Anfänge, um Argumentieren zu lernen

Zum Glück hat - soweit ich weiß - noch niemand vorgeschlagen, Unterricht im Argumentieren mit formaler Logik zu beginnen. Es ist notwendig, in konkreten Situationen Erfahrungen mit dem Argumentieren zu sammeln. Insbesondere muss zunächst die jeweilige Situation bekannt sein, ehe man mit Argumenten neue Einsichten gewinnen kann.

Ehe man die Definition einer Primzahl verstehen kann, muss man multiplizieren können. Wer multiplizieren kann, kann argumentieren: $n := p_1 \cdot p_2 + 1$ ist weder durch p_1 noch durch p_2 teilbar. Außerdem ist jede natürliche Zahl $n > 1$ entweder Primzahl oder Produkt von kleineren Faktoren. Das kann man ausbauen, um den Satz von Euklid zu beweisen:
Zu jeder endlichen Menge von Primzahlen kann man weitere Primzahlen konstruieren.

Das Multiplizieren schon zweistelliger Zahlen ist eine Vorstufe der wichtigen Klammerregel $(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$, denn $23 \cdot 45$ bedeutet eben $(2 \cdot 10 + 3) \cdot (4 \cdot 10 + 5)$. Und man sieht daran auch, dass man mehrstellige Zahlen nicht multiplizieren kann, wenn man das kleine 1x1 nicht auswendig kann.

Das Rechnen mit Ungleichungen beginnt damit, dass Summe und Produkt positiver Zahlen positiv sind. Dabei ist der Satz *"eine Zahl r ist positiv"* der sprachliche Ausdruck für die als Formel geschriebene Aussage $0 < r$.
Daran schließt sich die Definition an: $a < b \Leftrightarrow 0 < b - a$.
Mit diesen Kenntnissen argumentiert man die nächsten Schritte:

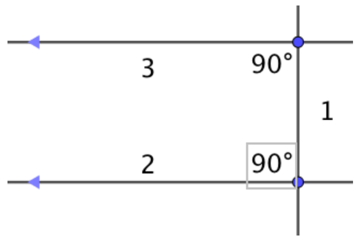
$a < b$ und $c < d$ impliziert $a + c < b + d$,

bis hin zur Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Ehe man Analysis beginnen kann, muss mindestens eine Vorstufe des Funktionsbegriffs vorhanden sein. Wenn dann die Schülerinnen und Schüler mit Klammern und Ungleichungen arbeiten können, steht den Argumenten der Analysis nichts mehr im Wege - in meinen Texten zur Analysis wird nicht mehr vorausgesetzt.

Während Kinder von allein mit Zahlen Kontakt bekommen - so dass klar ist, was mit den bisher als "Anfänge" formulierten Beispielen gemeint ist - scheinen mir die **Anfänge der Geometrie** mehr Erklärung zu benötigen. Es gibt so viele Beziehungen in der Geometrie und deutlich mehr Objekte als nur Zahlen, dass sich wohl kein Königsweg finden läßt, dem alle zustimmen können. Ich finde, dass Spielen mit Bauklötzen, Falten von Papier und Flechten von Zöpfen wichtige Erfahrungen bieten. Insbesondere das Falten von Papier kann in der Schule aufgegriffen werden. Die Faltlinien sind Beispiele für Geraden. Zusammen mit Farbklecksen zeigen sie, dass zu jeder Geraden eine Achsensymmetrie gehört. Wer kompliziertere Figuren falten möchte, lernt schnell, wie zu einander senkrechte Geraden gefaltet werden können. Diese haptischen Erfahrungen können in der Schule mit Bleistift, Lineal, Geodreieck und Zirkel fortgesetzt werden, bis das Argumentieren beginnen kann.

Oder bis ein Problem auftritt. Üblicher Weise beginnt das Zeichnen von Parallelen damit, dass zwei Geraden senkrecht zu einer ersten gezeichnet oder gefaltet werden. Aber woher wissen wir, dass sich die parallel aussehenden Geraden wirklich nicht schneiden? Sehr lange gerade Linien können wir sicher nicht zeichnen. Man kann an Lichtstrahlen denken.

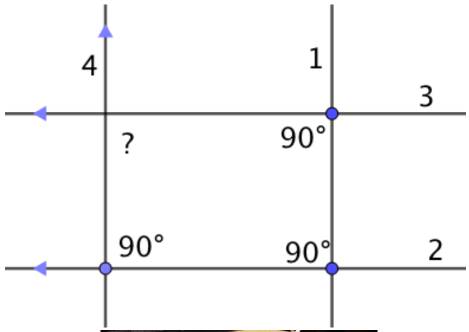


Aber Licht wird durch eine Wellengleichung kontrolliert. Z.B. sind die so genannten Laser**strahlen** keine "Strahlen", keine beliebig dünnen geraden Linien. Sie sind ein Lichtbündel, dessen Dicke von der Lasermündung an mit der Entfernung wächst. Ein technisch aufwendiger Laserstrahl ist auf dem Mond schon etwa 1 m dick. Und der Mond ist - von Parallelen aus beurteilt - nicht wirklich weit entfernt, schon der griechische Astronom Aristarch hat die Entfernung zu ihm auf etwa 30 Erddurchmesser bestimmt. Mit Sternenlicht ist es nicht besser, weil auch das der Maxwellschen Wellengleichung gehorcht. – Andererseits, kann man denn **denken**, dass die mit ihren Anfangsstücken gezeichneten Geraden 2, 3 **anders** weiter gehen denn als "Parallelen"? Schon Anfang des 19. Jahrhunderts hat Gauß erwogen, ob der die Erde umgebende Raum "nicht-euklidisch" sein könnte und ob er das bei seiner Landvermessung an der Winkelsumme seiner größten Dreiecke erkennen könnte. Was hat Gauß hier mit "nicht-euklidisch" gemeint? Ich erkläre zunächst, wie sehr die Geometrie auf der Erdoberfläche, also auf einer Sphäre, der Euklidischen Geometrie ähnelt. Den "Geraden" entsprechen die sogenannten Großkreise - das sind ebene Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel. Die Kugel ist symmetrisch zu solchen Ebenen, die Großkreise sind daher Symmetrielinien der Kugelfläche - wie die Geraden in der Ebene. Außerdem sind Großkreisbögen, die kürzer als ein halber Umfang sind, *kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte* - wie die Strecken in der Ebene. Mit diesen "spärischen Geraden" kann man z.B. Dreiecksgeometrie ganz ähnlich wie in der Ebene machen. Nur, für sphärische Dreiecke gilt nicht, dass die Winkelsumme 180° ist. Solch eine *sphärische Geometrie* konnte Gauß sich auch *dreidimensional* vorstellen - und auch als Umgebung der Erdkugel. Daher hat ihn die Winkelsumme seiner größten Dreiecke interessiert. Die in der Abbildung mit 1, 2, 3 nummerierten Geraden sind auf der Erdoberfläche z.B. der Äquator und zwei dazu senkrechte Meridiane. Diese scheinen durchaus parallel loszulaufen, aber nach 10000 km schneiden sie sich trotzdem am Nordpol. Ich fasse zusammen:

Die Existenz von Parallelen ist kein experimentelles Ergebnis. Für die zu behandelnde Euklidische Geometrie ist das **Parallelenaxiom** *wesentliche Grundlage. Von ihm abhängende Eigenschaften, wie die Winkelsumme im Dreieck oder der Strahlensatz, sind ebenfalls keine experimentellen Ergebnisse, sondern müssen bewiesen werden.*
Was man z.B. beim Falten begreifen kann, gilt in der Euklidischen und in den nicht-euklidischen Geometrien. Es hängt nicht vom quantitativen Ausgang von Experimenten ab. Deshalb können Falterfahrungen die Voraussetzungen zur Verfügung stellen, die man dann bei logischen Argumenten - etwa zusammen mit dem Parallelenaxiom - benutzen darf.

Sicherheitshalber formuliere ich auch hier: Wenn man den Mathematikunterricht nicht mehr benutzen will, um *logisches Schließen* zu lehren und zu üben, dann kann man ihn außerordentlich weit zusammenstreichen. Zum Beispiel finde ich es trostlos lächerlich, wenn die Schnittpunktsätze am Dreieck ohne jedes begründende Argument auf einer Seite als tabellarische Faktensammlung mitgeteilt werden.

Diese den experimentellen Umgang mit Parallelen problematisierenden Bemerkungen machen natürlich das Unterrichten der Euklidischen Geometrie nicht schwieriger, sie geben nur dem Zitieren des Parallelenaxioms mehr Gewicht. Zum Abschluss dieser Diskussion noch ein weiteres Faltexperiment (das man auch zeichnen kann). Ich finde das Falten besonders überzeugend, weil sich die geraden Linien von alleine so schön "gerade" bilden.



