Script zu Mathematik I
Prof. Karcher
WS 99/00

Lukas Pustina, Simon Schwarzer

21. Januar 2001

Vorwort

Wir haben dieses Script für uns als Dokumentation der Vorlesung und für die Vorbereitung auf das Vordiplom geschrieben.
Da uns viele Kommilitonen auf eine Veröffentlichung hin angesprochen haben, haben wir uns mit Herrn Prof. Karcher zusammengesetzt und unser Script komplett überareitet, so dass eine hoffentlich fehlerfreie Mitschrift der Vorlesung entstand.
Da Prof. Karcher das Script korrekturgelesen hat, hoffen wir, dass die meisten Fehler ausgeräumt sind.
An dieser Stelle möchten wir uns ganz herzlich bei Herrn Prof. Karcher für seine Unterstützung bei der Erstellung und Veröffentlichung bedanken.

Wir hoffen, dass Euch das Script genauso helfen wird wie uns.
In diesem Sinne
Lukas Pustina & Simon Schwarzer

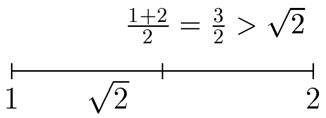
Inhaltsverzeichnis

1 Anfangsbeispiele

1.1 Rechnen mit rationalen Zahlen und Ungleichungen

1.1.1 Irrationale Zahlen durch Approximationen beschreiben

Am Beispiel von $\sqrt{2}$
Skizze:



$$1 < \sqrt{2} < 2$$

Neue obere Grenze:

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$$

Neue untere Grenze:

$$\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

Wiederholung des Vorgangs mit neuen Werten:
Neu obere Grenze:

$$\frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) * 6}{2 * 6} = \frac{17}{12}$$

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} > 2$$

Neue untere Grenze:

$$\frac{2}{\frac{17}{12}} * \frac{12}{12} = \frac{24}{17}$$

$$\left(\frac{24}{17}\right)^2 = \frac{576}{289} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$$

Genauigkeit von:

$$\frac{17}{12} - \frac{24}{17} = \frac{17 * 17 - 24 * 12}{12 * 17} = \frac{289 - 288}{204} = \frac{1}{204}$$

Überprüfung der Allgemeingültigkeit
Voraussetzung: $\sqrt{2} < a \leq 2$
Intervall: $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$

Experimentell: $\frac{\frac{2}{a}+a}{2}$ neue obere Schranke
Trifft dies immer zu: $\frac{1}{a} + \frac{a}{2} > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{2}\right)^2 > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \underbrace{2(\frac{1}{a} * \frac{a}{2})}_{1} + \frac{a^2}{4} > 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 1 + \frac{a^2}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{a} - \frac{a}{2}\right)^2}_{>0} > 0$$

Das Approximationsintervall wird bei jedem Schritt min. halbiert.
Strategie:
$\boxed{\text{Statt } y > x \text{ zu beweisen ist es meistens einfacher } y - x > 0 \text{ zu beweisen.}}$

Schlußstein der Strategie:
$\boxed{\text{Quadrate sind } \geq 0.}$

1.1.2 Beispiel für indirekten Beweis

Satz: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl
[Indirekter Beweis]
Alles andere als die Behauptung ist Quatsch, d.h. $\sqrt{2} = \frac{Z}{N}$ ist unmöglich.

$$\left[\begin{array}{c} 1 < \frac{Z}{N} < 2 \\ N < Z < 2N \end{array}\right]$$

Alle rationalen Zahlen $\in [1, 2]$ mit Nenner $\leq$ N sind nur endlich viele.
Wahl der Darstellung mit dem kleinsten Nenner.

$$\sqrt{2} * \sqrt{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} * \sqrt{2} - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1) * (\sqrt{2}+1) = 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 1$$
$$= \frac{N}{Z-N} - 1 = \frac{2N-Z}{Z-N}$$

$\Rightarrow$ Entgegen der Wahl von $\frac{Z}{N}$ haben wir jetzt einen Bruch mit noch kleinerer Nenner, da aus der Voraussetzung $\Rightarrow 0 < Z - N < N$

1.1.3 Gerüst eines indirekten Beweis

1. Angenommen die Behauptung sei falsch
2. Bequeme Umformulierung (meistens sehr kurz)
3. Leite aus 2) einen Widerspruch her (viele Möglichkeiten, kein Rezept)
   d.h. die Negation der Behauptung ist unmöglich
   Also gilt Behauptung

2 Varianten für 2) $\rightsquigarrow$ 3)

1. Unter Benutzung der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung (Euklid)

   $$\sqrt{2} = \frac{Z}{N} \Leftrightarrow 2 = \frac{Z^2}{N^2} \Leftrightarrow 2 * N^2 = Z^2$$

   Jetzt werden die Primzahlzerlegungen von N und Z eingesetzt

   $$\underbrace{2 * \underbrace{N * N}_{geradeAnzahl}}_{ungeradeAnzahlvonPrimfaktoren} = \underbrace{Z * Z}_{geradeAnzahlvonPrimfakorten} \Rightarrow \neq$$

2. Ohne andere Hilfsmittel
   siehe 1.1.2

1.2 Körperaxiome

Die Frage ist nicht „Was sind Zahlen?“, sondern „Nach welchen Regeln rechnet man mit Zahlen?“.
Kann man mit anderen Dingen nach denselben Regeln rechnen?
Wenn man betonen will, dass man beim Rechnen garantiert nichts anderes als die aufgeführten Regeln verwenden will, dann nennt man die Regeln $\boxed{\text{Axiome}}$.

$$\begin{array}{rcll}
a+(b+c) & = & (a+b)+c & \text{Assoziativgesetz der Addition} \\
a*(b*c) & = & (a*b)*c & \text{Assoziativgesetz der Multiplikation} \\
a+b & = & b+a & \text{Kommutativgesetz der Addition} \\
a+b & = & b+a & \text{Kommutativgesetz der Multiplikation} \\
a*(b+c) & = & (a*b)+(a*c) & \text{Distributiv} \\
 & & & \textit{z.B. für natürliche Zahlen } \mathcal{N} \\
a+0 & = & \text{a} & \text{Neutrales Element der Addition} \\
a*1 & = & \text{a} & \text{Neutrales Element der Multiplikation} \\
a+b & = & 0 & \text{geschrieben: b = (-a) Additives Inverses} \\
 & & & \textit{z.B. für ganze Zahlen } \mathcal{Z} \\
a*b & = & 1 & \text{geschrieben: b} = \frac{1}{a} = a^{-1} \text{ Multiplikatives Inverses} \\
 & & & \textit{z.B. für rationale Zahlen } \mathcal{Q}
\end{array}$$

Namen zu den Rechenregeln:
Die, die sich nur auf die Addition beziehen (assoz., kom., neut., invers.) „Axiome für kommutative Gruppe“
Die, die sich nur auf die Multiplikation beziehen (assoz., kom., neut., invers.) „Axiome für kommutative Gruppe“
Distributivgesetz
Regeln für die rationalen Zahlen als Axiome heißen Axiome für Körper.
Das Inverse der Multiplikation spielt eine Sonderrolle, weil (z.B. $\mathcal{Z}$) die Multiplikation nicht immer invertierbar ist.

1.2.1 Beispiele für das Endziffernrechnen

- Erstes Beispiel:
  Wie rechnet man mit den Endziffern im Zehnersystem?

  $$\begin{array}{cr} & 3 \\ + & 9 \\ \hline = & 12 \end{array} \qquad 3+9=2$$

  Inverses bezüglich der Addition: $a+(10-a)=0$
  Inverses bezüglich der Multiplikation: $2*5=0$; nicht erfüllt!
  Für 2 gibt es kein inverses Element, da die Multiplikation mit 2 nie die Endziffer 1 ergeben kann
  Das Rechnen mit den Endziffern in unserem dezimalen Ziffernsystem erfüllt alle Körperaxiome außer der Existenz eines multi. Inversen.

- Zweites Beispiel:
  Wie rechnet man mit den Endziffern im Ziffernsystem zur Basis 5?

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

- Spiegelsymmetrie an der Diagonalen $\Rightarrow$ Kommutativität.
- Neutrales Element erfüllt.
- Assoziativgesetz gilt zwar, ist aber nicht auf einen Blick ablesbar. Vergleiche später: Rechnen mit Rerpäsentanten.
- Inverse Element: Die Zahl die ,,über" der 0 bzw. 1 steht.

$\Rightarrow$ Alle Körperaxiome für das Rechnen mit Endziffern im 5-er System erfüllt.

Nachtrag zu den Körperaxiomen:
Frage: Kann man mit Zahlenpaaren (a,b) $a, b \in \mathcal{Q}$ so rechnen, dass die Körperaxiome erfüllt sind?

$$\text{kommutative Gruppe} \left\{ \begin{array}{ll} (a,b)+(c,d) := (a+c, b+d) & \text{,,Komponenten addieren"} \\ (0,0) & \text{neutrales Element} \\ (a,b)+(-a,-b) = (0,0) & \text{Inverses der Addition} \end{array} \right.$$

Multiplikation ?
Neutrales Element: (1,1)
1.Versuch:

$$(a,b) * (c,d) := (ac, bd)$$

$$(1,0) * (0,1) = (0,0) \text{ Invertieren unmöglich}$$

Vor dem 2. Versuch ,,Interpretation": $(a + b\sqrt{2}) * (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$

(a, b) soll bedeuten $(a+b\sqrt{2})$ also: $(a+b\sqrt{2})*(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(ad+bc)*\sqrt{2}$

Neue Definition der Multiplikation:

$$(a,b) * (c,d) := (ac + 2bd, ad + bc)$$

Neutrales Element:

$$(a,b) * (1,0) = (a,b)$$

Inverses Element:

$$(a,b) * \left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \right) = (1,0)$$

Jedes $(a, b) \neq (0, 0)$ soll invertiert werden. Wegen $a, b \in \mathcal{Q}$ und $\sqrt{2}$ irrational ist $a^2 - 2b^2 \neq 0$ falls $(a, b) \neq (0, 0)$.

1.3 Schubfachprinzip

Betrachte die ganzen Zahlen $\mathcal{Z}$ und eine Primzahl p.
Wir wollen zwei Zahlen $m, n \in \mathcal{Z}$ nicht unterscheiden falls $m - n$ durch p teilbar.
Wir nennen m und n ,,restgleich bei Division durch p" falls $m - n$ durch p teilbar.
Als Formel:

$$\boxed{m \equiv n \bmod \text{p}}$$

Zwei Zahlen $m, n \in \mathcal{Z}$ für die gilt $m \equiv n$ mod p haben die gleiche „p-Endziffer“, wenn ich die Zahlen im Positionssystem zur Basis p schreibe.
Addition und Multiplikation der Endziffern wie an den Beispielen mit 10 und 5 vorgeführt.
Alle Körperaxiome bis auf das Invertieren der Multiplikation sind klar.
Diese Tatsache soll bewiesen werden.
Der Beweis beruht auf dem sog. Dirichletschen Schubfachprinzip

Endlich viele Schubfächer	Die Schubfächer sind die Restklassen mod p also $[0,]1, 2, ..., p-1$
In jedem liegt ein Objekt	Wähle ein $k \not\equiv 0$ mod p fest. Dies k soll invertiert werden
Sie nehmen die Objekte heraus und legen sie in unübersichtlicher Weise wieder hinein. Falls in keinem Fach mehr als ein Objekt liegt, so liegt wieder in jedem Fach eins.	Nimm die Reste $1, ..., p-1$ multipliziere mit k und lege die Produkte in das richtige Fach Behauptung: Falls $a \not\equiv b$ mod p oder $(a-b) \not\equiv 0$ mod p, so ist auch $k * a \not\equiv k * b$ mod p $(k * a - k * b) = k * (a-b) \not\equiv 0$ mod p, denn

Voraussetzung: $k \not\equiv 0$ mod p, $c \not\equiv 0$ mod p
Beh.: $k * c \not\equiv 0$ mod p oder „$k * c$ ist nicht durch p teilbar“
Anwendung: $(a-b) = c \not\equiv 0$ mod p
$1 \leq k \leq p-1$
$1 \leq c \leq p-1$
Stellen Sie sich die Primzahlzerlegung von k und c vor $\Rightarrow$ Die Primzahlzerlegung von $k * c$ enthält nur Faktoren $< p$, also ist $k * c$ nicht durch p teilbar.

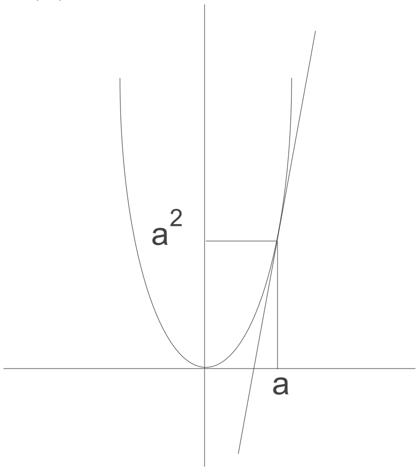
$$\text{Die Anfangsbeispiele} \begin{pmatrix} \text{A:} & \text{Rechnen mit nat. Zahlen und Ungleichungen} \\ \text{LA:} & \text{Rechnen nach den Körperaxiomen} \end{pmatrix}$$
sind erledigt

2 Tangenten

2.1 Polynomfunktionen und ihre Tangenten

2.1.1 Sehnensteigung

$P(x) = x^2$



Sehnensteigung:
(x, x^2): beliebiger Punkt links oder rechts von (a, a^2).

