von neuen Primzahlen. (Ein indirekter Beweis wird erst nötig, wenn man statt der griechischen Formulierung einen Satz mit "unendlich viele" haben möchte.)

Oder, ein wichtiges Ausbildungsziel ist, ein gutes Verständnis unseres Stellenwertsystems für Zahldarstellungen zu vermitteln. Das wird durch die schriftliche Multiplikation unterstützt:  $23 \cdot 45$  bedeutet  $(2 \cdot 10 + 3) \cdot (4 \cdot 10 + 5)$ . Diese Rechnung zu üben, bereitet für die Zukunft die wichtige Klammerregel  $(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$  für die Algebra vor. Zur Ausführung braucht man vier einstellige Multiplikationen, man sieht also auch rückblickend, warum man das kleine  $1 \times 1$  auswendig können sollte - denn andernfalls verschwendet man so viel Zeit mit dem Nachschauen dieser Produkte, dass keine Aufmerksamkeit für die *Bedeutung der Position der Ziffern* bleibt.

Selbst die Voraussetzungen für die Analysis sind leichter explizit aufzählbar als die Voraussetzungen für die Geometrie. Man benötigt mindestens eine Vorstufe des Funktionsbegriffs, etwa mit Vokabeln wie Definitionsbereich und Wertebereich und zur Veranschaulichung Funktionsgraphen. Variable sollten im Zusammenhang mit linearen und quadratischen Gleichungen vorgekommen sein. Schwierigkeiten beim Ausmultiplizieren von Klammern sollten überwunden sein. Soweit ist das wohl nicht kontrovers. Aber, anders als man beim Anblick heutiger Schulbücher denken könnte: *Analysis ohne Ungleichungen gibt es nicht.* Zum Umgang mit Ungleichungen gehört begrifflich nicht viel: Positive rationale Zahlen heißen "größer Null",  $r > 0$ , negative rationale Zahlen heißen "kleiner Null",  $r < 0$ .

Danach folgt die Definition für "a ist kleiner als b", also für  $a < b$  :

$$a < b \Leftrightarrow 0 < b - a.$$

Um damit zu arbeiten, muss man wissen:

Summen und Produkte positiver Zahlen sind positiv.

Mit diesen Kenntnissen argumentiert man weiter, z.B.

$$a < b \text{ und } c < d \text{ impliziert } a + c < b + d,$$

$$\text{bis hin zur Dreiecksungleichung } |a \pm b| \leq |a| \pm |b|.$$

Mehr Begriffe muss man nicht voraussetzen, um mit Analysisargumenten zu beginnen.

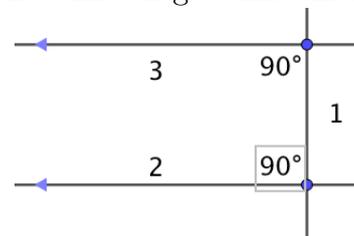
## Nun zur Geometrie.

Während Kinder von allein mit Zahlen Kontakt bekommen - so dass klar sein wird, was mit den eben als "Anfänge" formulierten Beispielen gemeint ist - scheinen mir die **Anfänge der Geometrie** mehr Erklärung zu benötigen. Es gibt so viele Beziehungen in der Geometrie und deutlich mehr Objekte als nur Zahlen, so dass ich wohl keinen Weg durch die Geometrie formulieren kann, dem alle zustimmen können. Ich finde, dass Spielen mit Bauklötzen, Falten von Papier und Flechten von Zöpfen wichtige Erfahrungen bieten. Insbesondere das Falten von Papier kann in der Schule aufgegriffen werden. Die Faltlinien sind Beispiele für Geraden. Zusammen mit Farbkleckschen zeigen sie, dass zu jeder Geraden eine Achsensymmetrie gehört. Wer kompliziertere Figuren falten möchte, lernt schnell, wie zu einander senkrechte Geraden gefaltet werden können. Diese haptischen Erfahrungen können in der Schule mit Bleistift, Lineal, Geodreieck und Zirkel fortgesetzt werden. Ich werde das im Folgenden so zitieren: *Die beim Falten gesammelten Erfahrungen können beim Argumentieren benutzt werden.* Ich kann verstehen, dass das nicht für jeden explizit genug ist. Aber deutlich expliziter waren auch die Schulbücher nie, weder jetzt noch in der Vergangenheit. Daher sind die so weit formulierten Voraussetzungen wohl konsensfähig.

Nun zu meinem Problem, das in meinem Text "Aus Schulbüchern - wirklich!" beschrieben wird. In einer vom Ministerium genehmigten Schulbuchserie wird der Satz von der Winkelsumme im Dreieck - nicht etwa als Motivation, sondern ohne nachfolgenden Beweis - so "behandelt": *Von aus Papier ausgeschnittenen Dreiecken sollen die Ecken abgerissen und diese Winkel aneinander gelegt werden. Daran sieht man, dass die Winkelsumme  $180^\circ$  ist.* Da ich mich auch vier Jahre später von dieser Entdeckung nicht erholt habe, muss ich zunächst etwas zum **Parallelenaxiom** schreiben, ehe ich ab Seite 7 zu auf der Schule behandelbarer Geometrie komme - mit zwei Beweisen der Winkelsumme direkt aus dem Parallelenaxiom. Dabei muss ich mich mit dem "Argument": *Wie soll es denn sonst sein?* auseinandersetzen, das zwar im täglichen Leben sehr erfolgreich, in der Mathematik jedoch wertlos ist. *Wie Geraden in riesiger Entfernung sich anders als nach dem Parallelenaxiom verhalten könnten*, ist leider komplizierter als das, was ich zur Schulgeometrie sagen werde.

Ob es Parallelen gibt oder nicht gibt und, wenn ja, wie viele, das entscheidet sich nicht auf einem Stück Zeichenpapier sondern erst in sehr großer Entfernung. Die Astronomie lehrt, dass der die Erde umgebende Kosmos kein dreidimensionaler Euklidischer Raum ist, sondern sehr viel komplizierter. Auch experimentell gibt es Probleme: Sehr lange Geraden *zeichnen* können wir ohnehin nicht und die berühmten Laser"strahlen" sind keine Strahlen sondern Lichtbündel, die vom Fokus des Lasers aus immer breiter werden. Ein technisch aufwendiger Laserstrahl ist auf dem Mond schon etwa 1 m dick. An eine experimentelle Bestätigung des Parallelenaxioms ist daher nicht zu denken, auch wenn wir gewohnt sind, wie in der Abbildung zu zeichnen oder zu falten: Geraden 2 und 3 senkrecht zu Gerade 1. Auch theoretisch müssen wir uns nicht an die Physik halten, wir könnten doch fragen:

*Kann uns die Mathematik nicht eine so einfache Situation zur Verfügung stellen, dass die Geraden 2 und 3 wirklich "parallel" sind?*



Doch, das kann die Mathematik, aber **nur** durch Formulierung des Parallelenaxioms. Dazu muss ich mich dem "wie es sonst mit dem Verhalten der Geraden sein könnte" zuwenden.

Es wird oft zitiert, dass Gauß schon Anfang des 19. Jahrhunderts erwogen hat, ob der die Erde umgebende Raum “nicht-euklidisch” sein könnte und ob er das bei seiner Landvermessung an der Winkelsumme seiner größten Dreiecke erkennen könnte. Was hat Gauß hier mit “nicht-euklidisch” gemeint?

Ich erkläre zunächst, wie sehr die Geometrie auf der Erdoberfläche, die sogenannte **Sphärische Geometrie**, der Euklidischen Geometrie ähnelt. Den “Geraden” entsprechen die sogenannten Großkreise - das sind ebene Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel. Die Kugel ist symmetrisch zu solchen Ebenen, die Großkreise sind daher Symmetrielinien der Kugelfläche, genauer: Fixpunkt mengen von Spiegelsymmetrien - wie die Geraden in der Ebene! Außerdem sind Großkreisbögen, die kürzer als ein halber Umfang sind, *kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte* - wie die Strecken in der Ebene. Mit diesen “spärlichen Geraden” kann man Dreiecksgeometrie ganz ähnlich wie in der Ebene machen. Nur, für sphärische Dreiecke gilt nicht, dass die Winkelsumme  $180^\circ$  ist.