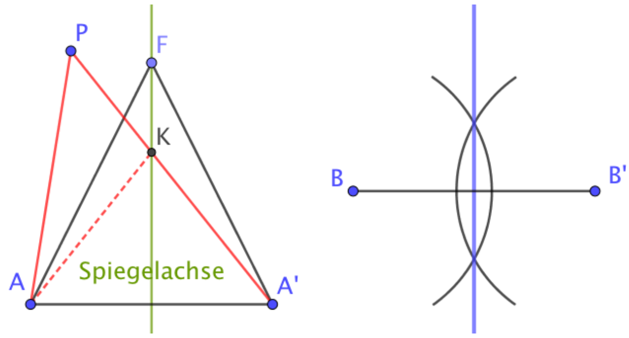
Die Faltlinien 1, 2, 3, 4 werden in dieser Reihenfolge gefaltet, so dass die drei bezeichneten 90° Winkel *nach Konstruktion* entstehen. Der mit "?" bezeichnete Winkel sieht wie 90° aus, ist aber nur in der Euklidischen Geometrie genau 90°. Der Globus ist ein Bild einer "sphärischen" Ebene. Einen derart gekrümmten dreidimensionalen Raum können wir uns nicht vorstellen, aber in einem solchen Raum würde das gefaltete Viereck wie auf dem Globus aussehen, der vierte Winkel wäre $> 90°$. Die Abweichung des vierten Winkels von 90° ist ein quantitatives Maß für den Unterschied zwischen der Euklidischen Geometrie und der Geometrie des Raumes, in dem das Faltexperiment gemacht wurde. Da nicht einmal Gauß einen Unterschied beobachten konnte, ist die Euklidische Geometrie ein gutes *Modell* für den uns umgebenden Raum.

Und noch eine Abschweifung aus der Mathematikgeschichte. Euklids Parallelenaxiom hat 2000 Jahre lang immer wieder Mathematiker zu Beweisversuchen verleitet. Das führte zu Beginn des 19. Jahrhunderts zur Entdeckung der *hyperbolischen Geometrie* durch Bolyai und Lobatschewski. Die beschriebenen Faltexperimente können auch in der hyperbolischen Geometrie durchgeführt werden. Der Versuch, ein Rechteck zu falten, führt zu einem Viereck mit drei rechten Winkeln und einem Winkel $< 90°$. Die weitere Folge davon ist, dass es durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden *g mehr als eine g nicht schneidende Gerade* gibt! Daran sieht man, warum das **Euklidische Parallelenaxiom** heißen muss:

> *Zu jedem Punkt P außerhalb einer Geraden g gibt es* **genau eine** *g nicht schneidende Gerade durch P. Diese Gerade heißt* **Parallele** *zu g.*

Dies Axiom hat dann zur Folge, dass das beschriebene Faltmanöver wirklich zu Rechtecken führt. Mit lauter gleichen dieser Rechtecke können wir die Euklidische Ebene pflastern, und zwar mit so kleinen Rechtecken, wie wir wollen. Das Rechteck ist die einfachste Figur, die eng mit dem Parallelenaxiom verbunden ist. Man kann sowohl Sphären wie hyperbolische Ebenen mit relativ großen kongruenten Dreiecken pflastern, aber man kann diese Pflasterungen nicht verfeinern zu Pflasterungen mit beliebig kleinen *kongruenten* Dreiecken. In allen drei Geometrien kann ein Dreieck durch die Verbindungen seiner Seitenmitten in vier *kleinere* Dreiecke zerlegt werden, aber nur in der Euklidischen Geometrie sind diese vier Teildreiecke kongruent.

Erstes geometrisches Argument: **Mittelsenkrechte**.



Wenn wir um die (grüne) Spiegelachse falten, kommt jeder Punkt A auf seinen Spiegelpunkt A' zu liegen. Die Strecke AA' ist senkrecht zur Spiegelachse. Für jeden Punkt F auf der Spiegelachse sind die Strecken FA und FA' gleich lang, weil sie beim Falten auf einander fallen. Der Punkt P liegt auf derselben Seite der Spiegelachse wie A. Die Strecke PKA' ist ebenso lang wie der bei K geknickte Streckenzug PKA. Die direkte Verbindung PA ist **kürzer als der Umweg** PKA - das wird in Zukunft als **Dreiecksungleichung** zitiert.
Es folgt: Die Punkte P auf derselben Seite wie A liegen *näher bei A als bei A'*. Also:

Die **Mittelsenkrechte** *zu zwei Punkten A, A' besteht* **genau** *aus den Punkten, die von A und A'* **gleich weit entfernt** *sind.*

Aus dieser *Charakterisierung* folgt, dass die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden, denn: Die *drei* Ecken sind vom Schnittpunkt von *zwei* Mittelsenkrechten *gleich weit* entfernt, also geht auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt, den Mittelpunkt des Umkreises. – Ebenso folgt: Die Mittelsenkrechte zu zwei Punkten B, B' kann wie im rechten Bild mit zwei gleich großen Kreisen konstruiert werden.

Randbemerkung: Diese Argumente zu Mittelsenkrechten funktionieren wörtlich ebenso in den anderen erwähnten Geometrien, der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie.

...

Noch ein Problem, das erst "im Unendlichen" auftritt, ehe die erwartete elementare Geometrie endgültig an der Reihe ist. Vielleicht nur ein Exkurs für die Lehrenden?

Der Satz von Desargues und die Projektive Ebene

Als in der Malerei die Perspektive Einzug hielt, wurde auch die *Projektive Ebene* entdeckt. Die Projektive Geometrie ist sehr eng mit der Euklidischen Geometrie verwandt, mit zwei wesentlichen Unterschieden:

P1. *Je zwei Geraden schneiden sich* und

P2. *Geraden zerlegen die Projektive Ebene nicht in zwei Hälften.*

Das Euklidsche Parallelenaxiom schließt die erste Eigenschaft aus. Argumente in der Euklidischen Geometrie müssen sich auch gegen die zweite Eigenschaft absichern. Dazu wird verlangt:

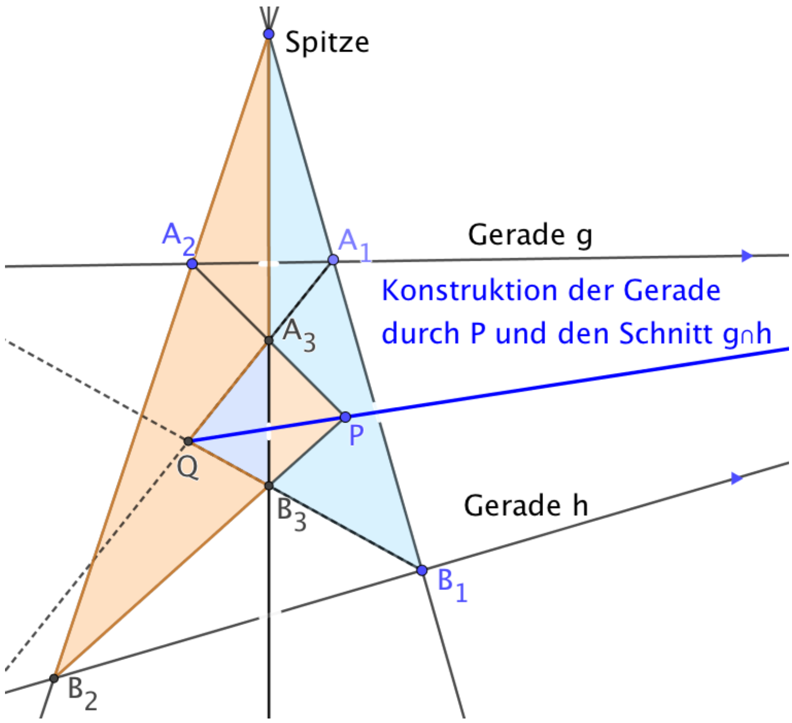
E1. *Jede Gerade g zerlegt die Euklidische Ebene in zwei Hälften.*

E2. *Die Verbindungsstrecke von zwei Punkten in verschiedenen Hälften schneidet g.*

Da die Schülerinnen und Schüler hieran nicht zweifeln werden, spielen diese Forderungen keine große Rolle für den Unterricht. Es gibt jedoch Situationen, wo deren explizite Erwähnung Unklarheiten vermeiden hilft. Außerdem ist es überraschend, dass etwas, das wie ein Trick zum Zeichnen daher kommt, die Euklidische Ebene in die Projektive Ebene verwandelt, in der dann P1, P2 statt E1, E2 gilt.