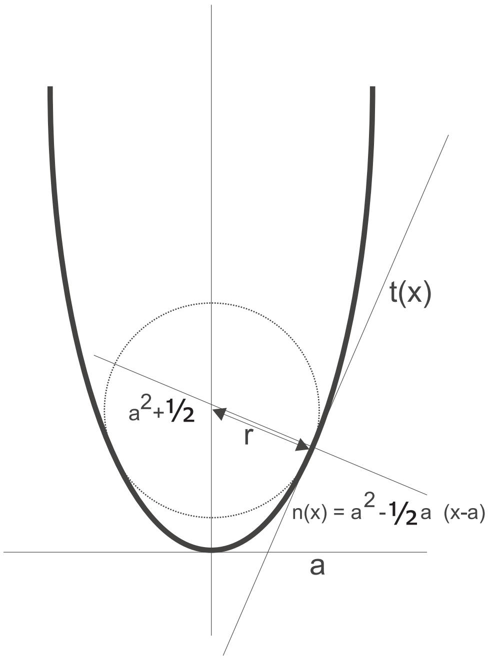
$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \quad \text{Sehnensteigung über dem Intervall } [a, x], [x, a]$$

Falls $x > a$ so ist $x + a > 2a$
Falls $x < a$ so ist $x + a < 2a$
Verleitet dazu als Steigung der Tangente an der Stelle a, a^2 die Zahl $m = 2a$ zu nehmen.
$t(x) = \underbrace{a^2}_{Wert} + \underbrace{m}_{Steigung} *(x - \underbrace{a}_{Stelle})$
hat die Steigung m
hat an der Stelle $x = a$ den Wert $t(a) = a^2$
<u>1. Eigenschaft:</u>
Der Graph der Parabel $P(x) = x^2$ liegt oberhalb unserer (vorläufigen) Tangente.
In Formeln: an jeder Stelle x ist $x^2 \geq \underbrace{a^2 + 2a*(x-a)}_{\text{Tangente an der Stelle a}}$
lieber:

$$\begin{aligned} & x^2 - (a^2 + 2a*(x-a)) \geq 0 \\ = \; & x^2 - a^2 - 2a(x-a) \geq 0 \\ & (x-a)(x+a) - 2a(x-a) \\ = \; & (x-a)(x+a-2a) = (x-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tangenten sind schon in Einzelfällen nützlich:

Erklärung des Hohlspiegels mit Hilfe der Normalen zur Tangente.
2. Eigenschaft:
An jeder Stelle (a, a^2) liegt der Graph zwischen seiner Tangente und einem berührendem Kreis.



$\frac{-1}{2a}$ orthogonale Steigung zu $2a$
$n(0) = a^2 + \frac{1}{2}$
Kreisgleichung:

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

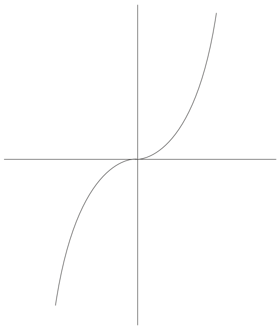
Hier:

$$x^2 + (y - (a^2 + \frac{1}{2}))^2 = a^2 + \frac{1}{4}$$

Behauptung: Die Parabel (x, x^2) liegt außerhalb dieses Kreises.
Welche Ungleichung beschreibt diesen Sachverhalt?
(x, y) liegt außerhalb des Kreises, wenn die Werte in die Kreisgleichung eingesetzt $\geq r^2$ sind.

$$\begin{array}{ll} & x^2 + (x^2 - (a^2 + \frac{1}{2}))^2 \geq a^2 + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & x^2 + (x^4 - 2x^2 * (a^2 + \frac{1}{2}) + (a^2 + \frac{1}{2})^2) - a^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + x^4 - 2a^2x^2 - x^2 + a^4 + a^2 + \frac{1}{4} - a^2 - \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & x^4 - 2x^2a^2 + a^4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - a^2)^2 \geq 0 \end{array}$$

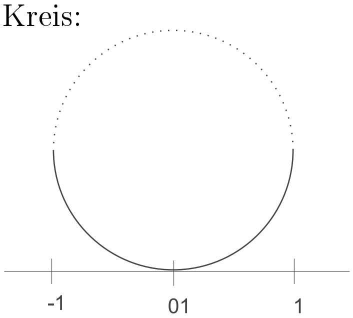
Dies Verfahren kann auch bei anderen Potenzen angewandt werden, jedenfalls beinahe:
Graph: $x \to x^3$
Alle Sehnensteigungen sind > 0



Steigung in 0 sollte 0 sein, aber mit Verfahren nicht möglich.
Das Problem tritt z.B. auch bei $x^2 - x^4$ auf. Daher fragen wir:
Wie weit weicht eigentlich die Tangente von dem Graphen der Funktion ab?
Parabel:

$$x^2 - (a^2 + 2a * (x - a)) = (x - a)^2$$

Kreis:

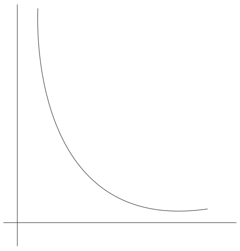


$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = 1 - x^2$$
$$\Leftrightarrow (y-1) = -\sqrt{1-x^2}$$
$$\Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} + 1$$
$$= \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{1+\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}} \begin{array}{l} \leq x^2 \\ \geq \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

Nenner liegt zwischen 1 und 2

Tangente in 0 : $t_0(x) = 0$
In diesen beiden Beispielen ist die Abweichung von der Tangente $\leq (x-a)^2$ und a die Berührstelle.

2.1.2 Ein weiteres Beispiel



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad 0 < x$

Wie werden sich die Sehnensteigungen monoton verhalten und die Abweichungen von der Tangente werden quadratisch sein.

Sehnensteigungen, ein Endpunkt in $(a, \frac{1}{a})$

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} * \frac{(x * a)}{(x * a)} = \frac{\frac{xa}{x} - \frac{xa}{a}}{(x - a)(x * a)} = -\frac{1}{x * a}$$

Falls $\quad x > a \quad$ so ist $\quad -\frac{1}{xa} > -\frac{1}{a^2}$

$x < 0 \quad$ so ist $\quad -\frac{1}{xa} < -\frac{1}{a^2}$

$-\frac{1}{a^2}$ ist zwischen den linksseitig und rechtsseitigen Sehnensteigungen, also ist $m = -\frac{1}{a^2}$ ein guter Kandidat für die Steigung des Graphen an der Stelle a. In der Tat:

$t(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} * (x - a)$

Unterschied zwischen Funktion und Tangente

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} * (x - a)\right) =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}(x - a) =$$

$$-\frac{x - a}{x * a} + \frac{1}{a^2}(x - a) =$$

$$\frac{(x - a)}{a} * \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\right) =$$

$$\frac{x - a}{a} * \frac{x - a}{xa} =$$

$$\frac{(x - a)^2}{a^2 x} \geq 0 \text{ Graph oberhalb Tangente}$$

Abweichungen ansehen im Intervall $[\frac{a}{2}, 2a]$

$\frac{a}{2}$ nicht zu nahe an 0

$\frac{a}{2}$ im Nenner eingesetzt, um eine Vereinfachung zu erreichen

$$\leq \frac{2}{a^3} * (x - a)^2 = Konst * (x - a)^2$$

In der Nähe von a ändert sich $(x-a)^2$ sehr stark, während der Nenner ziemlich konstant ist. Wir betrachten daher das x im Nenner als unnötig störend.

$$\frac{(x-a)^2}{a^2x} \leq \frac{1}{\underbrace{a^2\frac{a}{2}}_{\text{möglichst klein für}} \quad x \in \left[\frac{a}{2}, 2a\right]}(x-a)^2$$

Definition: Eine Funktion $f : \begin{matrix} \mathcal{R} \to \mathcal{R} \\ \mathcal{Q} \to \mathcal{Q} \end{matrix}$ heißt an der Stelle a so gut differenzierbar wie ein Kreis (kurz differenzierbar) falls es eine Zahl m (genannt Steigung bei a) gibt, so dass folgendes gilt: In einem Intervall $[a-r, a+r]$ hat man eine quadratische Abschätzung für den Unterschied zwischen Funktion und Tangente:

$$x \in [a-r, a+r] \Rightarrow |f(x) - (f(a) + m(x-a))| = K * (x-a)^2$$

K ist eine von a und r abhängige Konstante

2.2 Sehnensteigungen

$P(x) = x^n$
Sehnensteigungen:

$$\begin{array}{rrl} \frac{x^n-a^n}{x-a} & = & (x^{n-1} + x^{n-2}a + ... + xa^{n-2} + a^{n-1}) * (x-a) \\ & x^n & +x^{n-1}a + ... + x^2a^{n-2} + xa^{n-1} \\ & & -x^{n-1}a - ... - x^{n-2}a^2 - xa^{n-1} - a^n \end{array}$$

$x, a \geq 0$

$$\begin{cases} \geq na^{n-1}; & x > a \text{ rechts} \\ \leq na^{n-1}; & x < a \text{ links} \end{cases}$$

$n * a^{n-1}$ liegt zwischen den rechtsseitigen und den linksseitigen Sehnensteigungen und ist daher Kandidat für die Tangentensteigung
Funktion - Tangente $\Rightarrow$:

$$\begin{array}{llll} x^n - (a^n + na^{n-1} * (x-a)) = & (x-a) & (x^{n-1} + x^{n-2}a + ... + xa^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1}) \\ \text{1. Fall } x > a: & > 0 & > 0 \\ \text{2. Fall } x < a: & < 0 & < 0 \\ & & \Rightarrow \text{ immer } > 0 \end{array}$$

- Graph der Funktion liegt oberhalb der erwarteten Tangente.

- $$\begin{array}{lll} x^n - (a^n + na^{n-1} * (x-a)) & = (x-a) & *((x^{n-1} - a^{n-1}) \\ & & +(x^{n-2} - a^{n-2}) * a \\ & & +(x^{n-3} - a^{n-3}) * a^2 \\ & & +... \\ & & +(x-a)a^{n-2} \\ & & +a^{n-1} - a^{n-1}) \end{array}$$

aus jedem Faktor kann $(x-a)$ ausgeklammert werden.
Die Einschränkung $x, a \geq 0$ wird ersetzt durch $a, x \in [-R, R]$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |x^n - a^n| &\leq \underbrace{R^{n-1} + R^{n-1} + ... + R^{n-1}}_{\text{n-mal}} * |x-a| \\
|x^n - a^n| &\leq n * R^{n-1} * |x-a| = Konst * |x-a|
\end{aligned}$$

Für rationale Zahlen gilt: "**Die Dreiecksungleichung**"

$$\begin{aligned}
|a+b| &\leq |a| + |b| \\
|(a+b)+c| &\leq |a+b| + |c| \\
&\leq |a| + |b| + |c| \\
\Rightarrow |a_1 + ... + a_n| &\leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|
\end{aligned}$$

Sie wird auf die letzte Gleichung aus Seite 14 angewandt $|x^n - (a^n + na^{n-1} * (x-a))|$
$= |(x-a)| * |((x^{n-1} - a^{n-1}) + (x^{n-2} - a^{n-2}) * a + ... + (x-a)a^{n-2} + a^{n-1} - a^{n-1})|$
$\leq |x-a| * (|x^{n-1} - a^{n-1}| + |x^{n-2} - a^{n-2}| * a + ... + |x-a| * a^{n-2})$

$$|x^n - \underbrace{(a^n + na^{n-1}(x-a))}_{b}| \leq (x-a)^2 * \left(\underbrace{(n-1)R^{n-2}}_{1} + \underbrace{(n-2)R^{n-2}}_{2+...+R^{n-2}} \right)^1$$

$$|x^n - \underbrace{(a^n + na^{n-1}(x-a))}_{b}| \leq \underbrace{\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{konstant} * R^{n-2}}_{c} * (x-a)^2 = Konst * (x-a)^2$$

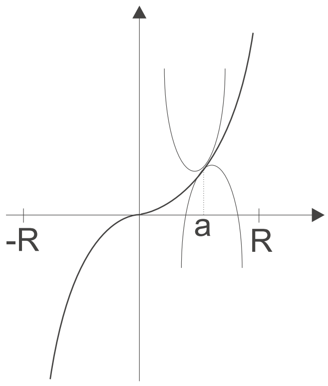
Umformung wie:

$$\begin{aligned}
|a-b| \leq c \Leftrightarrow \quad -c &\leq a-b \leq +c \\
b-c &\leq a \leq b+c
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\underbrace{a^n + na^{n-1}(x-a)}_{\text{dieselbe Gerade}} - K * (x-a)^2}_{\text{quad. Parabel, nach unten offen}} \leq x^n \leq \underbrace{\underbrace{a^n + na^{n-1}(x-a)}_{\text{Gerade}} + K(x-a)^2}_{\text{quad. Parabel, nach oben offen}}$$

[1] Gauß:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 2 & +...+ & (n-2) & + & (n-1) & \\
(n-1) & + & (n-2) & +...+ & 2 & + & 1 & \\
\hline
n & + & n & +...+ & n & + & n & = \frac{1}{2}n(n-1)
\end{array}$$



3 Polynome

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$\boxed{\text{Hier heißt n der Grad des Polynoms, falls } a_n \neq 0 \text{ ist.}}$

Wir ignorieren alle Eigenschaften der Polynome, außer dass man sie addieren und mit Zahlen multiplizieren kann.

$$Q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$$

Addition

$$(P + Q)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n$$

Falls P und Q Polynome von Grad $\leq n$ sind, so auch P+Q. Welche Regeln erfüllt diese Addition?