Solch eine *sphärische Geometrie* konnte Gauß sich auch *dreidimensional* vorstellen - und auch als Umgebung der Erdkugel. Daher hat ihn die Winkelsumme seiner größten Dreiecke interessiert. Die in der Abbildung mit 1, 2, 3 nummerierten Geraden sind auf der Erdoberfläche z.B. der Äquator und zwei dazu senkrechte Meridiane. Diese scheinen durchaus parallel loszulaufen, aber nach 10000 km schneiden sie sich trotzdem am Nordpol. Ich fasse zusammen:

*Die Existenz von Parallelen ist kein experimentelles Ergebnis. Für die zu behandelnde Euklidische Geometrie ist das **Parallelenaxiom** wesentliche Grundlage. Von ihm abhängende Eigenschaften, wie die Winkelsumme im Dreieck oder der Strahlensatz, sind ebenfalls keine experimentellen Ergebnisse, sondern müssen mit Hilfe des Parallelenaxioms bewiesen werden.*

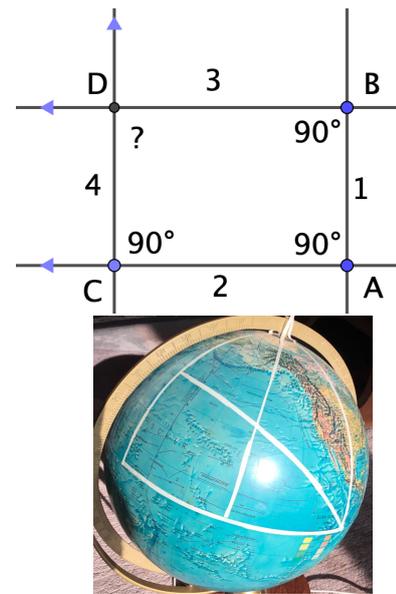
*Was man z.B. beim Falten begreifen kann, gilt in der Euklidischen und in den nicht-euklidischen Geometrien. Es hängt nicht vom quantitativen Ausgang von Experimenten ab. Deshalb können Falterfahrungen die Voraussetzungen zur Verfügung stellen, die man dann bei logischen Argumenten - etwa zusammen mit dem Parallelenaxiom - benutzen darf.*

Sicherheitshalber formuliere ich auch hier: Wenn man den Mathematikunterricht nicht mehr benutzen will, um *logisches Schließen* zu lehren und zu üben, dann kann man ihn außerordentlich weit zusammenstreichen. Zum Beispiel finde ich es trostlos lächerlich, wenn die Schnittpunktsätze am Dreieck ohne jedes begründende Argument auf einer Seite als tabellarische Faktensammlung mitgeteilt werden (aus Schulbüchern, wirklich!).

Diese den experimentellen Umgang mit Parallelen problematisierenden Bemerkungen machen natürlich das Unterrichten der Euklidischen Geometrie nicht schwieriger, sie geben nur dem Zitieren des Parallelenaxioms mehr Gewicht. Zum Abschluss dieser Diskussion noch ein weiteres Faltextperiment (das man auch zeichnen kann). Ich finde das Falten besonders überzeugend, weil sich die geraden Linien von alleine so schön “gerade” bilden.

## Falten von Rechtecken

Die Faltnlinien 1, 2, 3, 4 werden in dieser Reihenfolge gefaltet, so dass die drei bezeichneten  $90^\circ$  Winkel *nach Konstruktion* entstehen. Der mit “?” bezeichnete Winkel sieht wie  $90^\circ$  aus, ist aber nur in der Euklidischen Geometrie genau  $90^\circ$ . Der Globus ist ein Bild einer “sphärischen” Ebene. Einen derart gekrümmten dreidimensionalen Raum können wir uns nicht vorstellen, aber in einem solchen Raum würde das gefaltete Viereck wie auf dem Globus aussehen, der vierte Winkel wäre  $> 90^\circ$ . Die Abweichung des vierten Winkels von  $90^\circ$  ist ein quantitatives Maß für den Unterschied zwischen der Euklidischen Geometrie und der Geometrie des Raumes, in dem das Fallexperiment gemacht wurde. Da nicht einmal Gauß einen Unterschied beobachten konnte, ist die Euklidische Geometrie ein gutes *Modell* für den uns umgebenden Raum.



Gauß hat sich für die Winkelsumme seiner *größten* Dreiecke interessiert, weil die Unterschiede zwischen verschiedenen möglichen Geometrien um so leichter zu erkennen sind, je größer die benutzten Figuren sind.

Und noch eine Abschweifung aus der Mathematikgeschichte. Euklids Parallelenaxiom hat 2000 Jahre lang immer wieder Mathematiker zu Beweisversuchen verleitet. Das führte zu Beginn des 19. Jahrhunderts zur Entdeckung der *hyperbolischen Geometrie* durch Bolyai und Lobatschewski. Die beschriebenen Fallexperimente können auch in der hyperbolischen Geometrie durchgeführt werden. Der Versuch, ein Rechteck zu falten, führt zu einem Viereck mit drei rechten Winkeln und einem Winkel  $< 90^\circ$ . Die weitere Folge davon ist, dass es durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden  $g$  *mehr als eine*  $g$  nicht schneidende Gerade gibt! Daran sieht man, warum das **Euklidische Parallelenaxiom** heißen muss:

Zu jedem Punkt  $P$  außerhalb einer Geraden  $g$  gibt es **genau eine**  $g$  nicht schneidende Gerade durch  $P$ . Diese Gerade heißt **Parallele** zu  $g$ .

Dies Axiom hat dann zur Folge, dass das beschriebene Falzmanöver wirklich zu Rechtecken führt (Beweis S.8). Mit lauter gleichen dieser Rechtecke können wir die Euklidische Ebene pflastern, und zwar mit so kleinen Rechtecken, wie wir wollen. Das Rechteck ist die einfachste Figur, die eng mit dem Parallelenaxiom verbunden ist. Man kann sowohl Sphären wie hyperbolische Ebenen mit relativ großen kongruenten Dreiecken pflastern, aber man kann diese Pflasterungen nicht verfeinern zu Pflasterungen mit beliebig kleinen *kongruenten* Dreiecken. In allen drei Geometrien kann ein Dreieck durch die Verbindungen seiner Seitenmitten in vier *kleinere* Dreiecke zerlegt werden, aber nur in der Euklidischen Geometrie sind diese vier Teildreiecke kongruent. Wie schon oben gesagt: Solche Unterschiede sind um so leichter zu erkennen, je größer die Dreiecke sind, und umgekehrt: Je kleiner die Figuren sind, um so weniger weichen sie von Euklidischen Figuren ab.

Und in der Malerei wurde noch ein weiteres im Unendlichen mögliches Verhalten entdeckt:

## Die Malerei entdeckt die Perspektive und die Projektive Ebene

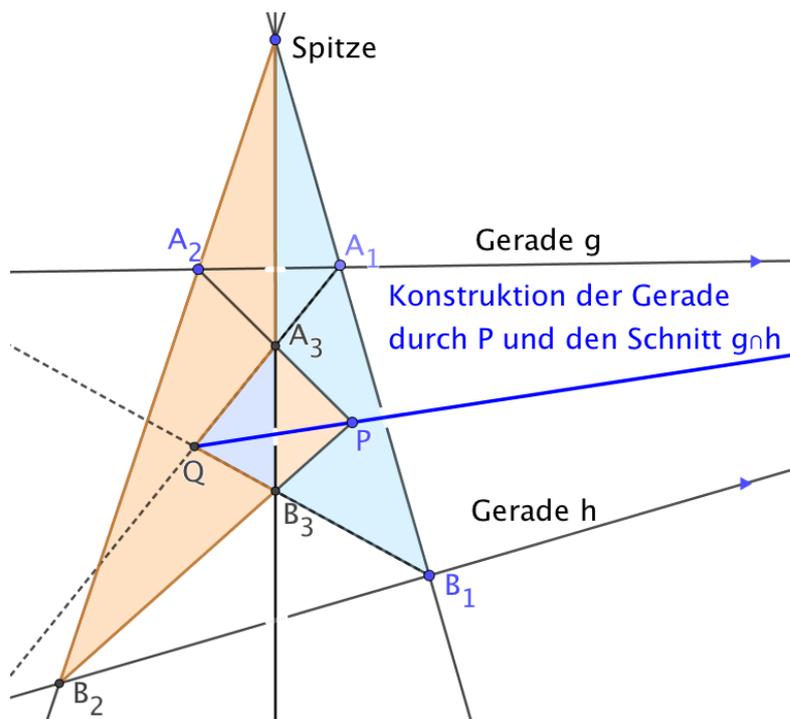
Die Sache beginnt mit einer harmlos klingenden, praktischen Frage: *Gegeben zwei Geraden  $g, h$ , die sich auf dem viel zu kleinen Zeichenpapier **nicht** schneiden. Wie zeichnet man eine Gerade durch einen Punkt  $P$  und den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ , der ja außerhalb des Papiers liegt?*

Die Idee ist, dass man sich  $P$  über der Zeichenebene vorstellt und die Schnittgerade (blau) der Ebenen  $\text{span}(P, g)$  und  $\text{span}(P, h)$  konstruiert und mit der Zeichenebene schneidet, natürlich im Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Dazu braucht man den Hilfskeil, der durch drei Geraden durch die "Spitze" definiert ist und vom Zeichner gewählt wird. Im Einzelnen:

Konstruktionsbeschreibung der nach Desargues benannten Figur:

Man wählt eine Spitze und zwei Geraden durch sie, die  $g$  in  $A_1, A_2$  schneiden und  $h$  in  $B_1, B_2$ . Der Punkt  $P$  wird mit  $A_2$  und  $B_2$  verbunden. Schneide diese Strecken mit einer dritten Gerade durch die Spitze in  $A_3, B_3$ . Der Punkt  $Q$  ist Schnittpunkt der Geraden  $A_1A_3$  und  $B_1B_3$ . Die Gerade durch  $Q$  und  $P$  geht durch den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ !!