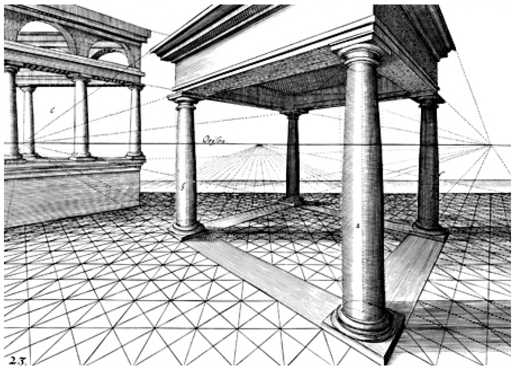
Die Sache beginnt mit einer harmlos klingenden, praktischen Frage: *Gegeben zwei Geraden g, h, die sich auf dem viel zu kleinen Zeichenpapier* **nicht** *schneiden. Wie verbindet man einen Punkt P mit dem Schnittpunkt dieser Geraden, der außerhalb des Papiers liegt?*
Die Idee ist, dass man sich P über der Zeichenebene vorstellt und die Schnittgerade (blau) der Ebenen $\mathrm{span}(P, g)$ und $\mathrm{span}(P, h)$ konstruiert und mit der Zeichenebene schneidet, natürlich im Schnittpunkt von g und h. Dazu braucht man den Hilfskeil, der durch drei Geraden durch die "Spitze" definiert ist.

Konstruktionsbeschreibung der Desargues-Figur:



Man wählt eine Spitze und zwei Geraden durch sie, die g in A_1, A_2 schneiden und h in B_1, B_2. Der Punkt P wird mit A_2 und B_2 verbunden. Schneide diese Strecken mit einer dritten Gerade durch die Spitze in A_3, B_3. Der Punkt Q ist Schnittpunkt der Geraden A_1A_3 und B_1B_3. *Die Gerade durch Q und P geht durch den Schnittpunkt von g und h!!*
Diese Behauptung folgt aus einer räumlichen Interpretation der gezeichneten Figur. Man stelle sich die beiden Geraden B_1A_1 und B_2A_2 zusammen mit der Spitze in der Zeichenebene vor. Die Gerade A_3B_3 steigt von der Spitze her an. Die drei Geraden durch die Spitze beranden also einen Keil. Die Geraden A_1A_3 und B_1B_3 liegen in der rechten Keilebene (blau) und schneiden sich in Q. Die Geraden A_2A_3 und B_2B_3 liegen in der linken Keilebene (rot) und schneiden sich in P. Die Gerade durch Q und P ist also die Schnittgerade der Ebenen $A_1A_2A_3 = \mathrm{span}(P, g)$ und $B_1B_2B_3 = \mathrm{span}(P, h)$. *Diese beiden Ebenen und die Zeichenebene schneiden sich im Schnittpunkt von g und h, durch den daher auch die Gerade QP gehen muss.*
Die Figur besteht also eigentlich nur aus zwei Keilen, dem schon beschriebenen Hilfskeil und dem Keil der von g, h und der gesuchten Gerade (blau) berandet wird. Beide Keile liegen mit einer Seitenfläche auf der Zeichenebene.

Überraschend wird das erst, wenn man beobachtet, dass diese Konstruktion auch funktioniert, wenn g und h in der Euklidischen Ebene **parallel** sind. Mit anderen Worten: Dieser Zeichentrick fügt der Euklidischen Ebene "Schnittpunkte" paralleler Geraden als sogenannte Fernpunkte hinzu. Und diese Fernpunkte waren in der perspektiven Malerei ebenfalls aufgetreten, als *Fluchtpunkte* solcher paralleler Geraden, die nicht parallel zur Zeichenebene sind, siehe nebenstehende Abbildung.



In dieser "Projektiven Ebene", also in der um die Fernpunkte erweiterten Euklidischen Ebene, kann man nun von P zu Q kommen, ohne die Gerade A_3B_3 zu treffen - man muss nur von P aus nach der anderen Seite loslaufen, durch den Fernpunkt auf die andere Seite von A_3B_3 gelangen und weiter auf der Geraden QP, bis man in Q ankommt.

Randbemerkung: Auch für die Projektive Ebene gilt: Sie ist spiegelsymmetrisch zu jeder Geraden, zu jedem Punkt gehört eine Punktspiegelung, zu je zwei Punkten gibt es eine Mittelsenkrechte - wie wir es kennen. Nur eben, statt E1, E2 gilt P1, P2.

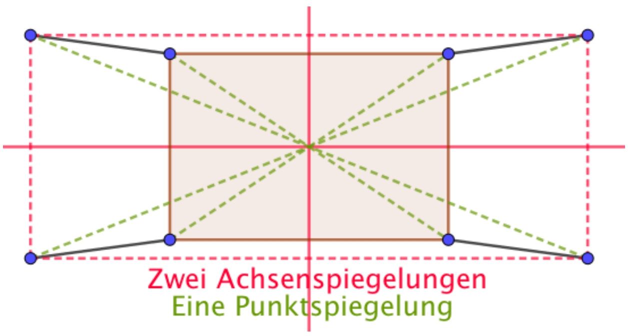
Randbemerkung: Die Eigenschaften E1, E2 gelten auch in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie.

Ich hoffe, dass jetzt die explizite Erwähnung der Eigenschaften E1, E2 gerechtfertigt erscheint, denn ein kleiner in der Malerei erfundener Schritt verändert jede Euklidische Ebene ja in eine projektive Ebene, also so, dass P1, P2 gelten.

Symmetrien und Abbildungen

Von Faltexperimenten ausgehend haben wir die Spiegelsymmetrien als eine beobachtete Eigenschaft behandelt. Man verschafft sich mehr Flexibilität, wenn man zusätzlich den Begriff Abbildung ins Spiel bringt: *Gegeben ist eine Spiegelachse. Wir definieren eine Abbildung der Ebene, indem wir jeden Punkt auf seinen Spiegelpunkt "abbilden".* Manche Leute mögen sich nicht so gerne eine Abbildung *aller* Punkte der Ebene vorstellen; in dem Fall genügt es, nur die Punkte aller gerade betrachteten Figuren abzubilden. Damit können wir jeden Punkt P der Ebene in jeden anderen Punkt Q abbilden, indem wir an der Mittelsenkrechten zu P und Q spiegeln.

Zum Beispiel haben die Rechtecke zwei Spiegelachsen, nämlich die Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gegenüber liegender Seiten. Eine solche Spiegelachse zerschneidet das Rechteck in zwei Hälften und die zugehörige Spiegelungsabbildung vertauscht die beiden Hälften. Der große Vorteil von Abbildungen ist, dass man sie hintereinander ausführen kann. Hintereinanderausführung der beiden Spiegelungen eines Rechtecks ergibt eine



180° Drehung des Rechtecks um den Schnittpunkt der Spiegelachsen. Sie wird auch "Punktspiegelung" genannt. Jedes Rechteck ist also auch "punktsymmetrisch". Die Punktspiegelung hat *drei Vorteile* gegenüber der Achsenspiegelung: Erstens können wir sie in der Ebene ausführen, es ist nicht nötig, das Papier durch den Raum zu klappen. Zweitens verdeckt keine umgeklappte Hälfte des Papiers alles, was auf dem Papier zu sehen war. Drittens sehen Spiegelbilder oft anders aus als ihre Urbilder, etwa Uhren. Deswegen ist die Punktspiegelung sehr bequem zu benutzen.

Weil man mit der Punktspiegelung sehr leicht Parallelen konstruieren kann, ist sie ein verblüffend leistungsfähiges Argumentationswerkzeug der Euklidischen Geometrie.

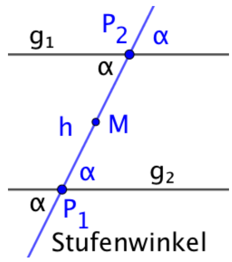
> Die Punktspiegelung an einem Punkt P außerhalb einer Geraden g bildet g auf eine zu g parallele Gerade g' ab.

Beweis: Wegen des Parallelenaxioms (Seite 3) gibt es eine Parallele h zu g durch P. Die Gerade h zerlegt die Ebene in zwei Hälften (Seite 4, E1). Die Punktspiegelung an P bildet h auf sich ab und vertauscht die beiden Hälften. Daher liegt das Bild g' in einer anderen Hälfte als g, kann also g nicht schneiden. Daher sind g und g' parallel.