- Assozativ
- Kommutativ
- Neutrales Element: Null-Polynom hat alle Koeffizienten = 0
- Inverses Element zu: $P(x) = a_0 + ... + a_nx^n$ ist das Polynom: $-a_0 + ... + -a_nx^n$

$\Rightarrow$ Erfüllt alle Reglen für eine kommutative (abelsche) Gruppe
Falls $a_0, ..., a_n \in \mathcal{Q}$ so sagen wir: P hat rationale Koeffizienten. Wir schreiben $P \in \mathcal{Q}[x]$. Falls Grad $P \leq n$ bekannt ist: $P \in \mathcal{Q}_n[x]$
Wir benutzen von $\mathcal{Q}$ nur, daß $\mathcal{Q}$ alleKörperaxiome erfüllt; falls wir Polynome mit Koeffizienten in einem anderen Körper betrachten wollten, so wären auch diese Polynome eine kommutative Gruppe.
Für $r \in \mathcal{Q}$ und $P \in \mathcal{Q}_n[x]$ können wir auch $r * P$ definieren.

$r * P$ hat die Koeffizienten $r * a_0, r * a_1, ..., r * a_n$. Auch für diese Multiplikation mit Zahlen gelten Regeln.

$$\begin{array}{rcll} r * (P+Q) & = & (r*P) + (r*Q) & \\ (r+s)*P & = & (r*P)+(s*P) & \text{Distributivgesetze} \\ (r*s)*P & = & s*(r*P) & \end{array}$$

Wenn diese Regeln erfüllt sind und alles andere ignoriert wird, dann heißen diese Regeln <u>Axiome eines Vektorraums</u>.
Was kann man als nächstes tun?
Betrachte Abbildungen zwischen Vektorräumen, die "mit dieser Addition und Multiplikation mit Zahlen verträglich sind" oder kürzer: die "strukturerhaltend" sind.
F: Polynome $\rightarrow$ Polynome
F: $\mathcal{Q}[x] \rightarrow \mathcal{Q}[x]$

Verträglich mit Addition:	$F(P+Q) = F(P) + F(Q)$ (additiv)
Verträglich mit Zahlen-Multi.:	$F(r*P) = r*F(P)$ (homogen)

Solche Abbildungen heißen "linear".

Welche linearen Abbildungen kennen wir schon?

$$\begin{array}{ll} P \rightarrow P' & P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...a_n x^n \\ & P'(x) = a_1 + 2a_2 x + ...na_n x^{n-1} \\ F(P) = & P' \\ F(P+Q) = & P' + Q' = F(P) + F(Q) \text{ (additiv)} \\ F(rP) = & rP' = rF(P) \text{ (homogen)} \end{array}$$

P, Intervalllänge h, rechtsseiteige Sehnensteigung über Intervall der Länge h
$\Delta_h^P(x) = \frac{P(x+h)-P(x)}{h}$ ist Polynom (vom Grad n-1)

$$\begin{array}{rcl} F(P) & = & \Delta_h^P \text{ist eine lineare Abbildung} \\ F(P+Q) & = & F(P)+F(Q) \\ F(r*P) & = & r*F(P) \\ \text{denn} \quad F(P+Q)(x) & = & \underbrace{\frac{(P+Q)(x+h)-(P+Q)(x)}{h}}_{F(P+Q)(x)} \\ & = & \underbrace{\frac{P(x+h)-P(x)}{h}}_{F(P)(x)} + \underbrace{\frac{Q(x+h)-Q(x)}{h}}_{F(Q)(x)} \end{array}$$

Für besonders wichtige, einfache lineare Abbildungen betrachte den Wert des Polynoms P (beliebige Polynome) an der Stelle c: $a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + ... + a_n c^n = P(c)$

$$P \rightarrow P(c) =: W_c(P)$$

Behauptung:
$P \to W_c(P)$ ist linear

$$\begin{aligned} W_c(P+Q) &= (P+Q)(c) = P(c) + Q(c) = W_c(P) + W_c(Q) \\ W_c(r*P) &= r*P(c) = r*W_c(P) \end{aligned}$$

Sprachregelung:
Wir sagen V ist ein Vektorraum über dem Körper K (speziell $\mathcal{Q}$)
Falls: V eine kommutative Gruppe ist.
Falls: für jedes $r \in K$ und $v \in V$ das Element $r * v \in V$ definiert ist, so dass die obigen Regeln erfüllt sind.
Elemente vin V heißen dann Vektoren. Gegeben seien "Vektoren" $v_1, ...v_k \in V$.
Betrachte Vektoren:
$v = a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_k * v_k$: heißt Linearkombination von $v_1, ...v_k$ mit Koeffizienten $a_1, ..., a_k$
Wichtig: Lineare Abbildungen sind mit Linearkombinationen verträglich:

$$\underbrace{F(a_1v_1 + ... + a_kv_k)}_{\text{Bild einer Linearkombi.}} \overbrace{=}^{\text{mit Addition vertr.}}$$

$$F(a_1v_1) + F(a_2v_2) + ... + F(a_kv_k) \overbrace{=}^{\text{mit Zahlenmulti. vertr.}}$$

$$\underbrace{a_1 * F(v_1) + ... + a_k * F(v_k)}_{\text{Linearkombi. der Bilder mit denselben Koeffi.}}$$

Beispiel:
Ein Polynom $P, P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ ist Linearkombination der speziellen Polynome $1, x, x^2, ...x^n$.

3.1 Linear abhänging bzw. unabhängig

Zentraler Begriff der linearen Algebra: Linear abhänging bzw. unabhängig. Vektoren$\{v_1, ...v_k\}$ heißen linear abhängig, falls es Zahlen $a_1, ..., a_k$ gibt, nicht alle $= 0$, so dass $a_1v_1 + ... + a_kv_k = 0$. In Worten: „Wenn man den Nullvektor nichttrivial als Linearkombination schreiben kann“.
$\{v_1, ..., v_k\}$ heißen linear unabhängig, falls für jede Darstellung des Nullvektors $0 = a_1v_1 + ... + a_kv_k$ gilt: $a_1 = 0, a_2 = 0, ...a_k = 0$. In Worten: Der Nullvektor kann nur trivial dargestellt werden.
Sprachregelung:
V heißt Vektorraum über K falls V eine kom. Gruppe ist ("Addition") und falls K ein Körper ist und die Elemente von V mit denen von K multipliziert werden können.

1.Beispiel:
Polynome (vom Grad $\leq n$) mit Koeffizienten in K ($\mathcal{Q}, \mathcal{R}, F_7, F_5 ...$)

Abbildung:
$F : M \to V$ Zu jedem $m \in M$ ist ein Element $v = F(m)$ eindeutig!
M : Definitionsbereich
v : Bildpunkt (Bild)
m : Argument

Zwei Abbildungen:
$F, G : M \to V$
kann man addieren: $(F + G)(m) := F(m) + G(m)$
Assoziativ
Kommutativ
Neutrales Element: $0 : M \to V$ $0(m) := 0 \in V$
Inverses Element: F gegb. G gesucht mit $F + G = 0$
$G(m) := -F(m) \in V$

$F : M \to V$ (Körper K)
$r \in K$ Wie soll die Abbildung $r * F$ definiert werden?
$(r * F)(m) := r * F(M)$ Multiplikation von Elementen aus K und V
Weil die Distributivgesetze auf der rechten Seite für jedes $m \in M$ gelten, gelten sie auch links.
Damit ist gezeigt: Die Abbildungen von m nach V, Abb(M,V), mit dieser Addition un d Körpermultiplikation bilden einen Vektorraum über K.

3.1.1 Polynome und Vektorräume

Linearkombination: $v = a_1 v_1 + ... + a_k v_k$
linear abbhängig: $a_1 v_1 + ... + a_k v_k = 0$ nicht alle $a_j = 0$
linear unabhängig: Falls $a_1 v_1 + ... + a_k v_k = 0$ dann ist immer $a_1 = 0, a_2 = 0, ..., a_k = 0$
Drei Polynome P_1, P_2, P_3

$$P_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$P_2(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(2-3)(2-1)}$$

$$P_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

Behauptung: Diese 3 quadratischen Polynome sind linear unabhängig.
Beweis: Angenommen $a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = 0$ (Null-Polynom), dann ist zu zeigen:
$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$

Lineare Auswertungsabbildungen: $W_1(P) := P(1), W_2(P) := P(2), W_3(P) := P(3)$
Wende W_1 auf die Linearkombination an:

$$\underbrace{a_1 \underbrace{W_1(P_1)}_{=0} + a_2 \underbrace{W_1(P_2)}_{=1} + a_3 \underbrace{W_1(P_3)}_{=0}}_{\Rightarrow a_2=0} = 0$$

3.2 Vektorräume zum Selbermachen

1. Die Körper sind Vektorräume, aber langweilig, weil je zwei verschiedene Elemente $a \neq b \in K$ linear abhängig sind: $b * a - a * b = 0$ min. einer der Multiplikatoren $\neq 0$

2. Abb(M,K) $M = \{1, 2, 3\}$

   Abbildungen von M nach K werden als k_1, k_2, k_3 mitgeteilt, auch als $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$

   Die Summe spezialisiert sich zu:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + l_1 \\ k_2 + l_2 \\ k_3 + l_3 \end{pmatrix}$$

   Multiplikation mit Elmenten $r \in K$

$$r * \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * k_1 \\ r * k_2 \\ r * k_3 \end{pmatrix}$$

Der Vektorraum Abb$(\{1, 2, 3\}, K)$ heißt K^3, allgemein K^n, „Standartbeispiel“
$v \in Abb\,(\{1, 2, 3, 4\}, K^3)$

$$v = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}_1, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}_2, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}_3, \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}_4,$$

statt dieser unpraktischen Schreibweise ist folgende üblich (Matrix)

$$\begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} \end{pmatrix} \in K^{12}$$

K auch ersetzbar durch $Q[x]$

3.2.1 Untervektorraum

$L : V \to W$ (lineare Abbildung)
(In solchen Fällen ist der zu V gehörige Körper derselbe wie der zu W gehörige)
Was für Vektorräume kann man definieren?

- $U := L^{-1}(0) = \{v \in V; L(v) = 0 \in W\}$
  $v_1, v_2 \in U$, warum ist $v_1 + v_2 \in U$?
  $L(v_1) = 0 = L(v_2) \qquad 0 = L(v_1) + L(v_2) \underbrace{=}_{Addi.} L(v_1 + v_2)$
  d.h.: $v_1 + v_2 \in U$

- $k \in K; v \in U \Leftrightarrow L(v) = 0$
  Warum ist $k * v \in U$
  $0 = k * L(v) \underbrace{=}_{Multi.} L(k * v)$, also $k * v \in U$

Damit ist die Teilmenge U ein in V enthaltener Vektorraum: "Untervektorraum"
$U = L^{-1}(0)$ heißt "Kern" der Abb. L.
Bezeichnungseinschub[2]

3.3 Linear abhängig - unabhängig II

z.B.: Was bedeutet dies in $\mathcal{Q}^3$
$v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{Q}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$2 * v_2 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow 0 = v_1 - 2v_2 + v_3$ linear abhängig, weil wir eine nichttrivale Linearkombination des 0-Vektors erzeugen können.

$$w_1 = v_1, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, w_3 = v_3$$

[2]
$f : M \to N$ mit $q \in N$
$f^{-1}(q) =$ Volles Urbild von q unter f $= \{p \in M; f(p) = q\}$
$L(V) := \{w \in W;$ es gibt ein $v \in V$ mit $L(v) = w\} =$ Bild(L)
$w_1, w_2 \in L(v)$ Warum ist $w_1 + w_2 \in L(v)$?
$w_1 = L(v_1), w_2 = L(v_2)$
$L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$ d.h. $w_1 + w_2 \in L(v)$
usw.

Angenommen:
$x_1 * w_1 + x_2 * w_2 + x_3 * w_3 = 0$, können wir zeigen $x_1, x_2, x_3 = 0$, falls ja, so sind w_1, w_2, w_3 lin. unabhängig!

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}^3$$

Lineare Abbhängigkeit oder Unabhängigkeit in $\mathcal{Q}^3$ zu beweisen, führt auf ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4x_2 \\ 5x_2 \\ 7x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7x_3 \\ 8x_3 \\ 9x_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weil das Gleichungssystem nur die Lösung $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ hat $\Rightarrow$ linear unabhängig
Beispiel:
Drei Polynome P_1, P_2, P_3

$$P_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}, P_2(x) = \frac{(x-3)(x-1)}{(2-3)(2-1)}, P_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

Werte bei	1	2	3
P_1	1	0	0
P_2	0	1	0
P_3	0	0	1

$$P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{Q}_2[x]\text{Grad } \leq 2$$

Sind P_1, P_2, P_3 linear abhängig?
Angenommen: $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$

- Lösung ohne Nachdenken:

$$P_1(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2}, P_2(x) = \frac{x^2 - 4x + 3)}{-1}, P_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

$$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0)(x) =$$

$$\underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2}\right)}_{=0} * x^2 + \underbrace{\left(-\frac{5\lambda_1}{2} - 4\lambda_2 - \frac{3\lambda_3}{2}\right)}_{=0} * x + \underbrace{(3\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3)}_{=0} * 1$$

Falls dieses Gleichungssystem nur die Lösung $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ hat so sind P_1, P_2, P_3 linear unabhängig.