Diese Behauptung folgt aus einer räumlichen Interpretation der gezeichneten Figur. Man stelle sich die beiden Geraden  $B_1A_1$  und  $B_2A_2$  zusammen mit der



Spitze in der Zeichenebene vor. Die Gerade  $A_3B_3$  steigt von der Spitze her an. Die drei Geraden durch die Spitze beranden also einen Keil, einen dreiseitigen Kegel. Die Geraden  $A_1A_3$  und  $B_1B_3$  liegen in der rechten Keilebene (blau) und schneiden sich in  $Q$ . Die Geraden  $A_2A_3$  und  $B_2B_3$  liegen in der linken Keilebene (rot) und schneiden sich in  $P$ . Die Gerade durch  $Q$  und  $P$  ist also die Schnittgerade der Ebenen  $A_1A_2A_3 = \text{span}(P, g)$  und  $B_1B_2B_3 = \text{span}(P, h)$ . Diese beiden Ebenen und die Zeichenebene schneiden sich im Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ , durch den daher auch die Gerade  $QP$  gehen muss.

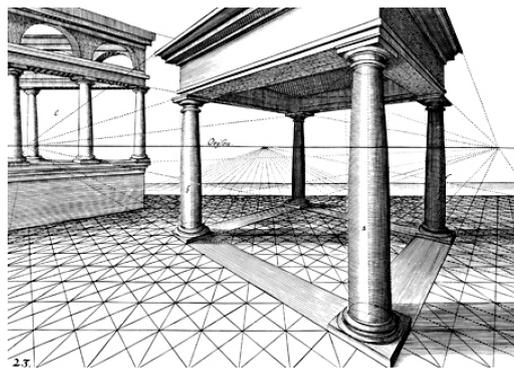
Die Figur besteht also eigentlich nur aus zwei Keilen, dem schon beschriebenen Hilfskeil und dem Keil der von  $g, h$  und der gesuchten Gerade (blau) berandet wird. Beide Keile liegen mit einer Seitenfläche auf der Zeichenebene.

Überraschend wird das erst, wenn man beobachtet, dass diese Konstruktion auch funktioniert, wenn  $g$  und  $h$  in der Euklidischen Ebene **parallel** sind. Mit anderen Worten: Dieser Zeichentrick fügt der Euklidischen Ebene "Schnittpunkte" paralleler Geraden als sogenannte "Fernpunkte" hinzu. Und Bilder dieser Fernpunkte waren in der perspektiven Malerei

schon aufgetreten, als *Fluchtpunkte* der Bilder solcher paralleler Geraden, die nicht parallel zur Zeichenebene sind, siehe nebenstehende Abbildung. Dass man die abstrakten Fernpunkte in perspektiven Bildern sichtbar machen konnte, hat sehr zu ihrer Akzeptanz beigetragen. Die um die Fernpunkte erweiterte Euklidische Ebene heißt

**“Projektive Ebene”.**

Sie hat offenbar viel mit der Euklidischen Ebene gemein, aber *zwei drastische Unterschiede*:



- 1.) Statt des Parallelenaxioms gilt: Je zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- 2.) Eine Gerade in der Projektiven Ebene zerlegt die Ebene **nicht** in zwei Hälften.

*Gemeinsame Eigenschaften* sind: Je zwei Punkte können durch eine Gerade verbunden werden. Zu jeder Geraden gehört eine (Achsen-)Spiegelung. Zu jedem Punkt gehört eine Punktspiegelung. Zu je zwei Punkten gibt es eine Mittelsenkrechte. – Diese gemeinsamen Eigenschaften finden wir auch in der Sphärischen und in der Hyperbolischen Geometrie und es gilt dort auch wie im Euklidischen, dass jede Gerade ihre Ebene in zwei Teile zerlegt. Weil die Projektive Geometrie mit der Sphärischen Geometrie noch enger verwandt ist als mit der Euklidischen, hebe ich hervor, dass nur die Geraden der Sphärischen Geometrie sich in **zwei** Punkten schneiden.

Dass die Projektive Ebene durch ihre Geraden nicht in zwei Hälften zerlegt wird, muss noch an der Desargues Figur erklärt werden, z.B.:

*Wie kommt man von P nach Q, ohne die Gerade  $A_3B_3$  zu treffen?*

Man muss nur auf der Geraden  $QP$  (blau) von  $P$  aus nach rechts (in Richtung Fernpunkt) loslaufen. Nach Passieren des Fernpunktes kommt man schließlich von links wieder auf dem Zeichenblatt an und erreicht  $Q$ , ohne die Gerade  $A_3B_3$  getroffen zu haben.

**Was haben die letzten drei Seiten mit der Schule zu tun?**

Die Euklidische Ebene, die wir auf der Schule besprechen, die Sphärische Geometrie der Kugel, auf der wir leben, die Projektive Geometrie, die die Malerei populär gemacht hat und die hier nur zitierte Hyperbolische Ebene sind Ebenen in entsprechenden dreidimensionalen Geometrien.

*In allen vier Fällen können die Fallexperimente mit Papier in gleicher Weise durchgeführt werden!*

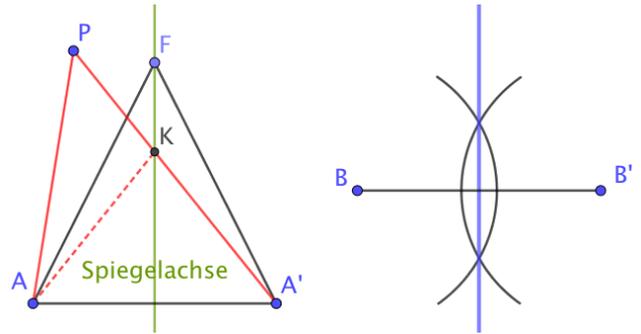
Ob die Parallelenkonstruktion auf S.2 wirklich zu Parallelen führt oder nur beinahe, kann erst in sehr großer Entfernung, eventuell erst im Unendlichen, entschieden werden. Von unseren Papierexperimenten aus betrachtet sind alle beschriebenen Fälle möglich.

*Durch Formulierung des Parallelenaxioms wählen wir die Euklidische Geometrie.*

Und deren Aufbau beginnt auf den nächsten Seiten.

## Erstes geometrisches Argument: Charakterisierung der Mittelsenkrechten.

Wenn wir um die (grüne) Spiegelachse falten, kommt jeder Punkt  $A$  auf seinen Spiegelpunkt  $A'$  zu liegen. Die Strecke  $AA'$  ist senkrecht zur Spiegelachse. Für jeden Punkt  $F$  auf der Spiegelachse sind die Strecken  $FA$  und  $FA'$  gleich lang, weil sie beim Falten aufeinander fallen. Der Punkt  $P$  liegt auf derselben Seite der Spiegelachse wie  $A$ . Die Strecke  $PKA'$  ist ebenso lang wie der bei  $K$  geknickte Streckenzug  $PKA$ . Die direkte Verbindung  $PA$  ist **kürzer als der Umweg  $PKA$**  - das wird in Zukunft als **Dreiecksungleichung** zitiert.



Es folgt: Die Punkte  $P$  auf derselben Seite wie  $A$  liegen *näher bei  $A$  als bei  $A'$* . Also:

*Die **Mittelsenkrechte** zu zwei Punkten  $A, A'$  besteht **genau** aus den Punkten, die von  $A$  und  $A'$  **gleich weit entfernt** sind.*

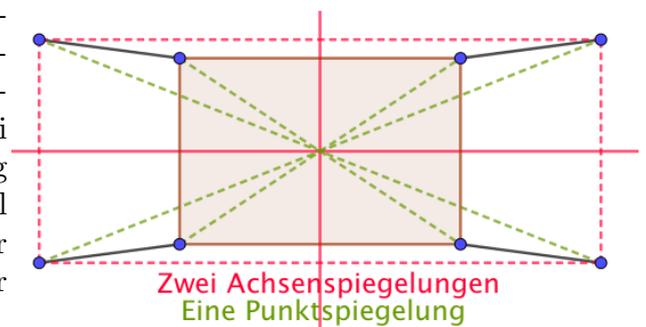
Aus dieser *Charakterisierung* folgt, dass die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden, denn: Die *drei* Ecken sind vom Schnittpunkt von *zwei* Mittelsenkrechten *gleich weit* entfernt, also geht auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt, den Mittelpunkt des Umkreises. – Ebenso folgt: Die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten  $B, B'$  kann wie im rechten Bild mit zwei gleich großen Kreisen konstruiert werden.

*Bemerkung:* Diese Argumente zu Mittelsenkrechten funktionieren wörtlich ebenso in den anderen erwähnten Geometrien, weil das Parallelenaxiom nicht benutzt wurde. (Die aus der Malerei stammende Beschreibung der Projektiven Ebene zeigt nicht die Abstände der Punkte.)