Hieraus folgen viel benutzte Eigenschaften der Euklidischen Geometrie unmittelbar:

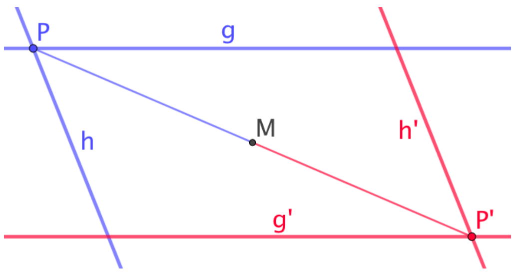
Anwendung 1: Stufenwinkel an Parallelen.

Gegeben zwei parallele Geraden g_1, g_2 und eine sie in P_1, P_2 schneidende Gerade h. Betrachte die 180° Drehung um den Mittelpunkt M zwischen P_1 und P_2. Sie bildet erstens die Gerade h auf sich ab und vertauscht P_1 und P_2. Zweitens bildet sie g_1 auf eine zu g_1 parallele Gerade durch P_2 ab, also auf g_2 - denn es gibt *nur diese eine(!)* Parallele zu g_1 durch P_2. Damit sind die beiden Schnittwinkel bei P_1 gleich den Schnittwinkeln bei P_2.



Folgerung 1: Konstruktion und Eigenschaften von Parallelogrammen.

Gegeben zwei Geraden g, h mit dem Schnittpunkt P und ein Punkt M nicht auf den Geraden. Die Punktspiegelung an M bildet g, h auf *parallele* Geraden g', h' ab, die sich im Bildpunkt P' von P schneiden. Die vier Geraden schneiden sich in einem Parallelogramm mit Diagonale PP' und Mittelpunkt M. Diagonal gegenüber liegende Winkel sind gleich und benachbarte Winkel ergänzen sich zu 180°. Die Teildreiecke sind flächengleich.



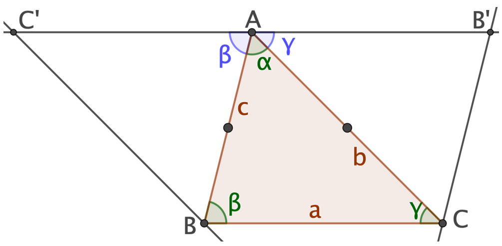
Folgerung 2: Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°.

Denn Folgerung 1 zeigt, dass jedes Dreieck durch 180° Drehung um den Mittelpunkt einer Seite zu einem Parallelogramm ergänzt wird. Jede Diagonale zerlegt ein Parallelogramm in zwei Dreiecke, die die 180° Drehung um den Mittelpunkt des Parallelogramms vertauscht. Daher haben Dreiecke die halbe Winkelsumme eines Parallelogramms: 180°.

Folgerung 3: Klassischer Beweis der Winkelsumme.

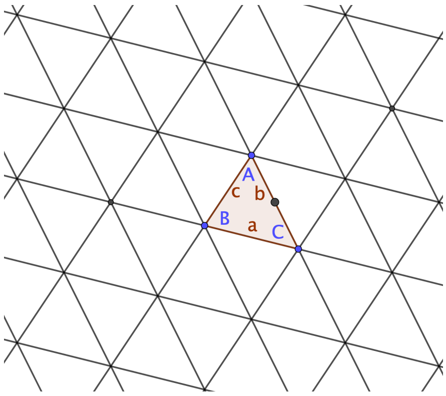
Zeichne zu einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüber liegenden Ecken A, B, C eine Parallele zu a durch A. Wegen des Stufenwinkelsatzes liegen dann bei A die Dreieckswinkel α, γ, β nebeneinander und ergeben zusammen 180°. (Die Schwierigkeit dieses Beweises liegt darin, dass die Hilfslinie *"Parallele zu a durch A"* nicht durch die Frage nach der Winkelsumme suggeriert wird.)

Alternativer Anfang: Rotiere das Dreieck um die Mittelpunkte der Seiten b, c um 180°. Dadurch werden die Winkel β, γ wieder bei A neben den Winkel α gelegt. Die Geraden $B'A$ und $C'A$ sind beide parallel zur Geraden BC, sind also **dieselbe** Gerade. Daher folgt auch so: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



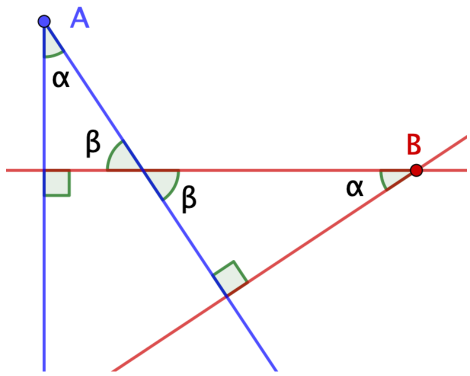
Folgerung 4: Pflasterung der Ebene mit Dreiecken.

Mit Folgerung 1 wird das gegebene Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzt. Zwei gegenüber liegende Parallelogrammseiten werden zu parallelen Geraden verlängert; dieser Parallelstreifen wird mit Kopien des Parallelogramms gepflastert. Schließlich wird die Ebene mit Kopien des Parallelstreifens gepflastert. - Das enstandene Bild sagt viel über die Euklidische Ebene, denn in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie gibt es solche Pflasterungen nicht.



Folgerung 5: Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht auf einander stehen, sind gleich.

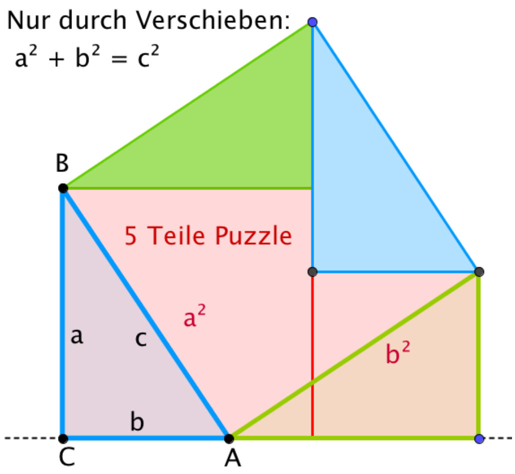
Die Schenkel des Winkels mit Spitze A (blau) stehen senkrecht auf den Schenkeln des Winkels mit Spitze B (rot). Der Schnitt der beiden Schenkelpaare liefert zwei rechtwinklige Dreiecke. Die mit β bezeichneten Winkel sind als Scheitelwinkel gleich. Nach Folgerung 2 sind auch die Winkelsummen der Dreiecke gleich. Daher sind die mit α bezeichneten Winkel bei A und B gleich.
Dieser Satz ist erstaunlich häufig ein nützlicher Hilfssatz.



Ergänzung: Parallelverschiebungen.
Parallelverschiebungen sind wichtige Abbildungen, sie kommen in allen Büchern, die ich gesehen habe, vor. Bandornamente sind übliche Veranschaulichungen. Argumentiert werden muss zum Beispiel, dass die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen an parallelen Achsen eine Parallelverschiebung ergibt. Ebenso ist die Komposition von zwei Punktspiegelungen eine Parallelverschiebung.

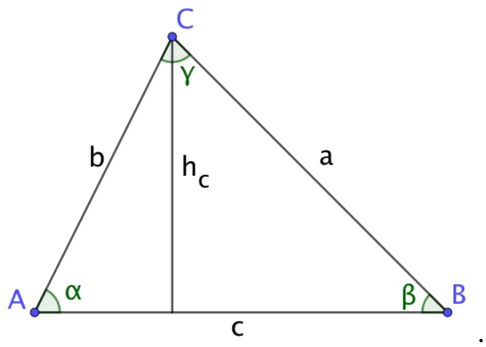
Die aufgezählten "einfachen Eigenschaften" beruhen auf dem Parallelenaxiom. Sie gelten nur in der Euklidischen Geometrie. Ich finde, diese Eigenschaften sind noch so nahe am Papierfalten, dass sie zu den Anfängen der Geometrie gehören. Hiernach kann man auf recht verschiedene Weise fortfahren.

Ich wähle unter verschiedenen Möglichkeiten für den nächsten Schritt die Dreiecksgeometrie, weil man schon durch Verschieben von zwei Dreiecken nebenstehenden Beweis ohne Formeln erhält. Bei vielen weiteren Konstruktionen müssen Dreiecke geschickt benutzt werden. Etwas später beruht ein großer Teil der räumlichen Geometrie darauf, dass man mit Dreiecken umgehen kann. *Für das Puzzle werden die zwei roten Quadrate mit zwei Schnitten in fünf Teile zerlegt.*
Aus der Euklidischen Geometrie wird **nur** vorausgesetzt, dass zwei Quadrate nebeneinander auf eine Gerade gestellt werden können (Quadratwinkel 90°).