- Lösung mit den Methoden der linearen Algebra
  Auswertung $W_a : \mathcal{Q}[x] \to \mathcal{Q}\ P \to P(a) = W_a(P)$
  Wichtig $P \to W_a(P)$ ist linear
  Aus $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$ wird $\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$

	$\lambda_1 W_a(P_1)+$	$\lambda_2 W_a(P_2)+$	$\lambda_3 W_a(P_3)$	
$a=1$	1	0	0	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$
$a=2$	0	1	0	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
$a=3$	0	0	1	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$

  $\Rightarrow$ also linear unabhängig

Die Polynome P_1, P_2, P_3 erlauben mir, ein quadratisches Polynom Q hinzuschreiben, das an den Stellen 1,2,3 die Werte y_1, y_2, y_3 hat, nämlich $Q = y_1P_1 + y_2P_2 + y_3P_3$
$1, x, x^2, .., x^6 \in \mathcal{Q}_6[x]$ sind nach Def. der Polynome linear unabhängig. Betrachte 7 Polynome mit folgenden Auswertungen:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
P_1	1	0	0	0	0	0	0
P_2	0	1	0	0	0	0	0
P_3	0	0	1	0	0	0	0
P_4	0	0	0	1	0	0	0
P_5	0	0	0	0	1	0	0
P_6	0	0	0	0	0	1	0
P_7	0	0	0	0	0	0	1
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Die 7 Polynome sind wegen der Auswertungsabbildungen linear unabhängig.
Deswegen kann man auf min. eine Weise ein Polynom $Q \in \mathcal{Q}[x]$ angeben, das an diesen Stellen die Werte $y_1, .., y_7$ hat.
$Q = y_1P_1 + .. + y_7P_7$
Kann es zwei verschiedene Polynome Q_1, Q_2 vom Grad ≤ 6 geben die an 7 Stellen dieselben Werte haben?
Dann hätten wir auch das Polynom $R = Q_1 - Q_2 \in \mathcal{Q}_6[x]$ mit 7 Nullstellen.
Beweis, dass $R = 0$ ist, mit Hilfe der Multiplikation von Polynomen, also noch nicht allein mit Vektorraummethoden. $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$
Ziel: $P(x) - P(a) = \underbrace{(x-a) * P_1(x)}_{Grad:P_1=(GradP)-1}$
Strategie: Für reine Potenzen ist das schon bekannt, wir setzen mit Linearkom-

binationen zusammen:

$$\begin{array}{l|rcl}
a_n* & x^n - a^n & = & (x-a)*(x^{n-1}+x^{n-2}a+...+a^{n-1}) \\
a_{n-1}* & x^{n-1} - a^{n-1} & = & (x-a)*(x^{n-2}+...+a^{n-2}) \\
\vdots & & & \\
a_2* & x^2 - a^2 & = & (x-a)*(x+a) \\
a_1* & x-a & = & (x-a)*1 \\
a_0* & 0 & = & (x-a)*0
\end{array}$$

Auf der linken Seite entsteht die gwünschten Differenz. Auf der rechten Seite ist $(x-a)$ ausgeklammert.

3.4 Beweismethode der vollständigen Induktion

Nichtbeispiel: Für jedes $n \in \mathcal{N}$ ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.
$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ Hier kann man die Behauptung für jedes n einzeln einsehen.
3 aufeinanderfolgende Zahlen: $\Rightarrow$: min. eine durch 2, eine durch 3 teilbar, da $6 = 2*3 \Rightarrow$ auch durch 6 teilbar
Typisches Beispiel: $n!$
$0! = 1; 1! = 1$
$(n+1)! = (n+1)*n!$
$(n+1)!$ kann nicht berechnet werden, ohne dass sie vorher $n!$ berechnet haben.
Behauptung: $\forall n \in \mathcal{N}$ gilt:

$$n! \leq 2*\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

- $$n! \leq 2*\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

n	$n!$	$2*\left(\frac{n}{2}\right)^n$
1	1	1
2	2	2
3	6	$\frac{27}{4} = 6 + \frac{3}{4}$

  $\Rightarrow$ A(1), A(2), A(3) ist wahr.

- **Induktionsannahme**
  Angenommen, sie hätten dies für die ersten n^* Zahlen gemacht, seien also bis zu $n^*! \leq 2*\left(\frac{n^*}{2}\right)^{n^*}$ gekommen.
  Frage: Warum gilt jetzt:

$$(n+1)! \leq 2*\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$$

- **Induktionsschluß**
  Linke Seite mit $(n+1)$ multiplizieren
  Rechte Seite mit $\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$ multiplizieren
  Falls
  $$n+1 \leq \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$
  beweisbar ist, so folgt aus der Induktionsannahme die Beantwortung der Frage.
  In der Tat:
  $$n+1 \leq \frac{(n+1)^{n+1} * \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n^n * \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$
  ist für jedes n einzeln einzusehen:
  $$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & 1 \leq \tfrac{(n+1)^n}{n^n} * \tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \leq \tfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$
  Wenn wir diese Ungleichung für jedes n einsehen können, dann ist der Induktionschritt erledigt. Wir hatten Potenzen und Tangenten.

  $0 \leq a, x$
  $x^n \geq a^n + na^{n-1}(x-a)$
  $\boxed{a = 1 :\Rightarrow x^n \geq 1 + n(x-1)}$

  $$\begin{aligned} & \text{Setze } x = 1 + \tfrac{1}{n} \text{ ein} \\ & \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\left(1 + \tfrac{1}{n} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \geq 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

3.5 Summenzeichen $\sum$

Beispiel Summenzeichen $\sum$
$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$
Definition: $\sum_{k=1}^1 a_k = a_1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

Beispiel zum $\sum$-Zeichen
Geometrische Reihe: $1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$
Behauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q_k = \frac{1-^{q^n}}{1-q}$$

Induktionsanfang:
A(1): $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ linke Seite
$\frac{1-q^1}{1-q} = 1$ rechte Seite
Induktinsannahme: Für ein bestimmtes $n = n^*$ sei $A(n^*)$ bewiesen, also $\sum_{k=0}^{n-1} q_k = \frac{1-q^n}{1-q}$ wird als richtig vorausgesetzt.
Induktionsschritt:
$A(n^*) \Rightarrow A(n^*+1)$, aus $A(n^*)$ wird $A(n^*+1)$ gefolgert.
linke Seite von $A(n^*+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n^*} q^k \underbrace{=}_{\text{Def. von } \sum}$$

$$\sum_{k=0}^{n^*-1} q^k + q^{n^*} \underbrace{=}_{\text{Vor.: } A(n^*)}$$

$$\frac{1-q^{n^*}}{1-q} + q^{n^*} * \underbrace{\frac{1-q}{1-q}}_{\text{erweitern}} = \frac{1-q^{n^*}+q^{n^*}-q^{n^*}*q}{1-q} = \underbrace{\frac{1-q^{n^*+1}}{1-q}}_{\text{rechte S. von } A(n^*+1)}$$

Noch einmal:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n^*} q^k &= |\text{Def. von } \sum \\
\sum_{k=0}^{n^*-1} q^k + q^{n^*} &= |A(n^*) \text{ ist vorausgesetzt} \\
\frac{1-q^{n^*}}{1-q} + q^{n^*} * \frac{1-q}{1-q} &= |\text{Umformung} \\
\frac{1-q^{n^*}+q^{n^*}-q^{n^*}*q}{1-q} &= |\text{Umformung} \\
\frac{1-q^{n^*+1}}{1-q} & \quad |\text{rechte Seite von } A(n^*+1)
\end{aligned}$$

Abschweifung: Auch Sehnenschweifung sind Beispiele zur geom. Reihe:

$$\begin{aligned}
\frac{x^n-a^n}{x-a} &= x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1} = a^{n-1}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-2}+\ldots+\frac{x}{a}+1\right) \\
\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \frac{x^n-a^n}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)} \\
&= \frac{a^n\left(\frac{x^n}{a^n}-1\right)}{a\left(\frac{x}{a}-1\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a^{n-1} * \frac{1-\left(\frac{x^n}{a^n}\right)}{1-\frac{x}{a}} \\ & \frac{x}{a} =: q \\ \Rightarrow\ & a^{n-1} * \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

3.6 Binomialkoeffizienten

Binomialkoeffizienten $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$:= Anzahl der k-elementigen Teilmenegn einer n-elementigen Menge.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} &= n \quad \text{Anzahl der 1-elementigen Mengen} \\ \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \qquad\qquad \text{eine leere Menge} \end{aligned}$$

Typsiche Argument für derartige Definition

$\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{(n+1)-Elemente} = \underbrace{\quad}_{n-Elemente} \bullet$ („Markiere ein Element“)

Diese Aufspaltung zerlegt die k-elementigen $\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$ Teilmenge der $(n+1)$-elementigen Menge in zwei Sorten, diejenigen die das ausgezeichnete Element $\bullet$ nicht enthalten ($\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ Stück) und die, die es entält ($\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$ Stück).

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \\ n=2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+1 \\ n=3 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3; \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \\ n=4 &\Rightarrow 1;\ 4;\ 6;\ 4;\ 1 \\ n=4 &\Rightarrow 1;\ 5;\ 10;\ 10;\ 5;\ 1 \end{aligned}$$

Eine zweite Anwendung desselben Prinzips:
Betarchte eine n-elementige Menge und darin
k-elementige Teilmengen:
$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ Stück k-elementige Teilmengen und

$\binom{n}{k-1}$ Stück (k-1)-elementige Teilmengen

Zeichne in jeder k-elementigen Menge ein "letztes" Element aus und zähle weiviele k-elementige Teilmengen mit einem letzten Element es gibt. Linke Seite: Erst (k-1)-elementige Menge wählen, danach das letzte. Rechte Seite: Erst k-elementige Mengen wählen, dann darin das letzte Element markieren.
$\binom{n}{k-1} * (n+1-k) = \binom{n}{k} * k$
$\Leftrightarrow \binom{n}{k-1} * \frac{(n+1-k)}{k} = \binom{n}{k}$
Geeignete Formel zum Berechnen der Binomialkoeffizienten (schneller als mit der anderen Methode)

3.7 Differenzierbarkeit einer Funktion

Definition: $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ oder $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$
Eine Funktion $f(\mathcal{R} \to \mathcal{R})$ heißt an der Stelle a, so gut wie ein Kreis differenzierbar, mit Steigung (oder Ableitung) $m = f'(a)$ falls gilt: Es gibt ein (meistens kleines) Intervall $[a-r, a+r]$ und eine Konstante K, so dass gilt : $\forall x \in [a-r, a+r]$ haben wir $-K * (x-a)^2 \leq f(x) - \underbrace{(f(a) + f'(a) * (x-a))}_{\text{Tangente}} \leq \underbrace{K * (x-a)^2}_{^2\text{-Fehler}}$

4 Differentiationsregeln

f und g seien an der Stelle a differenzierbar, dann auch die Funktionen $r * f$ und $f + g$.
In Formeln: $(r * f)' = r * f'; (f+g)' = f' + g'$
Mit anderen Worten: Die an der Stelle a differenzierbaren Funktionen bilden einen Vektor raum und die Ableitung ist eine lineare Abbildung.
Anwendung: Weil $f(x) = x^k$ die Ableitung $k * x^{k-1}$ hat, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k * x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ die Ableitung $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k * k * x^{k-1}$

Beweis: Obige Voraussetzung über f sei erfüllt.
Betrachte $r * f$, definiert $(r * f)(x) := r * f(x)$
Probiere dasselbe Intervall $[a-r, a+r]$ wie für f

$$|r * f(x) - r * f(a) - r * f'(a) * (x-a)| \leq \underbrace{|r| * K}_{Konst.} * |x-a|^2$$

und finde, dass $|r| * K$ eine geeignete Konstante ist.
Die Voraussetzungen seien für f und g erfüllt

$$x \in [a - r_f, a + r_f] \quad \Rightarrow |f(x) - f(a) - f'(a) * (x-a)| \quad \leq K_f * (x-a)^2$$

$$x \in [a - r_g, a + r_g] \quad \Rightarrow |g(x) - g(a) - g'(a) * (x - a)| \quad \leq K_g * (x - a)^2$$

Welches Intervall soll ich für $f + g$ probieren?
Versuch: $r_{f+g} = min(r_f, r_g) \Rightarrow$

$$\underbrace{\begin{array}{l} x \in [a - r_f, a + r_f] \Rightarrow |f(x) - f(a) - f'(a) * (x - a)| \leq K_f * (x - a)^2 \\ x \in [a - r_g, a + r_g] \Rightarrow |g(x) - g(a) - g'(a) * (x - a)| \leq K_g * (x - a)^2 \end{array}}_{x \in [a - r_{f+g}, a + r_{f+g}]}$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{array}{rl} & |(f + g)(x) - (f + g)(a) - (f' + g')(a)(x - a)| \\ \leq & |f(x) - f(a) - f'(a) * (x - a)| + |g(x) - g(a) - g'(a) * (x - a)| \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \leq & K_f(x - a)^2 + K_g(x - a)^2 \\ = & (K_f + K_g) * (x - a)^2 \end{array}$$

Auf dem probierten Intervall ist $K_{f+g} = K_f + K_g$ geeignet.

4.1 Namen für einfache Konstruktionen

Lineare Algebra

K Körper mit $+, *$
V Vektorraum (additive Gruppe und Multiplikation mit $k \in K$)

$g, f \in$ Abb(M,V): $m \in M; f(m) \in V$
$(f + g)(m) := f(m) + g(m)$ Vektorraumaddtion in Abb(M,V)
$f(m)$ heißt Wert; Elemente aus dem Definitionsbereich heißen Argumente.