## Symmetrien und Abbildungen

Von Faltexperimenten ausgehend haben wir die Spiegelsymmetrien als eine beobachtete Eigenschaft behandelt. Man verschafft sich mehr Flexibilität, wenn man zusätzlich den Begriff Abbildung ins Spiel bringt: *Gegeben ist eine Spiegelachse. Wir definieren eine Abbildung der Ebene, indem wir jeden Punkt auf seinen Spiegelpunkt "abbilden".* Manche Leute mögen sich nicht so gerne eine Abbildung *aller* Punkte der Ebene vorstellen; in dem Fall genügt es, nur die Punkte aller gerade betrachteten Figuren abzubilden. Damit können wir jeden Punkt  $P$  der Ebene in jeden anderen Punkt  $Q$  abbilden, indem wir an der Mittelsenkrechten zu  $P$  und  $Q$  spiegeln.

Zum Beispiel haben die Rechtecke zwei Spiegelachsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüber liegender Seiten. Eine solche Spiegelachse zerschneidet das Rechteck in zwei Hälften und die zugehörige Spiegelungsabbildung vertauscht die beiden Hälften. Der große Vorteil von Abbildungen ist, dass man sie hintereinander ausführen kann. Hintereinanderausführung der beiden Spiegelungen an zu einander senkrechten



Spiegelachsen ergibt eine  $180^\circ$  Drehung um den Schnittpunkt der Achsen. Sie wird auch

“**Punktspiegelung**” genannt. Jedes Rechteck ist also auch “punktsymmetrisch”. Die Punktspiegelung hat *drei Vorteile* gegenüber der Achsenspiegelung: Erstens können wir sie in der Ebene ausführen, es ist nicht nötig, das Papier durch den Raum zu klappen. Zweitens verdeckt keine umgeklappte Hälfte des Papiers alles, was auf dem Papier zu sehen war. Drittens sehen Spiegelbilder oft anders aus als ihre Urbilder, etwa Uhren. Deswegen ist die Punktspiegelung sehr bequem zu benutzen. *In Kombination mit dem Parallelenaxiom erlauben Punktspiegelungen überraschend einfache Beweise!* Besonders nützlich ist folgender

**Satz:**

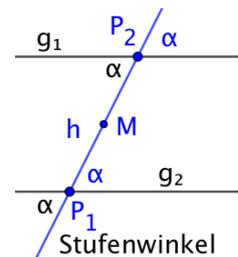
Die Punktspiegelung an einem Punkt  $P$  außerhalb einer Geraden  $g$  bildet  $g$  auf eine zu  $g$  parallele Gerade  $g'$  ab.

*Beweis:* Wegen des Parallelenaxioms (Seite 4) gibt es eine Parallele  $h$  zu  $g$  durch  $P$ . Die Gerade  $h$  zerlegt die Ebene in zwei Hälften. Die Punktspiegelung an  $P$  bildet  $h$  auf sich ab und vertauscht die beiden Hälften. Daher liegt das Bild  $g'$  in einer anderen Hälfte als  $g$ , kann also  $g$  nicht schneiden. Daher sind  $g$  und  $g'$  parallel.

*Hieraus folgen viel benutzte Eigenschaften der Euklidischen Geometrie unmittelbar:*

Anwendung 1: Stufenwinkel an Parallelen.

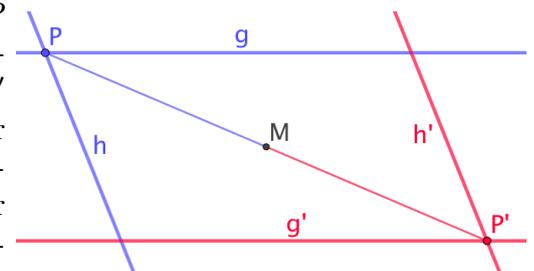
Gegeben zwei parallele Geraden  $g_1, g_2$  und eine sie in  $P_1, P_2$  schneidende Gerade  $h$ . Betrachte die  $180^\circ$  Drehung um den Mittelpunkt  $M$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$ . Sie bildet erstens die Gerade  $h$  auf sich ab und vertauscht  $P_1$  und  $P_2$ . Zweitens bildet sie  $g_1$  auf eine zu  $g_1$  parallele Gerade durch  $P_2$  ab, also auf  $g_2$  - denn es gibt *nur diese eine(!)* Parallele zu  $g_1$  durch  $P_2$ . Damit sind die beiden Schnittwinkel bei  $P_1$  gleich den Schnittwinkeln bei  $P_2$ .



Das beendet die *Konstruktion von Rechtecken* von Seite 4: Die Geraden 2 und 3 sind parallel, weil die Punktspiegelung um den Mittelpunkt von  $A$  und  $B$  sie vertauscht. Der mit “?” markierte Winkel ist als Stufenwinkel ein  $90^\circ$  Winkel.

Folgerung 1: Konstruktion und Eigenschaften von Parallelogrammen.

Gegeben zwei Geraden  $g, h$  mit dem Schnittpunkt  $P$  und ein Punkt  $M$  nicht auf den Geraden. Die Punktspiegelung an  $M$  bildet  $g, h$  auf *parallele* Geraden  $g', h'$  ab, die sich im Bildpunkt  $P'$  von  $P$  schneiden. Die vier Geraden schneiden sich in einem Parallelogramm mit Diagonale  $PP'$  und Mittelpunkt  $M$ . Diagonal gegenüber liegende Winkel sind gleich und benachbarte Winkel ergänzen sich zu  $180^\circ$ . Die Teildreiecke sind flächengleich.



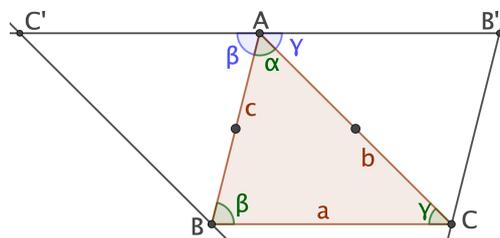
Folgerung 2: Die Winkelsumme im Dreieck ist  $180^\circ$ .

Denn Folgerung 1 zeigt, dass jedes Dreieck durch  $180^\circ$  Drehung um den Mittelpunkt einer Seite zu einem Parallelogramm ergänzt wird. Jede Diagonale zerlegt ein Parallelogramm in zwei Dreiecke, die die  $180^\circ$  Drehung um den Mittelpunkt des Parallelogramms vertauscht. Daher haben Dreiecke die halbe Winkelsumme eines Parallelogramms:  $180^\circ$ .

Folgerung 3: Klassischer Beweis der Winkelsumme.

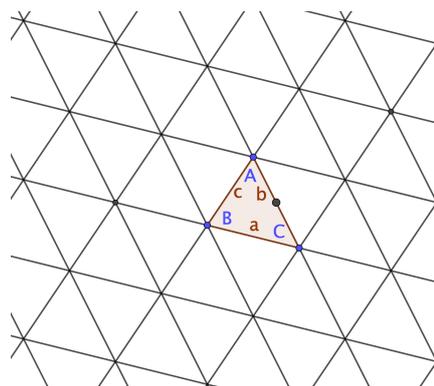
Zeichne zu einem Dreieck mit den Seiten  $a, b, c$  und den gegenüber liegenden Ecken  $A, B, C$  eine Parallele zu  $a$  durch  $A$ . Wegen des Stufenwinkelsatzes liegen dann bei  $A$  die Dreieckswinkel  $\alpha, \gamma, \beta$  nebeneinander und ergeben zusammen  $180^\circ$ . (Die Schwierigkeit dieses Beweises liegt darin, dass die Hilfslinie "Parallele zu  $a$  durch  $A$ " nicht durch die Frage nach der Winkelsumme suggeriert wird.)

Alternativer Anfang: Rotiere das Dreieck um die Mittelpunkte der Seiten  $b, c$  um  $180^\circ$ . Dadurch werden die Winkel  $\beta, \gamma$  wieder bei  $A$  neben den Winkel  $\alpha$  gelegt. Die Geraden  $B'A$  und  $C'A$  sind beide parallel zur Geraden  $BC$ , sind also **dieselbe** Gerade. Daher folgt auch so:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .



Folgerung 4: Pflasterung der Ebene mit Dreiecken.

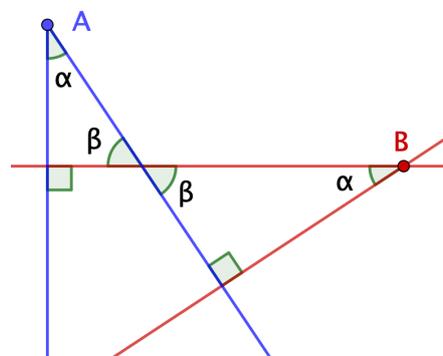
Mit Folgerung 1 wird das gegebene Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt. Zwei gegenüber liegende Parallelogrammseiten werden zu parallelen Geraden verlängert; dieser Parallelstreifen wird mit Kopien des Parallelogramms gepflastert. Schließlich wird die Ebene mit Kopien des Parallelstreifens gepflastert. - Das entstandene Bild sagt viel über die Euklidische Ebene, denn in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie gibt es solche Pflasterungen nicht.