Dreiecksgeometrie

Zunächst eine *stillschweigende* Übereinkunft:
Alle Dreiecke, die ich irgendwo gesehen habe, sind wie in diesem Bild **beschriftet**: Die Ecken heißen A, B, C im *Gegenuhrzeigersinn*, die gegenüberliegenden Seiten heißen a, b, c und die Winkel an den Ecken heißen α, β, γ. Das Lot von C auf die Seite c heißt "Höhe" h_c.
Das Spiegelbild dieses Dreiecks, also A, B, C im *Uhrzeigersinn*, habe ich wirklich nirgends gesehen. Durch diese Verabredung wird eine eindeutige sprachliche Ausdrucksweise sehr erleichtert.

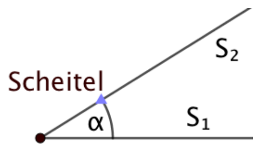


Schon kleine Kinder lernen Schraubverschlüsse zu öffnen und zu schließen. Dass sie dies Können ihrer Hände abstrakter als *Linksdrehung* und *Rechtsdrehung* zur Verfügung bekommen, finde ich nützlich. Das wird durch diese Beschriftungsverabredung unterstützt. Dann können sie sich später darüber wundern, dass auf der Nordhalbkugel die Sonne von Osten über Süden nach Westen wandert, während sie auf der Südhalbkugel von Osten über **Norden** nach Westen läuft.

Als nächstes brauchen wir **Winkel.**

Es gibt z.B. die Verabredung, Durchschnitte von Halbebenen mit nicht-parallelen Randgeraden als "Winkel" zu definieren. Das ist unzweckmäßig, weil dann ein nicht-konvexes Viereck einen Innenwinkel hat, der kein "Winkel" ist.

Wir definieren stattdessen zwei von einem Punkt ausgehende und nummerierte Halbgeraden als **"Winkel"**. Sie zerlegen die Ebene in zwei Sektoren. Der Sektor im Gegenuhrzeigersinn neben dem ersten Strahl ist normaler Weise durch die Nummerierung gemeint.

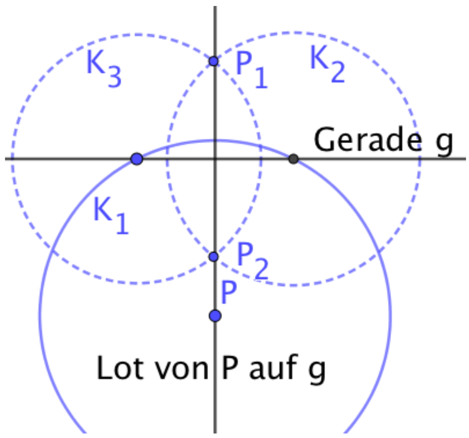


Man kann auch mit einem gebogenen Pfeil von Strahl zu Strahl ausdrücken, welchen Sektor man meint. Die Größe eines Winkels (auch "Weite" oder "Winkelmaß") geben wir wie bei Längen und Flächen positiv an, zwischen 0° und 360°. Erst für rotierende Räder oder für auf $\mathbb{R}$ definierte trigonometrische Funktionen werden wir auch negative Winkelgrößen brauchen.

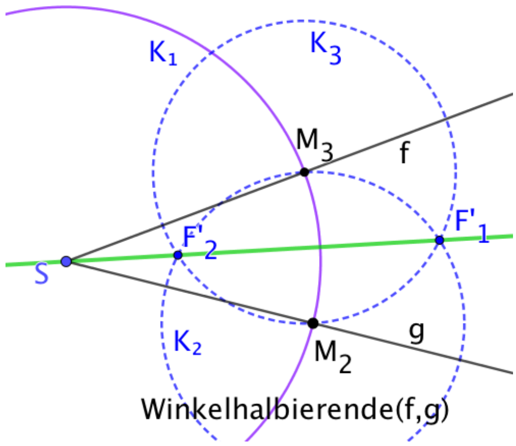
Kreise und Spiegelsymmetrien

In der Dreiecksgeometrie hat man oft Strecken gegebener Länge abzutragen. Das geht mit einem Zirkel wesentlich besser als beim auf gerade Linien konzentrierten Falten. Außerdem eignet sich der Kreis gut zum Argumentieren:
- *Kreise sind spiegelsymmetrisch zu jeder Geraden durch ihren Mittelpunkt.*
- *Die Mittelsenkrechte jeder Kreissehne geht durch den Mittelpunkt.*

Da das Umstellen von Zirkeln Zeit kostet und fehleranfällig ist, bevorzuge ich **Grundkonstruktionen** mit *gleich großen* Kreisen. Allerdings sind kleinere Kreise übersichtlicher:



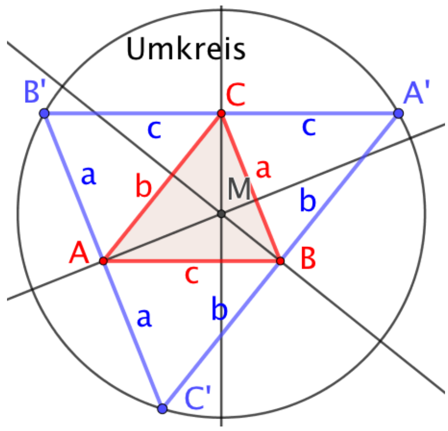
Die Schnittpunkte des Kreises K_1 um P mit g liegen gleich weit auf g beiderseits des Lotfußpunktes. Gleich große Kreise K_2, K_3 um diese Punkte schneiden sich auf dem Lot.



Der Kreis K_1 um den Scheitel S liefert die Punkte M_2, M_3 auf den Schenkeln g, f. Gleich große Kreise K_2, K_3 um M_2, M_3 schneiden sich auf der Winkelhalbierenden.

Als nächstes kommen wir zu **Schnittpunktsätzen am Dreieck.** Jeder dieser Sätze behauptet, dass sich **drei** am Dreieck definierte Geraden in **einem** Punkt schneiden.

Das Dreieck $A'B'C'$ ensteht, indem das Dreieck ABC um den Mittelpunkt jeder Seite um 180° gedreht wird. Die **Höhen** in ABC sind **Mittelsenkrechte** in $A'B'C'$. Ich erkläre (wie schon oben), warum sich die Mittelsenkrechten im Mittelpunkt des Umkreises schneiden: Schon der Schnittpunkt M von nur **zwei** Mittelsenkrechten ist gleich weit von A', B' und C' entfernt, ist also Mittelpunkt des Umkreises. Daher geht auch die dritte Mittelsenkrechte - einer Umkreissehne - durch M.
Diese Figur erläutert also zwei der Schnittpunktsätze: Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und die Höhen ebenso.

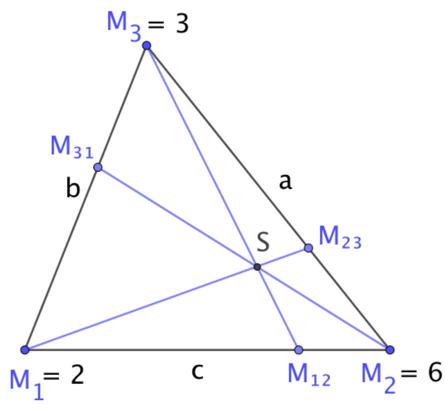


Den *üblichen Beweis* zum **Schnittpunkt der Seitenhalbierenden** zeigt die Figur zum Beweis des Strahlensatzes (Seite 15). Wir illustrieren hier einen allgemeineren Satz mit Hilfe eines Begriffs aus der Physik. *Historische Anmerkung:* Auch Archimedes hat mit Schwerpunkten argumentiert, um den Flächeninhalt von Parabelsegmenten zu **finden**. Er und seine Zeit betrachteten das nicht als Beweis, weil der Schwerpunkt nicht geometrisch sondern durch eine Formel definiert ist. Trotzdem wurde Archimedes dafür bewundert.

Schwerelinien Satz

Der Schwerpunkt $P_{1,2}$ von zwei Massen m_1, m_2 teilt *nach Definition* die Verbindungsstrecke von P_1 nach P_2 im Verhältnis $m_2 : m_1$ und er hat die Masse $m_1 + m_2$.

Eine wichtige Eigenschaft ist, dass der Schwerpunkt vieler Punkte schrittweise berechnet werden kann. Beispiel: nimmt man einen dritten Punkt P_3 mit Masse m_3 hinzu, so teilt der Schwerpunkt $P_{1,2,3}$ von allen drei Punkten die Strecke $P_3P_{1,2}$ im Verhältnis $(m_1 + m_2) : m_3$.
$P_{1,2,3}$ kann ebenso in den beiden anderen Reihenfolgen berechnet werden. Deshalb schneiden sich die drei Geraden von P_i nach $P_{j,k}$ im gemeinsamen Schwerpunkt S. (i, j, k sind zyklische Vertauschungen von $1, 2, 3$.) Die drei Geraden sind Seitenhalbierende, wenn die drei Massen gleich sind. Sie teilen sich dann wie $(1 + 1) : 1$.