4.1.1 Einfache Spezialfälle

$Abb(V, K) \supset$ lin. Abb(V,K)
$Abb(V, V) \supset$ lin. Abb(V,V)
Untervektorräume

Ausnahme von diesen Bezeichnungen: Auf der Schule wurden die Abb. $x \to mx+b$ als linear bezeichned.
Strukturerhaltende Abbildungen
$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$
$L(r * v) = r * L(v)$

Im Falle von Vektorräumen "linear"
Morphologie: "Gestaltlehre"
homo: "gleich"
homomorph = strukturerhaltend
Homomorphismus = strukturerhaltende Abbildung

$$L_1, L_2 \in \underbrace{Hom(V,V)}_{Vektorraum} \quad (L_1 \circ L_2)(v) := L_2\left(L_1(v)\right)$$

Distributivgesetz

$$L_3 \circ (L_2 + L_1) = (L_3 \circ L_2) + (L_3 \circ L_1)$$

usw.: Es gelten fast alle Regeln für $+, \circ$ außer: kein Inverses dieser Multiplikation und kein Kommutativgesetz
Das hat zur Folge, dass lineare Abb. $L \in Hom(V,V)$ "eingesetzt" werden können in Polynome $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$

$$L \to P(L) = a_0 + a_1 L + a_2 (L * L) + a_3 L^3 + ... + a_n L^n$$

Dies ist eine Abbildung, genannt Polynomabb. $Hom(V,V) \to Hom(V,V)$
(Wichtig, um lin. Abb. gut zu verstehen, einfache Differentialgleichungen zu lösen, bis hin zum Lösen der Schrödingergleichung)
Dies ist der Grund für eine wichtige Unterscheidung:

4.1.2 Polynome und Polynomfunktionen

Wie unterscheiden sich Polynome und Polynomfunktionen

Polynome	**Polynomfunktionen**
Linearkombination von den Potenzen $1, X, X^2, .., X^n$ (nach Definition linear unabhängig) $P(x) = 1 + x^2$ Wertebereich $\mathcal{Q}$, $x \in \mathcal{Q}x \to 1 + x^2$ oder Wertebereich $\mathcal{R}$, $x \in \mathcal{R}x, \to 1 + x^2$ Wertebereich $Hom(\mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}^2), L \to 1 + L^2$ Hier hat die Polynomfunktion eine Nullstelle.	Verabrede einen Argumentbereich (=Wertebereich) und betrachte Auswertung des Polynoms:

$$D^{90^\circ} = L \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -q_2 \\ q_1 \end{pmatrix} \quad \text{,also } L^2 = -1$$

Ausführlicher: Warum ist diese Abb. linear?
Beweis

$$\begin{aligned}
D^{90^\circ}\left(\begin{pmatrix} r*q_1+p_1 \\ r*q_2+p_2 \end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix} -r*q_2-p_2 \\ r*q_1+p_1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} -rq_2 \\ rq_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \\
&= r*D^{90^\circ}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + D^{90^\circ}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Anderes Beispiel: Spiegelung an der x-Achse:

$$S\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_1 \\ -q_2 \end{pmatrix} \quad \text{, linear}$$

$$\begin{aligned}
(1+(D^{90^\circ})^2)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} &= 1*\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (D^{90^\circ})^2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}^2
\end{aligned}$$

Deshalb hat die Polynomfunktion $L \to 1+L^2$ an der Stelle $L = D^{90}$ eine Nullstelle in $Hom(\mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}^2)$

4.2 Was sind Differentiationsregeln?

Voraussetzung: Einfache Funktion (z.B.: $x \to x^n$) als Beispiel schon erledigt.
Ziel: Aus einfachen differenzierbaren Funktionen werden komplizierte gemacht, die dann differenzierbar sein sollen, nämlich:

1. Linearkombination
   $f, g \quad f', g'$
   $h = \alpha * f + \beta g$
   Regel: $h' = \alpha f' + \beta g'$

2. Produkt
   $f, g \quad f', g'$
   $h = f * g$
   $[h(x) = f(x) * g(x)]$ Regel: $h' = ?$ Wird noch entwickelt!

3. Komposition, Verknüpfung, Verkettung $f, g \quad f', g'$
   $h = f \circ g$
   $[h(x) = f(g(x))]$ Regel: $h' = ?$ Wird noch entwickelt!

4.2.1 Formulierung und Beweis der Produktregel

Wie sieht eine Produktregel aus?
Probiere einfache Funktion:

$$\begin{aligned} f(x) = & \quad y_1 + m_1(x-a) \\ g(x) = & \quad y_2 + m_2(x-a) \\ (f*g)(x) = & \quad (y_1 * y_2) + (y_1 * m_2 + y_2 * m_1) * (x-a) + m_1 * m_2(x-a)^2 \end{aligned}$$

$(y_1 * y_2) + (y_1 * m_2 + y_2 * m_1) * (x-a)$: Lineare Funktion
$m_1 * m_2(x-a)^2$: quadratischer Fehler
$y_1 m_2 + y_2 m_1$ ist daher die Steigung von $f * g$ an der Stelle a.
$f(a)g'(a) + g(a) * f'(a)$ Steigung von $f * g$ an der Stelle a. Weil eine Produktregel sicher auf das Produkt linearer Funktionen anwendbar sein soll, muß die Produktregel diese Form haben. Können wir sie beweisen?
Vor.:
Definition von Differenzierbarkeit von $f(x), g(x)$ an der Stelle a:
Für f: Es gibt $[a - r_f, a + r_f]$ und eine Konstante K_f, so dass $\forall x \in [a - r_f, a + r_f]$
Für g: Es gibt $[a - r_g, a + r_g]$ und eine Konstante K_g, so dass $\forall x \in [a - r_g, a + r_g]$

$$1)|f(x) - (f(a) + f'(a) * (x-a))| \leq K_f |x-a|^2$$

$$2)|g(x) - (g(a) + g'(a) * (x-a))| \leq K_g |x-a|^2$$

Versuche $r_{fg} = min(r_f, r_g)$
Versuche zu beweisen: $\forall x \in [a - r_{fg}, a + r_{fg}]$ gilt:
Kombination der Erwartungen aus den Vorüberlegungen $^{++}$:

$$|\underbrace{(f*g)(x)}_{Funktion} - (\underbrace{f(a)*g(a)}_{\text{Wert bei a}} + (\underbrace{f(a)g'(a) + g(a)f'(a)}_{Steigung}) * (x-a))| \leq K * |x-a|^2$$

Beweis:
Vor.: Darstellung von $f(x)$ unf $g(x)$, als ihre Tangenten + der Abweichung:

$$\begin{aligned} t_f(x) &:= f(a) + f'(a) * (x-a), \quad f(x) = t_f(x) + Abw_f(x) \quad * \\ t_g(x) &:= g(a) + g'(a) * (x-a), \quad g(x) = t_g(x) + Abw_g(x) \end{aligned}$$

Es gibt Intervalle:

$$\underbrace{[a - r_f, a + r_f]}_{\forall x \in}, \underbrace{[a - r_g, a + r_g]}_{\forall x \in}$$

$$\begin{aligned} |Abw_f(x)| \leq & \quad K_f * |x-a|^2 \quad ** \\ |Abw_g(x)| \leq & \quad K_g * |x-a|^2 \end{aligned}$$

Beh.:

$$|(f*g)(x) - \underbrace{(f*g)(a) - (fg' + gf')(a)*(x-a)}_{\text{erwartete Tangente}}| \underbrace{\leq}_{\text{soll gelten } \forall x \in [a-r, a+r]} K*|x-a|^2$$

Multiplikation von $f(x)$ und $g(x)$, als Darstellung mit Tangente + Abweichung (siehe *)

$$f(x)*g(x) = \underbrace{t_f(x)*t_g(x)}_{3)} + \underbrace{t_f(x)*Abw_g(x) + t_g(x)*Abw_f(x)}_{1)} \underbrace{+Abw_f(x)*Abw_g(x)}_{2)} ***$$

Betrachtung der einzelnen Summanden 1., 2., 3.:
Setzte r statt r_{gf}: $r := min(r_f, r_g)$, also auf dem Intervall $[a-r, a+r]$
Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und $(x-a) = r$ durch "worst case" $x = a+r \Rightarrow$ $(a+r-a)$ max. r

$t_f(x) = f(a) + f'(a)*(x-a)$	Auf dem Intervall	$\lvert t_f(x)\rvert$	$\leq \lvert f(a)\rvert + \lvert f'(a)\rvert * r =: S_f$
$t_g(x) = g(a) + g'(a)*(x-a)$	$[a-r, a+r]$ gilt	$\lvert t_g(x)\rvert$	$\leq \lvert g(a)\rvert + \lvert g'(a)\rvert * r =: S_g$

1.

$$|t_f(x)*Abw_g(x)| + |t_g(x)*Abw_f(x)| \leq \underbrace{(S_f*K_g + S_g*K_f)}_{K_1}*(x-a)^2$$

Abw_g ist nach ** $\leq K_g*|x-a|^2$
Abw_f ist nach ** $\leq K_f*|x-a|^2$
S_f gerade als obere Schranke von $t_f(x)$ definiert

2.

$$|Abw_f(x)*Abw_g(x)| \leq K_f*K_g*(x-a)^4 \leq \underbrace{(K_fK_gr^2)}_{K_2}*(x-a)^2$$

Abw_g ist nach ** $\leq K_g*|x-a|^2$
Abw_f ist nach ** $\leq K_f*|x-a|^2$
$r^2 = (a+r-a)^2$

3.

$$t_f(x)*t_g(x) = \underbrace{f(a)g(a) + (f(a)g'(a) + g(a)f'(a))*(x-a)}_{\text{erwartete Tangente}} + \underbrace{\underbrace{f'(a)*g'(a)}_{K_3}(x-a)^2}_{^2\text{-Fehler}}$$

Addition der Konstanten vor den ^{2}-Fehlern aus der Gleichung *** ergibt eine asu den Voraussetzungen berechenbare Fehlerkonstante für $f * g$:

$$K := \underbrace{\overbrace{S_f * K_g + S_g * K_f}^{K_1} + \overbrace{K_f K_g r}^{K_2} + \overbrace{|f'(a)| * |g'(a)|}^{K_3}}_{\text{nach Voraussetzung bekannt}}$$

Schlußresult: $\forall x \in [a-r, a+r]$ gilt:

$$|(fg)(x) - ((fg)(a) + (f * g' + g * f')(a)) * (x-a)| \leq K * (x-a)^2$$

Dies ist genau die gleiche Darstellung wie bei der Zusammenfassung zu $^{++}$
<u>Weil</u> diese Ungleichung gilt, ist die erwartete Tangente tatsächliche Tangente!

4.2.2 Kettenregel

F,f: werden als diff. vorausgesetzt. Was ist die Ableitung von $F \circ f$, $(F \circ f) := F(f(x))$
Betrachte zunächst lineare Funktionen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = y + m(x-a) & a, x \in \mathcal{Q} \text{ oder } \mathcal{R} \text{ und im Def.-Bereich von f} \\ F(x) = Y + M(X-A) & A, X \in \mathcal{Q} \text{ oder } \mathcal{R} \text{ und im Def.-Bereich von F} \end{array}$$

Erste Voraussetzung: $y = A$; d.h der Wert der inneren Funktion soll gleich der Stelle A sein, die wir beim Betrachten der äußeren Funktion auszeichnen:

$$F(f(x)) = Y + M(f(x) - A) = Y + M(y + m(x-a) - A) = Y + Mm(x-a)$$

Die Steigungen multiplizieren sich, wenn sie lineare Funktionen ineinander einsetzen.
Eine zweite Interpretation: Graph von f: Wieviel mal so lang ist das Bildintervall im Vergleich zum Argumentintervall? $R = m * r$
Formulierung der (erwarteten) Kettenregel
Vor.: f sei an der Stelle a differenzierbar, $t_f(x) = f(a) + f'(a) * (x-a)$
Vor.: F sei an der Stelle $A = f(a)$ differenzierbar, $t_F(x) = F(A) + F'(A) * (x-A)$
Beh.: Dann ist $(F \circ f)$ differenzierbar und $t_F * t_f(x)$ ist die erwartete Tangente

4.2.3 Quotientenregel

Anwendungsbeispiele:

$$F(x) = \frac{1}{x} \text{ mit } 0 \neq x$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Zur Erinnerung: Im Intervall $[\frac{A}{2}, 2A]$ gilt (d.h. $\forall x \in [\frac{A}{2}, 2A]$)

$$0 \leq f(x) - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A^2} * (x - A)\right) \leq \frac{8}{A^3}(x - A)^2$$

$\frac{8}{A^3}$ aus anderer Vorlesung(die 8), muß nicht genau stimmen!
f(x) sei differenzierbar mit Ableitung $f'(x)$ $g = F * f$ oder $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ Was ist die Ableitung von g?

$$g'(a) = F'(f(a)) * f'(a) = -\frac{1}{f(a)^2} * f'(a) \text{ oder } \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Etwas allgemeiner:
f,g seien differenzierbar und $g > 0$. Was ist die Ableitung von $h = \frac{f}{g}$?

$$h = f\left(\frac{1}{g}\right); h' = f * \left(\frac{1}{g}\right)' + \left(\frac{1}{g}\right) * f' = \frac{g * f' - g * g'}{g^2}$$

Quotientenregel

4.3 Wozu sind Differentiationsregeln?

Sie müssen so gut sein, dass folgendes funktioniert.
Wenn eine komplizierte Funktion F aus einfachen Bausteinen $f_1, ..., f_n$ "zusammmengesetzt" wird, und wenn Sie die Bausteine schon differenzieren können, dann soll die Regel sagen:

1. F ist differenzierbar
2. Wir können F' aus den Ableitungen $f_1', ..., f_n'$ bestimmen

Ein Beispiel war $f_1(x) = \frac{1}{x}$ mit $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad x \neq 0$

$$\left.\begin{array}{rcl} F(x) & = & f_1 \circ f_2(x) = \frac{1}{f_2(x)} \\ F'(x) & = & f_1'(f_2(x)) * f_2'(x) = -\frac{1}{(f_2(x))^2} * f_2'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'}{f} - \frac{g * f'}{f^2}$$