Folgerung 5: Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht auf einander stehen, sind gleich.

Die Schenkel des Winkels mit Spitze  $A$  (blau) stehen senkrecht auf den Schenkeln des Winkels mit Spitze  $B$  (rot). Der Schnitt der beiden Schenkelpaare liefert zwei rechtwinklige Dreiecke. Die mit  $\beta$  bezeichneten Winkel sind als Scheitelwinkel gleich. Nach Folgerung 2 sind auch die Winkelsummen der Dreiecke gleich. Daher sind die mit  $\alpha$  bezeichneten Winkel bei  $A$  und  $B$  gleich.

Dieser Satz ist erstaunlich häufig ein nützlicher Hilfssatz.

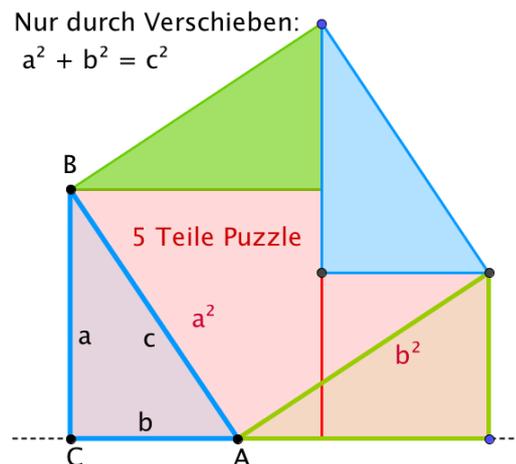


Ergänzung: Parallelverschiebungen.

Parallelverschiebungen sind wichtige Abbildungen, sie kommen in allen Büchern, die ich gesehen habe, vor. Bandornamente sind übliche Veranschaulichungen. Argumentiert werden muss zum Beispiel, dass die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen an parallelen Achsen eine Parallelverschiebung ergibt. Ebenso ist die Komposition von zwei Punktspiegelungen eine Parallelverschiebung.

Die aufgezählten "einfachen Eigenschaften" beruhen auf dem Parallelenaxiom. Sie gelten nur in der Euklidischen Geometrie. Ich finde, diese Eigenschaften sind noch so nahe am Papierfalten, dass sie zu den Anfängen der Geometrie gehören. Hiernach kann man auf recht verschiedene Weise fortfahren.

Ich wähle unter verschiedenen Möglichkeiten für den nächsten Schritt die Dreiecksgeometrie, weil man schon mit Verschieben (oder  $90^\circ$  Drehungen) von zwei Dreiecken nebeneinander Beweis ohne Formeln erhält. Bei vielen weiteren Konstruktionen muss mit Dreiecken gearbeitet werden. Später beruht ein großer Teil der räumlichen Geometrie darauf, dass man mit Dreiecken umgehen kann. Für das Puzzle werden die zwei roten Quadrate mit zwei Schnitten in fünf Teile zerlegt. Aus der Euklidischen Geometrie wird **nur** vorausgesetzt, dass zwei Quadrate nebeneinander auf eine Gerade gestellt werden können (Quadratwinkel  $90^\circ$ ).

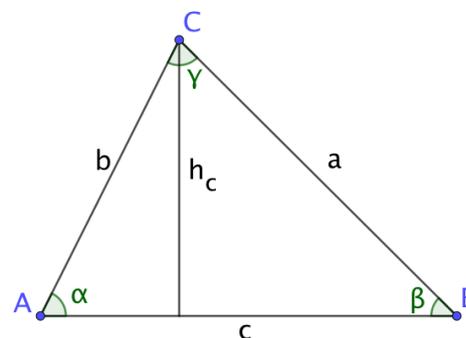


### Dreiecksgeometrie

Zunächst eine *stillschweigende* Übereinkunft:

Alle Dreiecke, die ich irgendwo gesehen habe, sind wie in diesem Bild **beschriftet**: Die Ecken heißen  $A, B, C$  im *Gegenuhreigersinn*, die gegenüberliegenden Seiten heißen  $a, b, c$  und die Winkel an den Ecken heißen  $\alpha, \beta, \gamma$ . Das Lot von  $C$  auf die Seite  $c$  heißt "Höhe"  $h_c$ .

Das Spiegelbild dieses Dreiecks, also  $A, B, C$  im *Uhrzeigersinn*, habe ich wirklich nirgends gesehen. Durch diese Verabredung wird eine eindeutige sprachliche Ausdrucksweise sehr erleichtert.

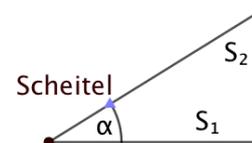


Schon kleine Kinder lernen Schraubverschlüsse zu öffnen und zu schließen. Dass sie dies Können ihrer Hände abstrakter als *Linksdrehung* und *Rechtsdrehung* zur Verfügung bekommen, finde ich nützlich. Das wird durch diese Beschriftungsverabredung unterstützt. Dann können sie sich später darüber wundern, dass auf der Nordhalbkugel die Sonne von Osten über Süden nach Westen wandert, während sie auf der Südhalbkugel von Osten über **Norden** nach Westen läuft.

Als nächstes brauchen wir **Winkel**.

Es gibt z.B. die Verabredung, Durchschnitte von Halbebenen mit nicht-parallelen Randgeraden als "Winkel" zu definieren. Das ist unzweckmäßig, weil dann ein nicht-konvexes Viereck einen Innenwinkel hat, der kein "Winkel" ist.

Wir definieren stattdessen zwei von einem Punkt ausgehende und nummerierte Halbgeraden als "**Winkel**". Sie zerlegen die Ebene in zwei Sektoren. Der Sektor im *Gegenuhreigersinn* neben dem ersten Strahl ist normaler Weise durch die Nummerierung gemeint.



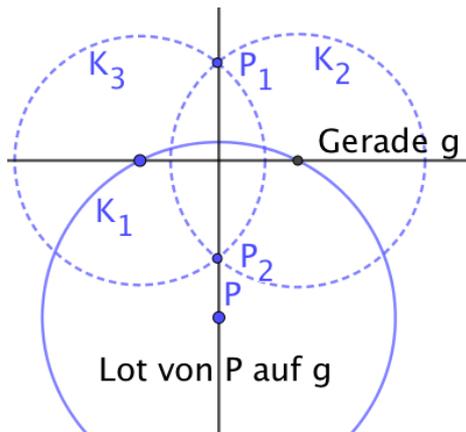
Man kann auch mit einem gebogenen Pfeil von Strahl zu Strahl ausdrücken, welchen Sektor man meint. Die Größe eines Winkels (auch "Weite" oder "Winkelmaß") geben wir wie bei Längen und Flächen positiv an, zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$ . Erst für rotierende Räder oder für auf  $\mathbb{R}$  definierte trigonometrische Funktionen werden wir auch negative Winkelgrößen brauchen.

## Kreise und Spiegelsymmetrien

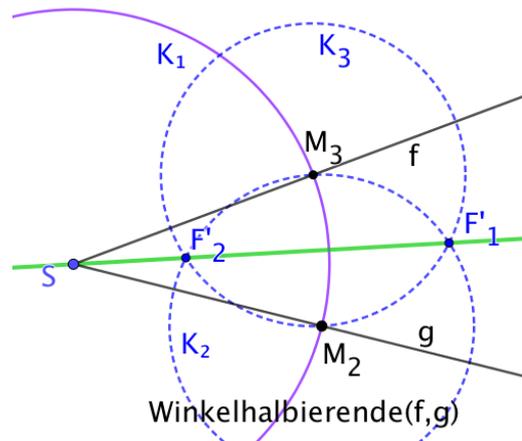
In der Dreiecksgeometrie hat man oft Strecken gegebener Länge abzutragen. Das geht mit einem Zirkel wesentlich besser als beim auf gerade Linien konzentrierten Falten. Außerdem eignet sich der Kreis gut zum Argumentieren:

- *Kreise sind spiegelsymmetrisch zu jeder Geraden durch ihren Mittelpunkt.*
- *Die Mittelsenkrechte jeder Kreissehne geht durch den Mittelpunkt.*

Da das Umstellen von Zirkeln Zeit kostet und fehleranfällig ist, bevorzuge ich **Grundkonstruktionen** mit *gleich großen* Kreisen. Allerdings sind kleinere Kreise übersichtlicher:



Die Schnittpunkte des Kreises  $K_1$  um  $P$  mit  $g$  liegen gleich weit auf  $g$  beiderseits des Lotfußpunktes. Gleich große Kreise  $K_2, K_3$  um diese Punkte schneiden sich auf dem Lot.