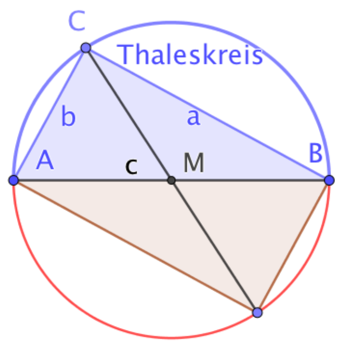


Beim Schnittpunktsatz über die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks geht es um Kreistangenten. Um die Tangenten von einem Punkt außerhalb an einen Kreis zu zeichnen, benötigt man den **Satz des Thales:**

a) *Ein einem Kreis einbeschriebenes Dreieck, dessen längste Seite ein Durchmesser ist, ist rechtwinklig.*

b) **Umkehrung:** *Der Umkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Mittelpunkt der Hypotenuse.*

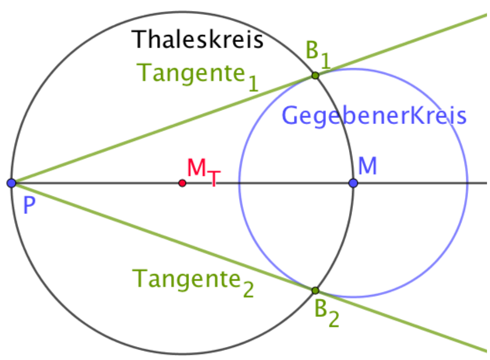
Wir wissen schon, dass ein Parallelogramm entsteht, wenn man ein Dreieck um den Mittelpunkt einer Seite um 180° dreht. Im Falle a) sind die Dreiecksseiten auch Kreissehnen, ihre Mittelsenkrechten gehen also durch den Mittelpunkt M des Kreises und sind daher Spiegelachsen des dem Kreis einbeschriebenen Parallelogramms - dies ist also ein Rechteck.



Im Falle b) haben wir nach Voraussetzung zwei 90° Winkel, also sind auch die beiden anderen 90°. Der Mittelpunkt dieses Rechtecks ist Umkreismittelpunkt.

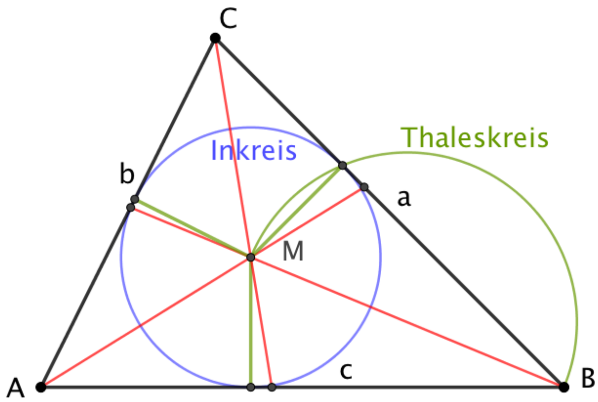
Tangentenkonstruktion:

Gegeben ist der blaue Kreis um M und der Punkt P. Hätte man die Berührpunkte B_1, B_2 der Tangenten, so wären PMB_1, PMB_2 rechtwinklige Dreiecke. Man findet die Berührpunkte, weil der Thaleskreis über der Strecke PM (Mittelpunkt M_T) den gegebenen Kreis in B_1 und B_2 schneidet. Die Gerade PM ist Winkelhalbierende der Tangenten PB_1, PB_2. Das Bild ist spiegelsymmetrisch mit Spiegelachse PM.



Schnitt der drei Winkelhalbierenden:

Von **jedem** Punkt einer Winkelhalbierenden sind die beiden Lote auf die Schenkel gleich lang. Schneide nun **zwei** Winkelhalbierende eines Dreiecks und betrachte die **drei** Lote vom Schnittpunkt M auf die drei Seiten. Die ersten beiden Lote sind gleich lang und ebenso die letzten beiden, also alle drei! Der Kreis um M durch die Fußpunkte dieser Lote berührt alle drei Seiten, ist also der Inkreis. Weil alle drei Seiten Tangenten an den Kreis sind, geht auch die dritte Winkelhalbierende durch M. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten (= Lotfußpunkte) werden wie in der Tangentenkonstruktion mit Thaleskreisen gefunden.
Alle vier Schnittpunktsätze geben also Gelegenheit zu logischer Argumentation.



Schnitt der Winkelhalbierenden

Kongruenzsätze

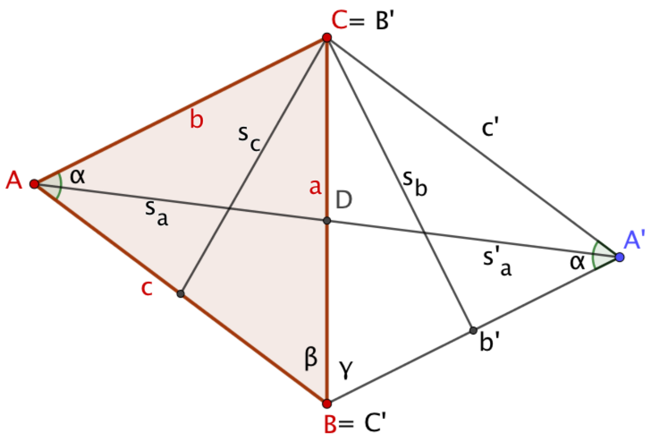
Die Kongruenzsätze sind in Schulbüchern aufgeführt. Sie besagen, dass Dreiecke durch Vorgabe von drei (geeigneten) Stücken konstruiert werden können. Mit "Stücke" sind Seiten und Winkel gemeint. Man muss dabei auf die Beschriftung der Dreiecke achten. Soll z.B. ein Dreieck aus den drei Seitenlängen konstruiert werden, so beginnt man mit der Strecke der Länge $|c|$ von A nach B. Dann schlägt man einen Kreis mit dem Radius $r = |b|$ um A und einen Kreis mit dem Radius $r = |a|$ um B. Diese Kreise schneiden sich in zwei Punkten C, C'. Die Dreiecke ABC und ABC' haben die gewünschten Seitenlängen, aber nur bei einem folgen sie *linksherum* in der "richtigen" Reihenfolge a, b, c. Beide Dreiecke sind Spiegelbilder von einander. "Geeignet" heißt in diesem Fall, dass die Summe von je zwei Seitenlängen größer als die dritte sein muss, *Dreiecksungleichung* z.B. $|c| < |a| + |b|$, weil ja zwei Seiten hintereinander ein "Umweg" gegenüber der direkten Verbindung durch die dritte Seite ist. Dieser Kongruenzsatz wird mit dem Namen "SSS" zitiert.

Grundsätzlich kann man in allen Fällen aus den Vorgaben ein Dreieck und sein Spiegelbild konstruieren, aber nur eines der beiden hat die Daten *linksherum* in der richtigen Reihenfolge. Sind etwa $\alpha, |c|, \beta$ gegeben, so ist c an Ecke A der erste Schenkel (S_1 auf Seite 8) von α, aber an der Ecke B ist c der zweite Schenkel von β. "Geeignet" heißt hier, $\alpha + \beta < 180°$, damit sich die freien Schenkel der beiden Winkel schneiden (statt auseinander zu laufen). Dieser Satz wird mit WSW zitiert. – Wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ liegt dieser Fall immer vor, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.
Bei dem Kongruenzsatz SWS sind zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel gegeben. Man beginnt mit der Seite, an der der Winkel linksherum anzutragen ist. Auf dem freien Schenkel wird die andere Seitenlänge abgetragen. Alle Daten sind "geeignet".

Schließlich gibt es noch “den” Kongruenzsatz “SSW”. Das sind eigentlich zwei Fälle. Es seien $|s_1| < |s_2|$ die beiden Seitenlängen. Im Fall S_2S_1W liegt der Winkel an einem Ende der kürzeren Seite und man muss um deren anderes Ende einen Kreis vom Radius $|s_2|$ schlagen. Dieser Kreis trifft den freien Schenkel nur einmal (der andere Schnittpunkt liegt auf der rückwärtigen Verlängerung des Schenkels). Das ist der einfache Fall. Im anderen Fall S_1S_2W liegt der Winkel an einem Ende der längeren Seite und man muss um deren anderen Endpunkt einen “kleinen” Kreis vom Radius $|s_1|$ schlagen. Dieser Kreis kann den freien Schenkel des Winkels *zweimal* schneiden, berühren oder *gar nicht* schneiden. Es gibt also entweder zwei Dreiecke mit den gegebenen Daten, ein rechtwinkliges Dreieck oder gar keines (= keine “geeigneten” Daten).