Fehler $f(x) - f(a) \approx f'(a) * (x - a)$ "absolute Fehler"
$\frac{f(x - f(a))}{f(a)} \approx \frac{f'(a)}{f(a)} * (x - a)$ "relative Fehler"

Definition: Für positive f heißt $\frac{f'}{f}$ Wachstumsrate von f

Können wir Funktionen mit konstanter Wachstumsrate finden?
Die Quotientenregel kann an Wachstumsraten angepaßt werden:
Vor.:

$\frac{f'}{g} \leq \frac{g'}{g}$ für pos. f,g
Beh.:
$\frac{g}{f}$ ist eine schwach wachsende Funktion

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g}{f} * \left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right) \geq 0 \text{ damit M.S.: } \frac{g}{f} \text{ ist wachsend}$$

$x < y$ $\quad \frac{g}{f}(x) \leq \frac{g}{f}(y)$ oder $\frac{f(y)}{f(x)} \leq \frac{g(y)}{g(x)}$
$a < x$ $\quad \frac{f(x)}{f(a)} \leq \frac{g(x)}{g(a)}$

Beispiele:
Zinsen:
$f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = (1 + \frac{x}{2})^2, f_{12} = (1 + \frac{x}{12})^{12}$
$f_1(x)$ nach einen Jahr
$f_2(x)$ nach einen halben Jahr
$f_{12}(x)$ nach 12 Monaten
$f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n \overbrace{\leq}^{?} f_{n+1}(x) = (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}$
Beweis über Induktion möglich, aber nicht einfach!
$f_n'(x) = n(1 + \frac{x}{n})^{n-1} * \frac{1}{n}$

$$\left.\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \leq \frac{1}{1 + \frac{x}{n+1}} = \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}}(x)\right\} \text{ Monotoniesatz: } (1+\frac{x}{n})^n \leq (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}$$

$f_n(0) = 1 = f_{n+1}(0)$
Wie stark wachsen die Funktionen $(1 + \frac{x}{n})^n$ in Abhängigkeit von n?
$n \to (1 + \frac{x}{n})^n$ monoton wachsend aber wie stark?
Endkapital bei x Prozent Zinsen = Anfangskapital $*(1 + x)$
Umgekehrt A sei um x % kleiner als E, $A = (1 - x) * E$ oder $E = \frac{A}{1-x}$

$$g_1(x) = \frac{1}{1 - x}, g_2(x) = \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\right)^2, ..., g_m(x) = \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{m}}\right)^m$$

Wie ist das Verhalten dieser Funktionen?

Betrachtung der Wachstumsraten:

$$g_m'(x) = m * \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{m}}\right)^{m-1} * \frac{-\frac{-1}{m}}{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^2} = \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{m}}\right)^{m+1}$$

$$\frac{g_m'}{g_m}(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{m}} \geq \frac{1}{1 - \frac{x}{m+1}} = \frac{g_{m+1}'}{g_{m+1}}(x)$$

$g_m(0) = g_{m+1}(0) = 1 \qquad g_m(x) \geq g_{m+1}(x)$ Wie stark fällt das (mit m)?

$$f_1(x) \leq ... \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \underbrace{...}_{\text{Fkt. mit Wachstumsrate 1?}} \leq g_{m+1} \leq g_m(x) ... < g_1(x)$$

4.4 Beweis der Kettenregel

f sei differenzierbar bei a
Es gibt $[a - r_f, a + r_f] \subset$ Def.-Bereich(f) und $K_f, \forall x \in [a - r_f, a + r_f]$ gilt $|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| \leq K_f * (x - a)^2$
F sei differenzierbar bei A
Es gibt $[A - r_F, A + r_F] \subset$ Def.-Bereich(F) und $K_F, \forall x \in [A - r_F, A + r_F]$ gilt $|F(x) - F(A) - F'(A)(x - A)| \leq K_F * (x - A)^2$
$F \circ f$? Vor.: $A = f(a)$
Beh.: $|F \circ f(x) - F \circ \underbrace{f(a)}_{A} - F'(f(a)) * f'(a) * (x - a)| \leq K_{F \circ f} * (x - a)^2$
$\forall x \in [a - r_{F \circ f}, a + r_{F \circ f}]$
Der Beweis muß nun $K_{F \circ f}, r_{F \circ f}$ herleiten

Beweis:
Natürlich liegt es nahe, in die Voraussetzung über F einzusetzen $X = f(x), A = f(a)$.
Dann müssen wir wissen $|X - A| = |f(x) - f(a)| \underbrace{\leq}_{\text{muß kontrolliert werden durch Voraussetzungen an x}} r_F$

Mindestvoraussetzung.: $|x - a| \leq r_f$

$$\underbrace{|f(x) - f(a)}_{c} - \underbrace{f'(a) * (x - a)|}_{d} \leq K_f * |x - a|^2$$

$$|c| \leq |c - d| + |d| \text{ Dreiecksungleichung } \underbrace{|a + b|}_{c} \leq \underbrace{|a|}_{c-d} + \underbrace{|b|}_{d}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| \qquad \leq |f'(a)| * |x - a| + K_f * |x - a|^2$$
$$\underbrace{(|f'(a)| + K_f + r_f)}_{\text{berechenbare Konstante}} * (x - a) \quad \underbrace{(\leq r_F)}_{\text{wollen zeigen}}$$

Zusatzvoraussetzung (zu $|x-a| \leq r_f$):

$$|x-a| \leq \frac{r_F}{(|f'(a)| + K_f * r_f)}$$

Wenn beide Voraussetzungen erfüllt sind, gilt die Ungleichung $|f(x) - f(a)| \leq r_F$

Erfolgversprechender Versuch

$$r_{F\circ f} = min(r_f, \frac{r_F}{\underbrace{|f'(a)| + K_f * r_f + 1}_{\neq 0; K=0}})$$

$$|x-a| \leq r_{F\circ f} \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq r_F \text{ ok}$$

In Formel für f ist differenzierbar $X = f(x), A = f(a)$ einsetzen:
$|x-a| \leq r_{F\circ f} \Rightarrow$

$$|\overbrace{F(f(x))}^{ok} - \overbrace{F(f(a))}^{ok} - \overbrace{F'(f(a))}^{ok} * \overbrace{(f(x) - f(a))}^{\text{noch falsch}}| \leq K_F * |f(x) - f(a)|^2$$

$$\leq \overbrace{K_F * (|f'(a)| + K_f * r_f)^2 * |x-a|^2}^{ok} = K_1 * |x-a|^2$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x) - f(a) = f'(a) * (x-a) + Abw_f \\ |Abw_f| \leq K_f * |x-a|^2 \end{array}\right\} \text{einsetzen in “noch falsch“}$$

$$|F(f(x)) - F(f(a)) - F'(f(a)) * (\overbrace{f'(a) * (x-a)}^{ok} + \overbrace{Abw_f}^{stört})| \leq K_F * (|f'(a)| + K_f * r_f)^2 * (x-a)^2$$

Die Dreiecksungleichung beendet den Beweis

$$\underbrace{|F(f(x)) - F(f(a)) - F'(f(a)) * f'(a) * (x-a)|}_{\text{linke Seite der Beh.}}$$

$$\leq \underbrace{|F'(f(a))| * |Abw_f| + K_F * (|f'(a)| + K_f * r_f)^2 * (x-a)^2}_{^2-Fehler}$$

$$K_{F\circ f} = \underbrace{|F'(f(a))| * K_f + K_F * (|f'(a)| + K_f * r_f)^2}_{\text{aus den Voraussetzungen berechnet}}$$

Interpretation durch Vergleich der Fehlerkonstanten mit der 2. Ableitung:
$2K_f$ Schranke für f''
$2K_F$ Schranke für F''

$$\begin{aligned}(F \circ f)''(x) &= (F'(f(x)) * f'(x))^2 \\ &= \underbrace{F''(f(x))}_{\leq 2K_F} * \underbrace{f'(x)^2}_{\approx |f'(a)|^2} + \underbrace{F'(f(x))}_{\approx F'(f(a))} * \underbrace{f''(x)}_{\leq 2K_f}\end{aligned}$$

5 Vektorräume und Untervektorräume

$u_1, u_2 \in U$ Falls Sie zeigen können: $u_1 + u_2 \in U$ und für $r \in U : r * u_1 \in U$ dann ist U bereits ein Unterraum von V.
Warum muß z.B. $(u_1 + u_2) + u_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$ nicht gezeigt werden? Da dies in V richtig ist!

5.1 Anwendung

Voraussetzung:
W sei Vektorraum (K-Vektorraum)
U, V seien Untervektorräume
Behauptung:
$U \cap V := \{w \in W; w \in U, w \in V\}$ Der Durchschnitt ist ein Unterraum
$w_1 \in U \cap V$
$w_2 \in U \cap V$
$r \in K$
Behauptung: $w_1 + w_2 \in U \cap V$ und $r * w_1 \in U \cap V$
$w_1 + w_2 \in U$ und $r * w_1 \in U$ weil U als Unterraum vorausgesetzt.
$\Rightarrow w_1 + w_2 \in U \cap V$ und $r * w_1 \in U \cap V$

$S := \{w \in W; \exists u \in U, v \in V | u + v = w\}$
Behauptung: S ist wieder Unterraum von W, genannt Spann von U und V
Sei: $w_1, w_2 \in S$ und $r \in K$
d.h. es gibt $u_1 \in U, v_1 \in V$ mit $u_1 + v_1 = w_1$ $(\in W)$
d.h. es gibt $u_2 \in U, v_2 \in V$ mit $u_2 + v_2 = w_2$ $(\in W)$
$\Rightarrow w_1 + w_2 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(v_1 + v_2)}_{\in V}$ $(\in S)$
Mit Distributivgesetz: $\underbrace{(r * u_1)}_{\in U} + \underbrace{r * v_1}_{\in V}$

5.2 Lineare Abbildungen

$L : V \to W$ linear (bekannt: $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2), L(r * v) = r * L(v)$)
Voraussetzung: $\underbrace{v_1, ..., v_k \in V}_{\text{lin. abh.}}$
Behauptung: Bilder $L(v_1), ...L(v_k) \in W$ sind auch linear abhängig.
d.h.: es gibt $r_1, ..., r_n \in K$, nicht alle $= 0$
so dass: $r_1v_1 + ... + r_kv_k = \sum_{j=1}^k r_jv_j = 0$ Darauf L anwenden
$L(\sum r_jv_j) = L(0) = 0 \underbrace{=}_{linear} \sum r_j * L(v_j)$, nicht alle $r_j = 0$
Warnung: Aus $\{v_1, \dots v_k\}$ linear unabhängig folgt <u>nicht</u> $\{Lv_1, \dots, Lv_k\}$ linear unabhängig.
Umgekehrt: Falls $L(v_1), ..., L(v_k)$ linear unabhängig so auch $v_1, ..., v_k$.
Warnung: Dies ist falsch für „linear abhängig".
Ind. Beweis: Angenommen dies sei falsch, dann sind $v_1, ..., v_k$ also linear abhängig. Nach dem gerade bewiesenen: $L(v_1), ..., L(v_k)$ auch linear abhängig, im Widerspruch zur Voraussetzung.

$f, g, h \in V := Abb(K, K)$
Ein Beispiel einer linearen Abbildung $h \in V$ sei <u>fest</u> gegeben.

Definition: $M_h(f) = h \cdot f$
Behauptung: M_h ist linear: $M_h(f + g) = M_h(f) + M_h(g)$
$M_h(r * f) = r * M_h(f)$

Anwendung: $\{h \cdot f_1, h \cdot f_2\}$ linear unabhängig $\Rightarrow \{f_1, f_2\}$ lin. unabhängig.