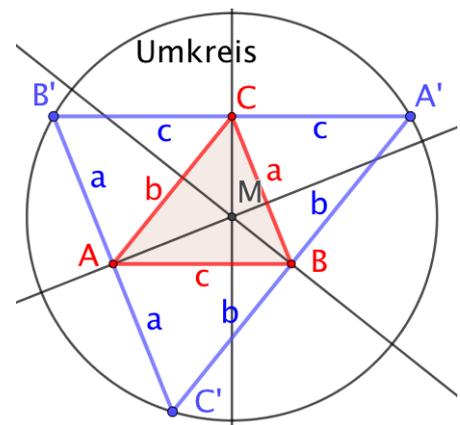


Der Kreis  $K_1$  um den Scheitel  $S$  liefert die Punkte  $M_2, M_3$  auf den Schenkeln  $g, f$ . Gleich große Kreise  $K_2, K_3$  um  $M_2, M_3$  schneiden sich auf der Winkelhalbierenden.

Als nächstes kommen wir zu **Schnittpunktsätzen am Dreieck**. Jeder dieser Sätze behauptet, dass sich **drei** am Dreieck definierte Geraden in **einem** Punkt schneiden.

Das Dreieck  $A'B'C'$  entsteht, indem das Dreieck  $ABC$  um den Mittelpunkt jeder Seite um  $180^\circ$  gedreht wird. Die **Höhen** in  $ABC$  sind **Mittelsenkrechte** in  $A'B'C'$ . Ich erkläre (wie schon oben), warum sich die Mittelsenkrechten im Mittelpunkt des Umkreises schneiden: Schon der Schnittpunkt  $M$  von nur **zwei** Mittelsenkrechten ist gleich weit von  $A', B'$  und  $C'$  entfernt, ist also Mittelpunkt des Umkreises. Daher geht auch die dritte Mittelsenkrechte - einer Umkreissehne - durch  $M$ .

*Diese Figur erläutert also zwei der Schnittpunktsätze: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und die Höhen ebenso.*



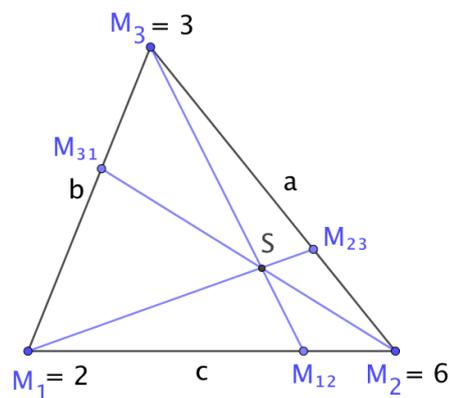
Den *üblichen Beweis* zum **Schnittpunkt der Seitenhalbierenden** zeigt die Figur zum Beweis des Strahlensatzes (Seite 16). Wir illustrieren hier einen allgemeineren Satz mit Hilfe eines Begriffs aus der Physik. *Historische Anmerkung:* Auch Archimedes hat mit Schwerpunkten argumentiert, um den Flächeninhalt von Parabelsegmenten zu **finden**. Er und seine Zeit betrachteten das nicht als Beweis, weil der Schwerpunkt nicht geometrisch sondern durch eine Formel definiert ist. Trotzdem wurde Archimedes dafür bewundert.

### Schwerelinien Satz

Der Schwerpunkt  $P_{1,2}$  von zwei Massen  $m_1, m_2$  teilt nach *Definition* die Verbindungsstrecke von  $P_1$  nach  $P_2$  im Verhältnis  $m_2 : m_1$  und er hat die Masse  $m_1 + m_2$ .

Eine wichtige Eigenschaft ist, dass der Schwerpunkt vieler Punkte schrittweise berechnet werden kann. Beispiel: nimmt man einen dritten Punkt  $P_3$  mit Masse  $m_3$  hinzu, so teilt der Schwerpunkt  $P_{1,2,3}$  von allen drei Punkten die Strecke  $P_3P_{1,2}$  im Verhältnis  $(m_1 + m_2) : m_3$ .

$P_{1,2,3}$  kann ebenso in den beiden anderen Reihenfolgen berechnet werden. Deshalb schneiden sich die drei Geraden von  $P_i$  nach  $P_{j,k}$  im gemeinsamen Schwerpunkt  $S$ . ( $i, j, k$  sind zyklische Vertauschungen von 1, 2, 3.) Die drei Geraden sind Seitenhalbierende, wenn die drei Massen gleich sind. Sie teilen sich dann wie  $(1 + 1) : 1$ .



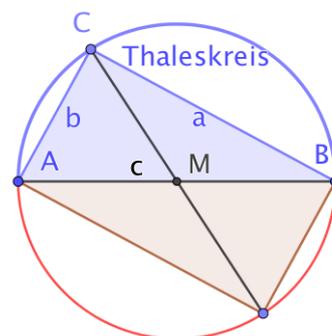
Beim Schnittpunktsatz über die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks geht es um Kreistangenten. Um die Tangenten von einem Punkt außerhalb an einen Kreis zu zeichnen, benötigt man den **Satz des Thales**:

a) *Ein einem Kreis einbeschriebenes Dreieck, dessen längste Seite ein Durchmesser ist, ist rechtwinklig.*

b) **Umkehrung:** *Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Mittelpunkt der Hypotenuse.*

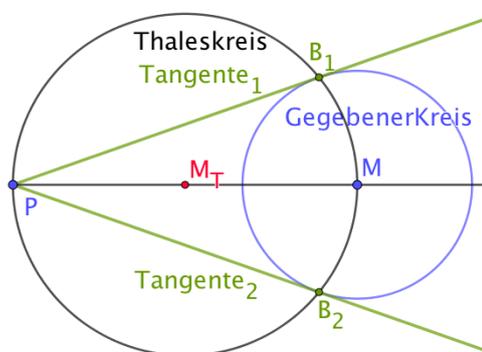
Wir wissen schon, dass ein Parallelogramm entsteht, wenn man ein Dreieck um den Mittelpunkt einer Seite um  $180^\circ$  dreht. Im Falle a) sind die Dreiecksseiten auch Kreissehnen, ihre Mittelsenkrechten gehen also durch den Mittelpunkt  $M$  des Kreises und sind daher Spiegelachsen des dem Kreis einbeschriebenen Parallelogramms - dies ist also ein Rechteck.

Im Falle b) haben wir nach Voraussetzung zwei  $90^\circ$  Winkel, also sind auch die beiden anderen  $90^\circ$ . Der Mittelpunkt dieses Rechtecks ist Umkreismittelpunkt.



### Tangentenkonstruktion:

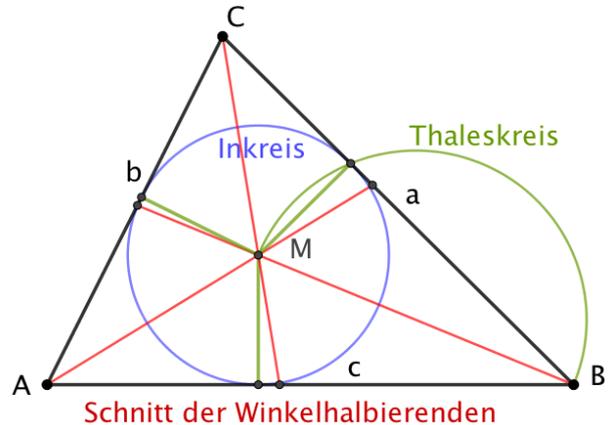
Gegeben ist der blaue Kreis um  $M$  und der Punkt  $P$ . Hätte man die Berührungspunkte  $B_1, B_2$  der Tangenten, so wären  $PMB_1, PMB_2$  rechtwinklige Dreiecke. Man findet die Berührungspunkte, weil der Thaleskreis über der Strecke  $PM$  (Mittelpunkt  $M_T$ ) den gegebenen Kreis in  $B_1$  und  $B_2$  schneidet. Die Gerade  $PM$  ist Winkelhalbierende der Tangenten  $PB_1, PB_2$ . Das Bild ist spiegelsymmetrisch mit Spiegelachse  $PM$ .



### Schnitt der drei Winkelhalbierenden:

Von **jedem** Punkt einer Winkelhalbierenden sind die beiden Lote auf die Schenkel gleich lang. Schneide nun **zwei** Winkelhalbierende eines Dreiecks und betrachte die **drei** Lote vom Schnittpunkt  $M$  auf die drei Seiten. Die ersten beiden Lote sind gleich lang und ebenso die letzten beiden, also alle drei! Der Kreis um  $M$  durch die Fußpunkte dieser Lote berührt alle drei Seiten, ist also der Inkreis. Weil alle drei Seiten Tangenten an den Kreis sind, geht auch die dritte Winkelhalbierende durch  $M$ . Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten (= Lotfußpunkte) werden wie in der Tangentenkonstruktion mit Thaleskreisen gefunden.

Alle vier Schnittpunktsätze geben also Gelegenheit zu logischer Argumentation.