Bemerkungen. Zu meiner Schulzeit wurden Aufgaben zum Konstruieren von Dreiecken benutzt, um Verschiedenes zu üben: Feinmotorik der Hände, Vertrautheit mit ebenen geometrischen Figuren (weil ohne das Raumgeometrie nicht unterrichtet werden kann) und eben mein Hauptthema: *logisches Argumentieren.* Diese Beschäftigung ist für Leute meiner Generation - soweit sie nach der Schule nichts mehr mit Mathematik zu tun hatten - fast das Einzige aus dem Mathematikunterricht, woran sie sich mit irgendwelchen Details erinnern. Wenn etwas später die Verallgemeinerung des Thalessatzes zum Umfangswinkelsatz besprochen ist, dann gibt es auch Konstruktionsaufgaben, die zu etwas längerem Nachdenken anregen.

Schon ehe man über Beziehungen zwischen Kreisen und Winkeln nachdenken kann, bietet die Punktspiegelung Überraschungserfolge. Wenn man z.B. aus den von A ausgehenden Seiten b, c und der Seitenhalbierende s_a ein Dreieck konstruieren soll, dann sieht man zunächst keinen Anfang. Rotiert man aber das noch gesuchte, aber schon mal gedachte Dreieck ABC um den Mittelpunkt der Seite a um 180°, so entsteht nebenstehende Figur. Das Dreieck $AA'B$ kann mit den gegebenen Längen $|c|, |b|, 2|s_a|$ nach dem Kongruenzsatz “SSS” konstruiert werden.



Die Zeichnung zeigt sogar, wie man ein Dreieck aus den Längen der drei Seitenhalbierenden konstruiert (geht nur in der Euklidischen Geometrie wegen des 2:1 Verhältnisses).

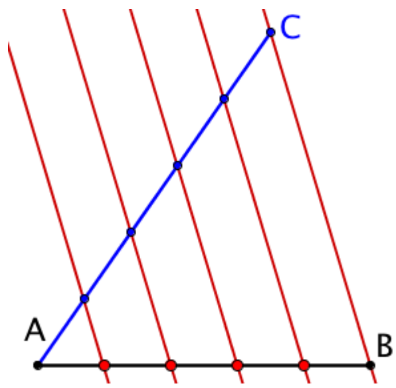
Da ich die *sphärische Geometrie* und die *hyperbolische Geometrie* in historischen Kommentaren erwähnt habe, füge ich hier hinzu: Die Schnittpunktsätze am Dreieck gelten auch in diesen Geometrien. Mit dem nun zu besprechenden Strahlensatz kommen wir zu einem Alleinstellungsmerkmal der *Euklidischen Geometrie.*

Der Strahlensatz

Vorbemerkung: Ich werde wieder Vergleiche mit der Geometrie der Kugeloberfläche einschieben, weil dadurch deutlicher wird, was in der Euklidischen Geometrie besonders ist. Dies ist jedenfalls für Lehrende gedacht, meine Erfahrung reicht nicht, solche Vergleiche für die Schule zu empfehlen. Allerdings sind mir bekannte Vorschulkinder am Globus erstaunlich interessiert. Selbstverständlich werde ich mit ihnen auch über Globusgeometrie reden.

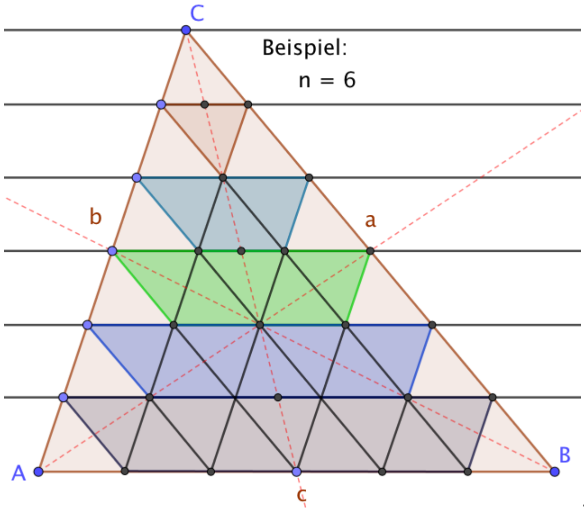
In einem Schulbuch habe ich gelesen, dass Figuren "ähnlich" sind, wenn sie durch "Vergrößerung" aus einander hervorgehen - sonst nichts. Es ist einfach, Kreise zu vergrößern: wir vergrößern "einfach" ihren Radius. Eine wichtige Euklidische Einsicht ist: Der Umfang wächst proportional zum Radius, $u(r) = 2\pi r$. Das ist auf der Sphäre nicht so: der Umfang des Äquators ist nur viermal so groß wie der Radius bis zum Nordpol und noch weiter nach Süden werden die Umfänge der Breitenkreise sogar kleiner! Dies Verhalten ist nicht, was wir mit "Vergrößerung" meinen und schon gar nicht mit "ähnlicher Vergrößerung". Das wird auch nicht besser, wenn wir Dreiecke betrachten: Beginne mit zwei Meridianen, die am Nordpol z.B. einen $60°$ Winkel bilden. Schneide die Meridiane mit einem Breitenkreis und verbinde die Schnittpunkte mit einem Großkreisbogen. Das ergibt ein gleichschenkliges sphärisches Dreieck. Bei Schenkellängen von Zentimetern erkennen wir keinen Unterschied zu Euklidischen Dreiecken. Sind die Schenkel auf 10000 km "vergrößert", reichen also bis zum Äquator, so ist die Basis zu kurz wegen $40000/6$ km < 10000 km, während die Höhe mit 10000 km deutlich zu lang ist - im Vergleich mit einem gleichschenkligen Euklidischen Dreieck mit $60°$ Winkel an der Spitze. – Wir werden daher das **Parallelenaxiom** und Folgerungen daraus benutzen, um "Vergrößerungen" genauer zu untersuchen.
Außerdem wird der vom Parallelenaxiom unabhängige Kongruenzsatz *'WSW'* verwendet:
Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und den anliegenden Winkeln überein, so stimmen sie auch in den anderen Seiten und dem dritten Winkel überein.

Wir erinnern an eine häufige **Anwendung** des Strahlensatzes, die Teilung einer gegebenen Strecke AB in n gleiche Teile. Das Verfahren geht so:
Es wird eine zweite aus n gleichen Teilen **hergestellte** Strecke AC gewählt und die Gerade BC gezeichnet. Dann zeichnet man durch die Teilpunkte von AC **Parallelen** zu BC und schneidet sie mit der gegebenen Strecke AB.
Behauptung: Diese Schnittpunkte teilen AB in n gleiche Teile.
In den nichteuklidischen Geometrien ist mir keine Konstruktion bekannt, die eine Strecke in n gleiche Teile teilt, wir haben es hier mit einer Konsequenz des Parallelenaxioms zu tun. Der folgende Beweis zeigt, dass die konstruierten Teile der Strecke AB wirklich kongruent sind und die Strecke BC wird im Beweis ebenfalls in n gleiche Teilstücke geteilt. Dieser Beweis wird zweimal hintereinander benutzt: Beim ersten Mal ist die Strecke AC wie in dieser Anwendung mit einer Unterteilung hergestellt, beim zweiten Mal sind alle Dreiecksseiten ohne Unterteilung, aber man weiss jetzt, wie man die Seite AC in n gleiche Teile teilt.



Konstruktionsbeschreibung zum Strahlensatzbeweis:

Die Seite AC *ist(1) oder wird(2)* in n gleiche Teile geteilt. Ziehe durch die Teilpunkte Parallelen zu AB und schneide sie mit BC. Markiere die Mittelpunkte dieser Sehnen zwischen AC und BC. Rotiere das oberste Teildreieck zusammen mit den Geraden AC und BC um den obersten Mittelpunkt um 180° Grad in den zweitobersten Parallelstreifen. Die gedrehte Gerade BC schneidet aus dem Parallelstreifen ein Dreieck aus, das mit seiner linken Seite und den anliegenden Winkeln nach dem *Stufenwinkelsatz(!)* mit dem Spitzendreieck übereinstimmt, also kongruent zu diesem ist. Daher liegt die Spitze des gedrehten Dreiecks, wie gezeichnet, auf der nächsten Parallelen. Also entsteht rechts daneben ein weiteres Dreieck, das mit seiner linken Seite und den anliegenden Winkeln mit dem Spitzendreieck übereinstimmt. Damit sind die beiden obersten (von den Parallelen ausgeschnittenen) Teilstrecken von BC gleich lang – man kann also schon erwarten, dass der Beweis Erfolg haben wird.