5.2.1 Basisergänzungssatz / Austauschatz von Steinitz

Vor.: $v_1, ..., v_n \in W$ seien linear unabhängig.
Bem.: Die Menge aller Linearkombinationen $\sum_{j=1}^n r_jv_j$ dieser Vektoren bildet einen Untervektorraum V.
Beispiel: $W = \mathcal{Q}[x]$ $v_1 = 1, v_2 = x, ..., v_n = x^{n-1} \rightsquigarrow V = \mathcal{Q}_n[x]$ Polynome vom Grad $\leq n - 1$
Beh.: In V gibt es höchstens n linear unabhängige Vektoren. Oder: Hat man $w_1, ..., w_{n+1} \in V$ so sind $w_1, ..., w_{n+1}$ linear abhängig.
Wie erkennt man linear abhängige Mengen von Vektoren?
(Einfacher Fall)
$\{0, u_1, ..., u_k\}$ sind immer linear abhängig, wähle
$r_0 = 1, r_1, ..., r_n = 0$:
$1 * 0 + \sum_{j=1}^k 0 * u_j = 0$ nicht alle Koeffizienten $= 0$.
$\{u_1, ..., u_n\}$ gegeben. Zwei Vektoren seien proportional, z.B.: $u_2 = \lambda * u_1$ mit

$\lambda \in K$
Wähle $r_j : \lambda, -1, 0, ..., 0$
$\lambda * u_1 - u_2 + 0 * u_3 + ... + 0 * u_k = 0$
Falls $\{u_1, ..., u_k\}$ linear abhängig sind, dann $\{u_1, ..., u_k, u\}$ auch.
Vor.: Es gibt Zahlen $r_1, ..., r_n \in K$, nicht alle $= 0$, so dass $\sum_{j=1}^{k} r_j u_j = r_1 u_1 + ... + r_k u_k = 0$
Für zusätzliches u $\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} r_j u_j + 0u = 0$
Zunächst n=1, (denn n=0 ist zu wenig instruktiv)
w_1, w_2 Linearkombination von v_1; $\quad w_1 = r_1 * v_1; w_2 = r_2 * v_1; r_1, r_2 \in K$
Beh.: w_1 und w_2 sind linear abhängig.
Erster Versucg: $r_1 * w_2 - r_2 * w_1 = (r_1 * r_2 - r_2 * r_1) * v_1 = 0$
Erfolgreich, falls mindestens einer der beiden $r_1, r_2 \neq 0$
Behandlung der Ausnahme: $1 * w_1 + 13 * w_2 = 0$

$u, v \in W$ linear unabhängig vorausgesetzt.
$w_1 = a_1 * u + b_1 * v$
$w_2 = a_2 * u + b_2 * v$
$w_3 = a_3 * u + b_3 * v$
Beh.: w_1, w_2, w_3 sind linear abhängig
Fallunterscheidung: Mindestens einer der $a_j \neq 0$ oder alle $a_j = 0$: Im letzten Fall sind w_1, w_2, w_3 Linearkombinationen von einem Vektor v und der Fall 1 erledigt diesen Ausnahmefall.
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $a_1 \neq 0$ vorausgesetzt werden.
Dann gilt: $u = \frac{1}{a_1} * w_1 - \frac{b_1}{a_1} * v$
$w_1 = 1w_1 + 0 * v$
$w_2 = a_2 * u + b_2 * v = \frac{a_2}{a_1} * w_1 + (b_2 - a_2 * \frac{b_1}{a_1}) * v$
$w_3 = a_3 * u + b_3 * v = \frac{a_3}{a_1} * w_1 + (b_3 - a_3 * \frac{b_1}{a_1}) * v$
Damit ist u durch w_1 ersetzt und w_1, w_2, w_3 sind jetzt Linearkombinationen von w_1 und v. Gesucht ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors mit Hilfe von w_1, w_2, w_3
Fallunterscheidung: Entweder sind beide Koeffizienten von v schon 0, dann sind w_2 und w_3 Vielfache von w_1, d.h. $\{w_1, w_2, w_3\}$ linear abhängig.
Andernfalls ist min. einer der Koeffizienten von $v \neq 0$. Eventuell nach Umbennen von 2 und 3 kann $\underbrace{b_2 - a_2 * \frac{b_1}{a_1}}_{=:c} \neq 0$ angenommen werden
Dann ist $v = \frac{w_2}{c} - \frac{1}{c} * \frac{a_2}{a_1} * w_1$ und Einsetzen ergibt lineare Abhängigkeit:
$w_3 = \frac{a_3}{a_1} * w_1 + \left(b_3 - a_3 * \frac{b_1}{a_1} * \left[\frac{w_2}{c} - \frac{1}{c} * \frac{a_2}{a_1} * w_1\right]\right).$

6 Monotoniesatz

Vor.:(wird noch präzisiert) Im Intervall $[a, b]$ gilt $f' \geq 0$ d.h. $\forall x \in [a, b]$ ist $f' \geq 0$
Beh.: $\forall x < y \in [a, b]$ gilt $f(x) \leq f(y)$

Erläuterung: Angenommen wir hätten eine <u>endliche</u> Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und wir wüßten über die Sehnensteigungen:

$$\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} \geq 0$$

Dann ließe sich leicht folgern:

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) \geq 0 \text{ (da: } x_j > x_{j-1})$$

$$\Rightarrow f(b) \geq f(a)$$

Dann ist offensichtlich, dass auch:

$$\Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$$

Zurück zum Monotoniesatz. Wir haben nur Punktweise Steigung ≥ 0
Wie setzt man diese <u>punktweise</u> Informationen zusammen?
Gegenbeispiel: $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$
$f(x) = \begin{cases} 1; x^2 > 2 \\ 0; x^2 < 2 \end{cases}$
$f' = 0$ ist überall in $\mathcal{Q}$ richtig, aber $f \neq$ const
Zu jedem $a \in$ Def.-bereich(f) gibt es ein Intervall $[a - r, a + r]$, so dass $\forall x \in [a - r, a + r]$ gilt: $|f(x) - f(a) - \underbrace{f'}_{0}(x - a)| \leq \underbrace{K}_{0} * (x - a)^2$
Anders als bei Polynomen hängt r sehr von a ab.

6.1 Propaganda für den Monotoniesatz

2 Funktionen $\underbrace{f' \leq g'}_{x<y}$
Beh.: $f(y) - f(x) \leq g(y) - g(x)$ [3]
Vor.: $f'' \geq 0$ Dann erfüllt f' die Voraussetzungen des Satzes, ist also schnell wachsend.
Beh.: f liegt oberhalb der Tangente von f
Tangente bei a: $t_a(x) = f(a) + f'(a) * (x - a)$
f oberhalb t_a: $\leadsto f(x) \geq t_a(x) \leadsto f(x) - t_a(x) \geq 0$

[3] $h = g - f$ erfüllt $h' \geq 0$
$h(x) \leq h(y)$
$g(x) - f(x) \leq g(y) - f(y)$

$h'(x) = f'(x) - f(a)$
$h'(a) = 0$
$a \leq x \Rightarrow h'(x) \geq 0$, h wachsend
$x \leq a \Rightarrow h'(x) \leq 0$, h fallend
$\rightsquigarrow$
$a \leq x \Rightarrow 0 = h(a) \leq h(x)$
$x \leq a \Rightarrow h(x) \leq h(a) = 0$

6.2 Wie rechnet man mit sehr kleinen Zahlen?

$0 \leq r = \frac{p}{q} \in \mathcal{Q}; p, q \in \mathcal{N}$
Entweder $p = 0 \Rightarrow r = 0$ oder $r \geq \frac{1}{q}$
Falls eine rationale Zahl $r \geq 0$ die Eigenschaft hat $r \leq \frac{1}{n}$ für jede Zahl $n \in \mathcal{N}$, so ist $r = 0$.

6.2.1 Archimedes Axiom

In reelle Zahlen übersetzt bedeutet das:

- **Erste Fassung der Griechen**
  Zu jeder (kleinen) reellen Zahl $r > 0$ und jeder (großen) reellen Zahl $R > 0$ gibt es ein $n \in \mathcal{N}$: $n * r > R$.

- **Stammbruchfassung**
  Angenommen es sei $p > 0$, dann gibt es einen Stammbruch $\frac{1}{n^*} < p$.
  Beweis mit der ersten Version des Satzes $r = 1, R := \frac{1}{p}$

- **„Nulltestfassung“**
  Es gibt eine Zahl $n^* \in \mathcal{N}$ mit $r * n^* > R$ d.h.:
  $1 * n^* > R = \frac{1}{p}$
  $\Leftrightarrow p > \frac{1}{n^*}$
  Gilt $0 \leq p \leq \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathcal{N}$, so folgt $p = 0$.

Welche Eigenschaft der Polynome habe ich noch nicht ins rechte Licht gerückt, durch die das Beispiel mit der Sprungstelle bei $\sqrt{2}$ bei Polynomen ncht auftreten kann?

$$x^k - a^k = (x - a) \underbrace{x^{k-1} + ... + a^{k-1}}_{k-Summanden}; x, a \in [-R, R]$$

$$\Rightarrow |x^k - a^k| \leq k * R^{k-1} * |x - a|$$

Dasselbe noch ein zweites Mal:

$$|x^k - a^k - k * a^{k-1}(x-a)| \leq (x-a)^2 * \frac{k(k-1)}{2} * R^{k-2}$$

Jetzt das Intervall $[-R+1, R-1]$

$$\Rightarrow x \in [a-1, a+1] \Rightarrow |x^k - a^k - k * a^{k-1}(x-a)| \geq (x-a)^2 * \frac{k(k-1)}{2} R^{k-2}$$

Für die Potenzen kann die Länge des Intervalls um a unabhängig von a gewählt werden. („gleichmäßig gewählt werden“), und dann eine Fehlerkonstante berechnet werden.
Für Polynom $P(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$
durch Addition und Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |P(x) - P(a) - P'(a)(x-a)| &\leq (x-a)^2 * \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |b_k| * \frac{k(k-1)}{2} * R^{k-2}}_{K} \\ & (x-a)^2 * K \\ & \forall\ x \in [a-1, a+1] \end{aligned}$$

6.3 Rationale Version des Monotoniesatzes

Vor.: (präzisiert) f sei im Intervall $[a,b] \cap \mathcal{Q}$ definiert und so gut differenzierbar, dass gilt: Es gibt eine Intervall-Länge r unabhängig von der Stelle, an der differenziert wird (“gleichmäßig“)

$$\forall\ c \in [a,b] \cap \mathcal{Q} \text{ und alle } x \in \mathcal{Q} \text{ mit } |x-c| \leq r \text{ gilt:}$$

$$|f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)| \leq K * (x-c)^2$$

mit einem K, das ebenfalls gleichmäßig gefunden werden kann, also unabhängig von der Stelle c.

Beh.: Für $x < y \in [a,b]$ gilt $f(x) \leq f(y)$
Auf die Intervalle der Länge $\frac{y-x}{n} \leq r$ soll die Vor. angewendet werden. Mindestgröße für n: $\frac{y-x}{r} \leq n1$

$$-K(t_k - t_{k-1})^2 \leq f(\underbrace{t_k}_{=x}) - f(\underbrace{t_{k-1}}_{=y}) \underbrace{- \underbrace{f'(t_{k-1})}_{\geq 0} * \underbrace{(t_k - t_{k_1})}_{>0}}_{\leq 0} \leq \underbrace{K * (t_k - t_{k-1})^2}_{\text{wenig nütze}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tfrac{-K(y-x)^2}{n^2} &\leq f(t_k) - f(t_{k-1}) \\ -\tfrac{K(y-x)^2}{n^2} &\leq f(t_k - 1) - f(t_{k-2}) \end{aligned}$$

Addiere diese n Ungleichungen. Siehe Intervallbild:
Anfang und Endpunkte der kleinen Intervalle heben sich auf bis auf das erste und letzte!

$$\frac{-K(y-x)^2}{n^2} * n \leq f(y) - f(x) = f(t_n) - f(t_0) \underbrace{\Rightarrow}_{Archimedes} 0 \leq f(y) - f(x)$$

6.4 Zum Ende des Beweises des Satzes

$a_0, a_1, ..., a_n, ...$ $\qquad d_k = a_k - a_{k-1}$
Die Summe $\sum_{k=1}^{n}$ ist einfacher als sie aussieht
$a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + ... + a_n - a_{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = a_n - a_0 \text{,,Teleskopsummen``}$$

6.5 Folgerungen aus dem Monotoniesatz

Erstens wird unsere Kenntnis über Polynome verbessert.

Bisher:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k - b_k a^k = \sum_{k=0}^{n} (x-a) * (x^{k-1} + ... + a^{k-1}) * b_k$$

$$P(x) - P(a) = (x-a) * \sum_{k=0}^{n} b_k (x^{k-1} + ... + a^{k-1}) \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \text{ vorher}$$

$$|P(x) - P(a)| \leq |x-a| * \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| * k * R^{k-1}}_{\text{evtl. sehr große Konstante, aus Koeffizienten } b_k \text{ und Intervall } [-R,R] \text{ berechnet}} \qquad \text{Vor.: } a, x \in [-R, R]$$

Mit Monotonie: Es sei $|P'(x)| \leq l$ bekannt wobei l u.U. viel kleiner sein kann, als die eben berechnete Konstante.
Dann folgt $|P(y) - P(x)| \leq l * |y - x|$.