### Kongruenzsätze

Die Kongruenzsätze sind in Schulbüchern aufgeführt. Sie besagen, dass Dreiecke durch Vorgabe von drei (geeigneten) Stücken konstruiert werden können. Mit “Stücke” sind Seiten und Winkel gemeint. Man muss dabei auf die Beschriftung der Dreiecke achten. Soll z.B. ein Dreieck aus den drei Seitenlängen konstruiert werden, so beginnt man mit der Strecke der Länge  $|c|$  von  $A$  nach  $B$ . Dann schlägt man einen Kreis mit dem Radius  $r = |b|$  um  $A$  und einen Kreis mit dem Radius  $r = |a|$  um  $B$ . Diese Kreise schneiden sich in zwei Punkten  $C, C'$ . Die Dreiecke  $ABC$  und  $ABC'$  haben die gewünschten Seitenlängen, aber nur bei einem folgen sie *linksherum* in der “richtigen” Reihenfolge  $a, b, c$ . Beide Dreiecke sind Spiegelbilder von einander. “Geeignet” heißt in diesem Fall, dass die Summe von je zwei Seitenlängen größer als die dritte sein muss, *Dreiecksungleichung* z.B.  $|c| < |a| + |b|$ , weil ja zwei Seiten hintereinander ein “Umweg” gegenüber der direkten Verbindung durch die dritte Seite ist. Dieser Kongruenzsatz wird mit dem Namen “SSS” zitiert.

Grundsätzlich kann man in allen Fällen aus den Vorgaben ein Dreieck und sein Spiegelbild konstruieren, aber nur eines der beiden hat die Daten *linksherum* in der richtigen Reihenfolge. Sind etwa  $\alpha, |c|, \beta$  gegeben, so ist  $c$  an Ecke  $A$  der erste Schenkel ( $S_1$  auf Seite 8) von  $\alpha$ , aber an der Ecke  $B$  ist  $c$  der zweite Schenkel von  $\beta$ . “Geeignet” heißt hier,  $\alpha + \beta < 180^\circ$ , damit sich die freien Schenkel der beiden Winkel schneiden (statt auseinander zu laufen). Dieser Satz wird mit *WSW* zitiert. – Wegen  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  liegt dieser Fall immer vor, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Bei dem Kongruenzsatz *SWS* sind zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel gegeben. Man beginnt mit der Seite, an der der Winkel *linksherum* anzutragen ist. Auf dem freien Schenkel wird die andere Seitenlänge abgetragen. Alle Daten sind “geeignet”.



## Der Strahlensatz

Vorbemerkung: Ich werde wieder Vergleiche mit der Geometrie der Kugeloberfläche einschieben, weil dadurch deutlicher wird, was in der Euklidischen Geometrie besonders ist. Dies ist jedenfalls für Lehrende gedacht, meine Erfahrung reicht nicht, solche Vergleiche für die Schule zu empfehlen. Allerdings sind mir bekannte Vorschulkinder am Globus erstaunlich interessiert. Selbstverständlich werde ich mit ihnen auch über Globusgeometrie reden.

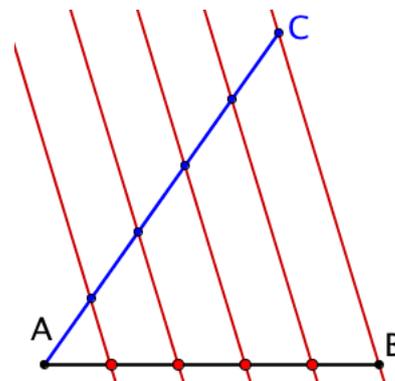
In einem Schulbuch habe ich gelesen, dass Figuren “ähnlich” sind, wenn sie durch “Vergrößerung” aus einander hervorgehen - sonst nichts. Es ist einfach, Kreise zu vergrößern: wir vergrößern “einfach” ihren Radius. Eine wichtige Euklidische Einsicht ist: Der Umfang wächst proportional zum Radius,  $u(r) = 2\pi r$ . Das ist auf der Sphäre nicht so: der Umfang des Äquators ist nur viermal so groß wie der Radius bis zum Nordpol und noch weiter nach Süden werden die Umfänge der Breitenkreise sogar kleiner! Dies Verhalten ist nicht, was wir mit “Vergrößerung” meinen und schon gar nicht mit “ähnlicher Vergrößerung”. Das wird auch nicht besser, wenn wir Dreiecke betrachten: Beginne mit zwei Meridianen, die am Nordpol z.B. einen  $60^\circ$  Winkel bilden. Schneide die Meridiane mit einem Breitenkreis und verbinde die Schnittpunkte mit einem Großkreisbogen. Das ergibt ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck. Bei Schenkellängen von Zentimetern erkennen wir keinen Unterschied zu Euklidischen Dreiecken. Sind die Schenkel auf 10000 km “vergrößert”, reichen also bis zum Äquator, so ist die Basis zu kurz wegen  $40000/6 \text{ km} < 10000 \text{ km}$ , während die Höhe mit 10000 km deutlich zu lang ist - im Vergleich mit einem gleichschenkligen Euklidischen Dreieck mit  $60^\circ$  Winkel an der Spitze. – Wir werden daher das **Parallelenaxiom** und Folgerungen daraus benutzen, um “Vergrößerungen” genauer zu untersuchen.

Außerdem wird der vom Parallelenaxiom unabhängige Kongruenzsatz ‘WSW’ verwendet: *Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den anliegenden Winkeln überein, so stimmen sie auch in den anderen Seiten und dem dritten Winkel überein.*

Wir erinnern an eine häufige **Anwendung** des Strahlensatzes, die Teilung einer gegebenen Strecke  $AB$  in  $n$  gleiche Teile. Das Verfahren geht so:

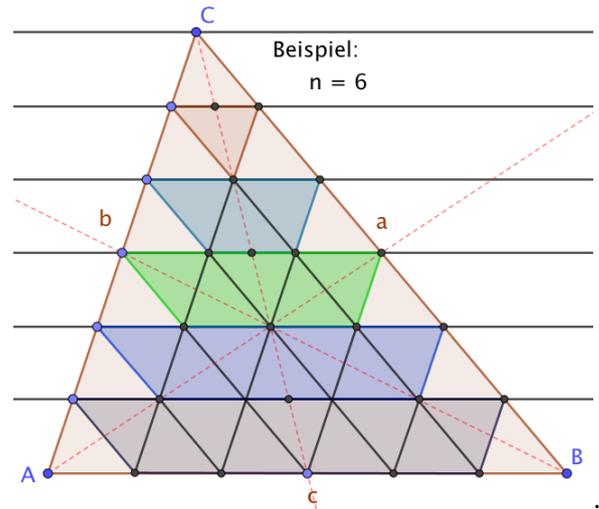
Es wird eine zweite aus  $n$  gleichen Teilen **hergestellte** Strecke  $AC$  gewählt und die Gerade  $BC$  gezeichnet. Dann zeichnet man durch die Teilpunkte von  $AC$  **Parallelen** zu  $BC$  und schneidet sie mit der gegebenen Strecke  $AB$ . Behauptung: Diese Schnittpunkte teilen  $AB$  in  $n$  gleiche Teile.

In den nichteuklidischen Geometrien ist mir keine Konstruktion bekannt, die eine Strecke in  $n$  gleiche Teile teilt, wir haben es hier mit einer Konsequenz des Parallelenaxioms zu tun. Der folgende Beweis zeigt, dass die konstruierten Teile der Strecke  $AB$  wirklich kongruent sind und die Strecke  $BC$  wird im Beweis ebenfalls in  $n$  gleiche Teilstücke geteilt. Dieser Beweis wird zweimal hintereinander benutzt: Beim ersten Mal ist die Strecke  $AC$  wie in dieser Anwendung mit einer Unterteilung hergestellt, beim zweiten Mal sind alle Dreiecksseiten ohne Unterteilung, aber man weiss jetzt, wie man die Seite  $AC$  in  $n$  gleiche Teile teilt.



### Konstruktionsbeschreibung zum Strahlensatzbeweis:

Die Seite  $AC$  ist(1) oder wird(2) in  $n$  gleiche Teile geteilt. Ziehe durch die Teilpunkte Parallelen zu  $AB$  und schneide sie mit  $BC$ . Markiere die Mittelpunkte dieser Sehnen zwischen  $AC$  und  $BC$ . Rotiere das oberste Teildreieck zusammen mit den Geraden  $AC$  und  $BC$  um den obersten Mittelpunkt um  $180^\circ$  Grad in den zweitobersten Parallelstreifen. Die gedrehte Gerade  $BC$  schneidet aus dem Parallelstreifen ein Dreieck aus, das mit seiner linken Seite und den anliegenden Winkeln nach dem *Stufenwinkelsatz(!)* mit dem Spitzendreieck übereinstimmt, also kongruent zu diesem ist. Daher liegt die Spitze des gedrehten Dreiecks, wie gezeichnet, auf der nächsten Parallelen. Also entsteht rechts daneben ein weiteres Dreieck, das mit seiner linken Seite und den anliegenden Winkeln mit dem Spitzendreieck übereinstimmt. Damit sind die beiden obersten (von den Parallelen ausgeschnittenen) Teilstrecken von  $BC$  gleich lang – man kann also schon erwarten, dass der Beweis Erfolg haben wird.