Im nächsten Schritt werden die drei Dreiecke der zweiten Zeile um den zweiten Mittelpunkt in die dritte Zeile gedreht. Die dabei entstehenden äußeren Dreiecke sind wie eben kongruent zu dem Spitzendreieck - also sind schon die ersten drei Teilstrecken von BC gleich lang! Das wird bis zur n-ten Zeile (die $2n-1$ Dreiecke enthält) fortgesetzt. Danach ist das Ausgangsdreieck ABC wegen

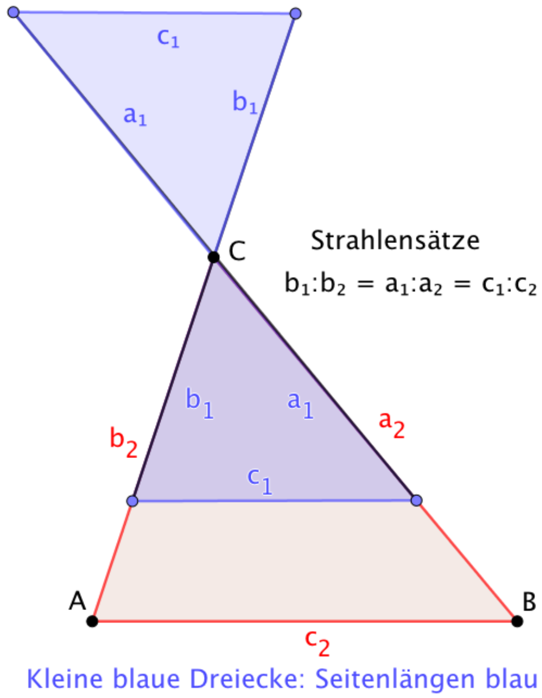
$$(1+3+\ldots+2n-3+2n-1) \quad + \quad (2n-1+2n-3+\ldots+3+1) \quad = n \cdot 2n = 2n^2$$

mit n^2 Dreiecken gepflastert, die alle **kongruent** zu dem Teildreieck an der Spitze sind.

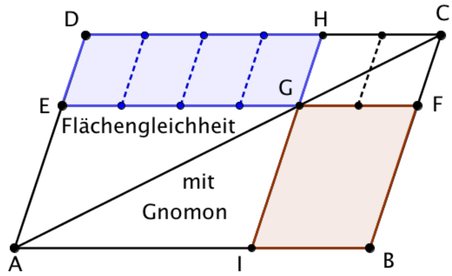
Die Parallelen dieser Konstruktion teilen die Seiten AB und BC in n **gleiche** *Teile.*

Das beweist die Strahlensätze für alle in der Figur vorkommenden Paare aus Dreieck und Teildreieck.

Was ist damit erreicht? Da die Zahl n im Beweis beliebig war, sind damit die Strahlensätze für den Fall bewiesen, dass das auftretende Streckenverhältnis **rational** ist. Schon Archimedes hat das Eudoxos Axiom benutzt, um solche Aussagen von rationalen auf irrationale Verhältnisse von Größen, zum Beispiel Längen, auszudehnen. Das war ein erstaunlicher Fortschritt, denn es gab noch keine *Zahlen*, um auch irrationale Verhältnisse zu beschreiben, aber trotzdem konnte *Gleichheit* irrationaler Verhältnisse festgestellt werden!
Außerdem zeigt die zum Beweis verwendete Dreieckspflasterung für jedes $n = 3k$, dass die Seitenhalbierenden sich in einem Punkt schneiden und sich im Verhältnis $2:1$ teilen.



Die häufigsten Beweise der Strahlensätze verwenden **Formeln** für Flächeninhalte. Sie scheinen ohne das Archimedes Argument auszukommen. Aber da die Untersuchung von Flächeninhalten mit dem Einheitsquadrat beginnt, bekommt man die Flächenformel für Rechtecke zuächst auch nur für rationale Seitenlängen. Das Archimedes Argument ist also von Anfang an in Flächenformeln enthalten, es braucht daher bei diesen Strahlensatzbeweisen nicht wiederholt zu werden.
In dieser schönen Figur sind das blaue und das rote Parallelogramm *ohne Formeln* flächengleich, weil die Diagonale AC sowohl das große Parallelogramm $ABCD$ als auch die beiden weißen Teilparallelogramme in gleiche Hälften teilt. Falls das Streckenverhältnis $DH : HC$ rational ist, so sieht man ebenfalls *ohne Formeln*, dass dies Streckenverhältnis gleich dem Flächenverhältnis der Parallelogramme $EGHD$ und $GFCH$ ist, also auch gleich dem Flächenverhältnis der Parallelogramme $IBFG$ und $GFCH$. Daher teilt F auch die Strecke BC rational im gleichen Verhältnis. Damit verhalten sich die Längen aller nicht auf der Diagonale AC liegenden Dreiecksseiten im richtigen – bisher rationalen – Verhältnis. Das Archimedes Argument vervollständigt den Beweis, sobald man irrationale Zahlen kennt.

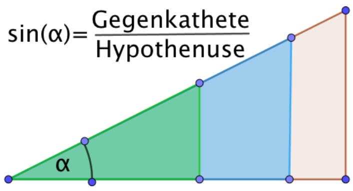


Kommentare zum Strahlensatz

Da der Strahlensatz viel häufiger **mit** Flächenformeln als **ohne** diese bewiesen wird, weise ich darauf hin, dass das n-Teilungsproblem auch am Anfang der Flächenlehre auftritt, da man ein Quadrat der Kantenlänge $1/n$ finden muss, mit dem man sowohl das Einheitsquadrat wie auch ein gegebenes Rechteck mit rationalen Kantenlängen pflastern kann. Das geht tatsächlich ohne den Strahlensatz, indem man, analog zur ggT-Bestimmung, die kleinere Strecke so oft von der größeren abzieht, bis ein noch kleinerer Rest bleibt, usw..

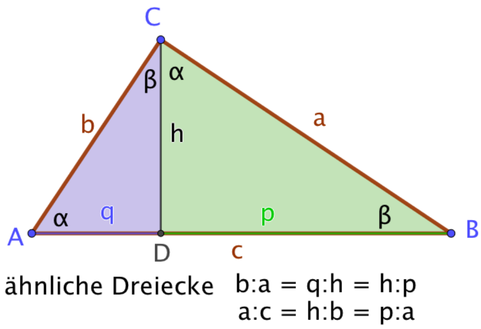
Obwohl ich die Gnomon-Figur schön finde, ziehe ich den obigen Beweis vor, weil für mich die Strahlensätze mehr mit Vergrößern als mit Formeln für Flächenmaße zu tun haben. Das Bild zum Strahlensatzbeweis zeigt zu Flächeninhalten: Wenn man ein Dreieck mit dem rationalen Faktor λ vergrößert, so wächst der Flächeninhalt um den Faktor λ^2 – auch schon, bevor man eine Formel für den Dreiecksinhalt hat.

Nur mit dem Strahlensatz kann man die nebenstehende Definition machen. Auch “Vergrößerungen” und “zentrische Streckungen” kann man mit seiner Hilfe definieren. Die Ähnlichkeitslehre kann beginnen.



Dazu gehören auf jeden Fall die ähnlichen Teildreiecke eines rechtwinkligen Dreiecks mit den aus dem Strahlensatz folgenden Verhältnissen, die mit dem Höhensatz: $p \cdot q = h^2$ und dem Satz des Euklid: $p \cdot c = b^2,\ q \cdot c = a^2$ äquivalent sind. Damit gilt auch

$$c^2 = (p+q) \cdot c = a^2 + b^2.$$



Da das ästhetische Ansehen dieses Satzes auf der Formulierung mit Flächeninhalten beruht, möchte ich hinzufügen, dass die Flächeninhalte der drei ähnlichen Dreiecke ABC, BCD, CAD durch Multiplikation mit demselben Faktor $2c^2/ab = 2a^2/hp = 2b^2/qh$ in die Flächeninhalte ihrer Hypotenusenquadrate verwandelt werden. Dass die beiden Teildreiecke sich zu dem Dreieck ABC zusammenfügen, ist also auch ein Beweis des Satzes von Pythagoras.

Zur Satzgruppe des Pythagoras habe ich eine schöne Schulbuchbehandlung gefunden, vielseitig, beweisend und nicht verbal überladen in den Anwendungen. Trotzdem bleibt die Frage, einen wie dauerhaften Erfolg man erzielen kann, wenn solch eine echt mathematische Behandlung nur bei einer einzigen Gelegenheit stattfindet, als Zugeständnis an die Berühmtheit dieses Satzes.