Im nächsten Schritt werden die drei Dreiecke der zweiten Zeile um den zweiten Mittelpunkt in die dritte Zeile gedreht. Die dabei entstehenden äußeren Dreiecke sind wie eben kongruent zu dem Spitzendreieck - also sind schon die ersten drei Teilstrecken von  $BC$  gleich lang! Das wird bis zur  $n$ -ten Zeile (die  $2n - 1$  Dreiecke enthält) fortgesetzt. Danach ist das Ausgangsdreieck  $ABC$  wegen

$$(1 + 3 + \dots + 2n - 3 + 2n - 1) + (2n - 1 + 2n - 3 + \dots + 3 + 1) = n \cdot 2n = 2n^2$$

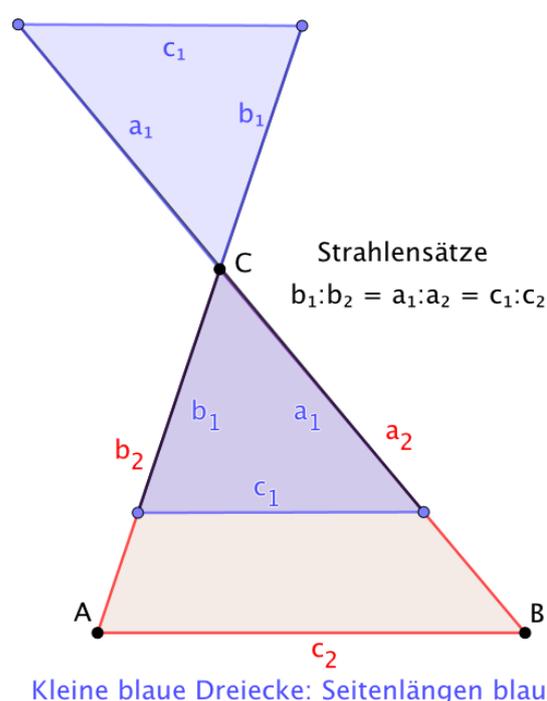
mit  $n^2$  Dreiecken gepflastert, die alle **kongruent** zu dem Teildreieck an der Spitze sind.

*Die Parallelen dieser Konstruktion teilen die Seiten  $AB$  und  $BC$  in  $n$  gleiche Teile.*

Das beweist die Strahlensätze für alle in der Figur vorkommenden Paare aus Dreieck und Teildreieck.

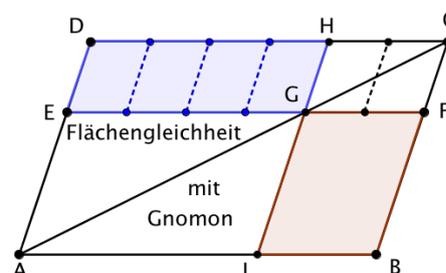
Was ist damit erreicht? Da die Zahl  $n$  im Beweis beliebig war, sind damit die Strahlensätze für den Fall bewiesen, dass das auftretende Streckenverhältnis **rational** ist. Schon Archimedes hat das Eudoxos Axiom benutzt, um solche Aussagen von rationalen auf irrationale Verhältnisse von Größen, zum Beispiel Längen, auszuweiten. Das war ein erstaunlicher Fortschritt, denn es gab noch keine *Zahlen*, um auch irrationale Verhältnisse zu beschreiben, aber trotzdem konnte *Gleichheit* irrationaler Verhältnisse festgestellt werden!

Außerdem zeigt die zum Beweis verwendete Dreieckspflasterung für jedes  $n = 3k$ , dass die Seitenhalbierenden sich in einem Punkt schneiden und sich im Verhältnis 2 : 1 teilen.



Die häufigsten Beweise der Strahlensätze verwenden **Formeln** für Flächeninhalte. Sie scheinen ohne das Archimedes Argument auszukommen. Aber da die Untersuchung von Flächeninhalten mit dem Einheitsquadrat beginnt, bekommt man die Flächenformel für Rechtecke zunächst auch nur für rationale Seitenlängen. Das Archimedes Argument ist also von Anfang an in Flächenformeln enthalten, es braucht daher bei diesen Strahlensatzbeweisen nicht wiederholt zu werden.

In dieser schönen Figur sind das blaue und das rote Parallelogramm *ohne Formeln* flächengleich, weil die Diagonale  $AC$  sowohl das große Parallelogramm  $ABCD$  als auch die beiden weißen Teilparallelogramme in gleiche Hälften teilt. Falls das Streckenverhältnis  $DH : HC$  rational ist, so sieht man ebenfalls *ohne Formeln*, dass dies Streckenverhältnis gleich dem Flächenverhältnis der Parallelogramme  $EGHD$  und  $GFCH$  ist, also auch gleich dem Flächenverhältnis der Parallelogramme  $IBFG$  und  $GFCH$ . Daher teilt  $F$  auch die Strecke  $BC$  rational im gleichen Verhältnis. Damit verhalten sich die Längen aller nicht auf der Diagonale  $AC$  liegenden Dreiecksseiten im richtigen – bisher rationalen – Verhältnis. Das Archimedes Argument vervollständigt den Beweis, sobald man irrationale Zahlen kennt.

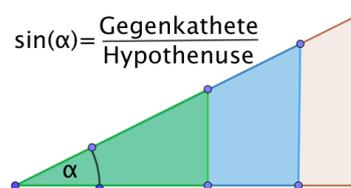


## Kommentare zum Strahlensatz

Da der Strahlensatz viel häufiger **mit** Flächenformeln als **ohne** diese bewiesen wird, weise ich darauf hin, dass das n-Teilungsproblem auch am Anfang der Flächenlehre auftritt, da man ein Quadrat der Kantenlänge  $1/n$  finden muss, mit dem man sowohl das Einheitsquadrat wie auch ein gegebenes Rechteck mit rationalen Kantenlängen pflastern kann. Das geht tatsächlich ohne den Strahlensatz, indem man, analog zur ggT-Bestimmung, die kleinere Strecke so oft von der größeren abzieht, bis ein noch kleinerer Rest bleibt, usw..

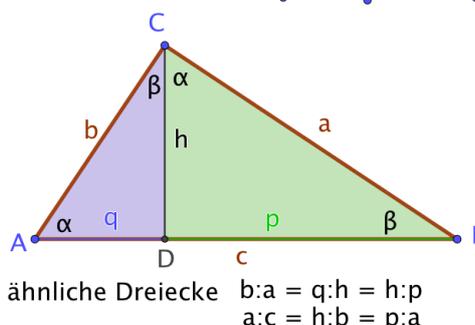
Obwohl ich die Gnomon-Figur schön finde, ziehe ich den obigen Beweis vor, weil für mich die Strahlensätze mehr mit Vergrößern als mit Formeln für Flächenmaße zu tun haben. Das Bild zum Strahlensatzbeweis zeigt zu Flächeninhalten: Wenn man ein Dreieck mit dem rationalen Faktor  $\lambda$  vergrößert, so wächst der Flächeninhalt um den Faktor  $\lambda^2$  – auch schon, bevor man eine Formel für den Dreiecksinhalt hat.

**Nur** mit dem Strahlensatz kann man die nebenstehende Definition machen. Auch “Vergrößerungen” und “zentrische Streckungen” kann man mit seiner Hilfe definieren. Die Ähnlichkeitslehre kann beginnen.



Dazu gehören auf jeden Fall die ähnlichen Teildreiecke eines rechtwinkligen Dreiecks mit den aus dem Strahlensatz folgenden Verhältnissen, die mit dem Höhensatz:  $p \cdot q = h^2$  und dem Satz des Euklid:  $p \cdot c = b^2$ ,  $q \cdot c = a^2$  äquivalent sind. Damit gilt auch

$$c^2 = (p + q) \cdot c = a^2 + b^2.$$



Da das ästhetische Ansehen dieses Satzes auf der Formulierung mit Flächeninhalten beruht, möchte ich hinzufügen, dass die Flächeninhalte der drei ähnlichen Dreiecke  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CAD$  durch Multiplikation mit demselben Faktor  $2c^2/ab = 2a^2/hp = 2b^2/qh$  in die Flächeninhalte ihrer Hypotenusenquadrate verwandelt werden. Dass die beiden Teildreiecke sich zu dem Dreieck  $ABC$  zusammenfügen, ist also auch ein Beweis des Satzes von Pythagoras.

Zur Satzgruppe des Pythagoras habe ich eine schöne Schulbuchbehandlung gefunden, vielseitig, beweisend und nicht verbal überladen in den Anwendungen. Trotzdem bleibt die Frage, einen wie dauerhaften Erfolg man erzielen kann, wenn solch eine echt mathematische Behandlung nur bei einer einzigen Gelegenheit stattfindet, als Zugeständnis an die Berühmtheit dieses Satzes.