Wegen:
Vor.: $|P'(x)| \leq l \qquad -l \leq P'(x) \leq l$
Beh.: $|P(y) - P(x)| \leq l * |y - x| \underbrace{\Leftrightarrow}_{x<y} -l * (y-x) \leq P(y) - P(x) \leq +l(y-x)$

$Q(x) := P(x) + l * x$ oder $= l * x - P(x)$
$Q'(x) = P'(x) + l \geq 0$ oder $= l - P'(x) \geq 0$

$$Q(x) \leq Q(y)$$

$$\text{d.h. } P(x) + l * x \leq P(y) + l * y \text{ oder } l * x - P(x) \leq l * y - P(y)$$

$$\text{sortieren } - l(y - x) \leq P(y) - P(x) \leq l * (y - x)$$

Zweifache Anwendung

$P'' \geq 0 \Rightarrow P'$ schwach wachsend
Wir hatten aus $P'' \geq 0$ schon gefolgert: P liet oberhalb jeder Tangente
$x \in [a, b]$ $Sehne(x) = \frac{P(a)(b-x)+P(b)*(x-a)}{b-a}$, $0 \leq \frac{b-x}{b-a}, \frac{x-a}{b-a}$
$\Rightarrow$ P liegt unterhalb jeder Sehne
$\Leftrightarrow Q(x) := P(x) - Sehne(x) \leq 0$
Vor.: $Q(a) = 0, Q(b) = 0$
$Q'' = P'' \geq 0$, Q' schwach wachsend
Beh.: $x \in [a, b] \Rightarrow Q(x) \leq 0$

$$\text{Fallunterscheidung} \begin{cases} Q'(x) \geq 0 & \Rightarrow & Q' \geq 0 \in [x, b] & \Rightarrow & Q(x) \leq Q(b) = 0 \\ Q'(x) \leq 0 & \Rightarrow & Q' \leq 0 \in [x, b] & \Rightarrow & 0 = Q(a) \geq Q(x) \end{cases}$$

Verallgemeinerung:
Betrachte Vor.: $-B \leq P'' \leq B$

$-B \leq P'' : Q_l(x) = P(x) - \frac{B}{2}(x - a)^2$
$Q_l'' \geq 0$: Q_l liegt oberhalb der Tangente, unterhalb jeder Sehne
$P'' \leq B : Q_r(x) = \frac{B}{2}(x - a)^2 - P(x)$
$Q_r'' \geq 0$: Q_r liegt unterhalb jeder Tangente, oberhalb jeder Sehne

a) Anwendung auf Tangenten

$$P(a)+P'(a)(x-a)-\frac{B}{2}(x-a)^2 \leq P(x) \leq \underbrace{\underbrace{P(a) + P'(a) * (x - a)}_{\text{Tangente bei a}} + \frac{B}{2} * (x - a)^2}_{^2\text{ Parabel mit dieser Tangente}}$$

Interpretation

$$|P(x) - P(a) - P'(a)(x - a)| \leq \underbrace{\frac{B}{2}}_{\substack{\text{Die Hälfte einer} \\ \text{Schranke für die} \\ \text{zweite Ableitung}}} *(x - a)^2$$

b) ähnlich: $|P(x) - Sehne(x)| \leq \frac{B}{2} * (x-a) * (b-x)$

Absolute und relative Fehler

$$f(x) - f(a) \approx \underbrace{f'(a)}_{\text{Steig. des Graph von f}} *(x-a)$$

Absolute Fehler, im Argument werden mit $f'(a)$ multipliziert um absolute Fehler der Werte zu bekommen

Relative Fehler

$$\frac{f(x) - f(a)}{f(a)} \approx \underbrace{\frac{f'(a)}{f(a)}}_{\text{Wachstumsrate von f}} *(x-a)$$

Absolute Fehler im Argument werden durch Multiplikation mit $\frac{f'}{f}(a)$ zu relativen Fehlern der Werte

7 Basisergänzungssatz / Austauschatz von Steinitz II

Satz: (n=2 schon bewiesen)

Aussage A
Vor.: $v_1, ..., v_n$ seien linear unabhängig. V sei der Vektorraum der Linearkombinationen von $v_1, ..., v_n$ Beh.: (n+1) Vektoren $w_1, ..., w_{n+1}$ in V sind immer linear abhängig

Aussage B
Vor.: Die Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ seien linear unabhängig
Dann sind auch $v_1, ..., v_n$ Linearkombinationen von $w_1, ..., w_n$ „Umkehrung linear unabhängiger Linearkombinationen"

Wdh. n=2
1)$w_1 = a_1 * v_1 + a_2 * v_2$
2)$w_2 = b_1 * v_1 + b_2 * v_2$
Aus 1) folgt $v_1 = \frac{1}{a_1}(w_1 - a_2v_2)$
In 2) eingesetzt: $w_2 = \frac{b_1}{a_1}(w_1 - a_2v_2) + b_2v_2 = c_1w_1 + c_2v_2$
da w_1, w_2 linear unabhängig sind $\Rightarrow c_2 \neq 0$
$\Rightarrow v_2 = \frac{1}{c_2}(w_2 - c_1w_1)$
Einsetzen in 1) $v_1 = d_1 * w_1 + d_2w_2$ egal wie d_1, d_2 aussehen, hauptsache es ist möglich v_1, v_2 aus w_1, w_2 zu berechnen.

Aus B folgt A

Vor.: Satz A Voraussetzungen: Fallunterscheidung:

1. **Entweder** können wir unter $w_1, ..., w_{n+1}$ n linear unabhängige Vektoren finden, durch umbennen $w_1, ..., w_n$ linear unabhängig
2. **Oder nicht** In diesem Fall sind $w_1, ..., w_{n+1}$ erst recht linear abhängig.

Zu 1.) ist die Vor. für B erfüllt.
B: sind $v_1, ..., v_n$ Linearkombinationen von $w_1, ...w_n$
Nach Vor.: $w_{n+1} = a_1v_1 + ... + a_nv_n \in V$. Nun erstetze die v_j als Linearkombination der $w_1, \ldots, w_n$.
Damit ist w_{n+1} als Linearkombination von $w_1, ..., w_n$ geschrieben.

Beweis von B

Induktions-Anfang
n=1
n=2 sind einzeln abgehandelt

Induktions-Vorausetzung
Für $n \leq n^* - 1$ ist der Satz bewiesen

Induktions-Schritt
Dann folgt die Behauptung für $n = n^*$

$v_1, ..., v_{n^*}$

$$\begin{array}{rcllllll}
w_1 & = & a_{11} * v_1 & + & a_{12}v_2 & +...+ & a_{1n^*}v_{n^*} & = \sum_{k=1}^{n^*} a_{1k}v_k \\
w_2 & = & a_{21} * v_1 & + & a_{22}v_2 & +...+ & a_{2n^*}v_{n^*} & = \sum_{k=1}^{n^*} a_{2k}v_k \\
\vdots & & & & & & & \\
w_j & = & a_{j1} * v_1 & & & +...+ & & \\
\vdots & & & & & & & \\
w_{n^*} & = & a_{n^*1} * v_1 & + & a_{n^*2}v_2 & +...+ & a_{n^*n^*}v_{n^*} & = \sum_{k=1}^{n^*} a_{n^*k}v_k
\end{array}$$

- **Entweder**: Sind $w_1, ..., w_{n^*}$ Linearkombinationen der $(n^* - 1)$ Vektoren. $v_2, \ldots, v_{n^*}$ und daher linear abhängig.
  $v_1, ..., v_n$ also nach dem bewiesenem linear abhängig.
  Dieser Fall kommt nach Vor. nicht vor! $(w_1, \ldots, w_{n^*})$ linear unabhängig
- **Oder**: Mindestens einer der Koeffinzenten a_{j1} von $v_1 \neq 0$

Durch Umbennen erreichen wir $a_{11} \neq 0$
$v_1 = \frac{1}{a_{11}}(w_1 - (a_{12}v_2 + ... + a_{1n^*}v_{n^*}))$ und in die übrigen Gleichungen einsetzen

$$\left.\begin{array}{rcl} w_2 & = & b_{11}w_1 \quad + \left| \, b_{22}v_2 \, \right| + ... + \quad b_{2n^*}v_{n^*} \\ \vdots & & \\ w_{n^*} & = & b_{n^*1}w_1 \quad + \left| \, \underbrace{b_{n^*2}v_2} \, \right| + ... + \quad b_{n^*n^*}v_{n^*} \end{array}\right\} \text{Damit ist } v_1 \text{ durch } w_1 \text{ ausgetauscht}$$

Fallunterscheidung für die 2. Spalte:

- **Entweder** Einer der Koeffizienten $b_{22}, ..., b_{n^*2}$ ist $\neq 0$
- **Oder keiner**. Das kommt nicht vor, weil $n = n^* - 1$ schon erledigt ist.

Angenommen wir hätten auf diese Weise erreicht, dass $v_1, ..., v_{k^*-1}$ (nach Umbennen) durch $w_1, ..., w_{k^*-1}$ ausgetauscht sind, dann muß gezeigt werden, dass man noch einen Schritt weiter kommt.

$$\begin{array}{rcl} w_{k^*} & = & c_{k^*,1}w_1 \quad + ... + \quad c_{k^*,k^*-1}w_{k^*-1} \quad + \left| \, c_{k^*,k^*}v_{k^*} \, \right| + ... + \quad c_{k^*,n^*}v_{n^*} \\ \vdots & & \\ w_{n^*} & = & c_{n^*,1}w_1 \quad + ... + \quad c_{n^*,k^*-1}w_{k^*-1} \quad + \left| \, c_{n^*,k^*}v_{k^*} \, \right| + ... + \quad c_{n^*,n^*}v_{n^*} \end{array}$$

Warum ist mindestens einer der Koeffizienten $(c_{k^*,^*}, ..., c_{n^*,k^*})$?
$w_1 = w_1$;
$w_2 = w_2$;
$w_{k^*-1} = w_{k^*-1}$;
Jetzt sind $w_1, ..., w_{n^*}$ als Linearkombination von $w_1, ..., w_{k^*-1}, \underbrace{v_{k^*}}_{*}, ..., v_{n^*}$ geschrieben.
$|c_{.,.}w_{k^*-1}|$-Spalte: Angenommen $c_{k^*}w_k = 0, ..., c_{n^*,k^*} = 0$ dann wären $w_1, ..., w_{n^*}$ Linearkombination von $n^* - 1$ Vektoren $w_1, ..., w_{k^*-1}, *, v_{k*+1}, ..., v_{n^*}$ (*: bedeutet ein Vektor weniger)

Also nach dem bereits bewiesenem Satz A für $n = n^* - 1$ wären $w_1, ..., w_{n^*}$ linear abhängig. Dies kommt nicht vor.
Nach Umbennen kann $c_{k^*,k} \neq 0$ angenommen werden und
$v_{k^*} = \frac{1}{c_{k^*k^*}}(w_{k^*} - c_{k^*,1}w_1 - ... - c_{k^*,k^*-1}w_{k^*-1} - c_{k^*,k^*+1}v_{k^*+1} - ... - c_{k^*,n^*}v_{n^*})$
Einsetzen in die —...—-Spalte
Damit ist das nächste v_{k^*} ausgetauscht.
Im letztem Schritt entsteht $v_{n^*} = d_1 * w_1 + d_2 * w_2 + ... + d_{n^*}w_{n^*}$

Definition: Vektorräume, in denen jeder Versuch möglichst viele linear unabhänige Vektoren auszuwählen, nach endlich vielen Schritten abbricht, heißen endlich dimensionale Vektorräume.
Bemerkung: $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ sein eine maximale Menge linear unabhängiger Vektoren.

d.h. für jedes $v \in V$ ist $\{v_1, ..., v_n, v\}$ linear abhängig.

d.h. $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j + a * v = 0$ und nicht alle a_j sind 0

Beh.: $a \neq 0$, weil $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig vorausgesetzt.
Also $v = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

d.h. jeder Vektor in V ist Linearkombination der Vektoren einer maximal linear unabhängigen Menge. Unser Satz behauptet: Alle max. linear unabhängigen Mengen enthalten gleich viele Vektoren.

7.1 Nutzen des Austauschsatzes

Aufgabe a) Bestimme Mengen $\{v_1, ..., v_{n^*}\}$ linear unabhängiger Vektoren, die nicht vergrößert werden können.

Aufgabe b) Bestimme Mengen $\{v_1, ..., v_n\}$ linear unabhängiger Vektoren, für die die Anzahl N maximal ist.

Der Austauschsatz vereinfacht den Umgang mit "linear unabhängig" sehr stark, weil er sagt, dass die Aufgaben a) und b) <u>dieselbe</u> Antwort haben.

Beweis:
Aufgabe a) sei gelöst: $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren, die nicht vergrößert werden kann, d.h.
Für jedes $v \in V$ ist $\{v_1, ..., v_n, v\}$ linear abhängig, d.h. $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ Seien Vektoren $w_1, ..., w_{n+1}$ Linearkombinationen der $v_1, ..., v_n$, dann sind sie immer linear abhängig. D.h. man kannn auf keine Weise Mengen linear unabhängiger Vektoren mit <u>mehr als n</u> Elementen finden, also ist b) gelöst

Der Satz ermöglicht einen raschen Überblick über die Menge aller linearen Abb. $L : V \to W$ (V,W sind K-Vektorräume).
Wähle eine $\underbrace{\text{maximale Menge linear unabhängiger Vektoren}}_{\text{genannt ,,Basis``}}\{v_1, ..., v_n\} \subset V$
und beachte, dass jedes $v \in V$ als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ eindeutig dargestellt werden kann.
Betrachte die Bildvektoren $w_j = L(v_j) \in W$
Dann ist $L(v) = L(\sum a_j v_j) = \sum a_j \underline{L(v_j)} = \sum a_j w_j$
Umgekehrt: $w_1, ..., w_n \in W$ bel. gewählt
Benutze die Formel als Definition einer linearen Abbildung.

8 Basis, Spann und "Erzeugende Systeme"

Es kann vorkommen, dass man eine Teilmenge $M \subset V$ hat, so dass jedes $v \in V$ Linearkombination $v = \sum a_j m_j$ mit $m_j \in M$, aber nicht unbedingt eindeutig. In solchen Fällen heißt M **"Erzeugendes System"**.
Beispiele:
U_1, U_2 Unterräume von V

$$Span(U_1, U_2) = \left\{ v \in V;\ \begin{matrix} u_1 \in U_1 \\ u_2 \in U_2 \end{matrix}\ \text{ mit } v = u_1 + u_2 \right\}$$

Also $U_1 \cup U_2 \subsetneq Span(U_1, U_2)$ ist erzeugend für $Span(U_1, U_2)$

Es ist jetzt leicht lineare Abbildungen $L : V \to W$ (K-Vektoräume) anzugeben. Wähle eine Basis $\{v_a, ..., v_n\}$ für V und irgendwelche Vektoren $w_1, ..., w_n \in W$.
Definiere: $L(v_j) := w_j \qquad (j = 1, ..., n)$

$$L(v) = L(\sum a_j v_j) := \sum a_j * w_j$$

Der Vektorraum $\{L : V \to W, L \text{ linear }\} =: Hom(V, W) (=$ lin. Abb $(V, W))$
Wie groß ist die Dimension des Vektorraums $Hom(V, W)$?
Welches sind möglichst einfache Elemente von $Hom(V, W)$?

$$\begin{matrix} L(v_1) = w = 0 & \\ L(v_j) = 0 & j = 2, ..., n \end{matrix}$$

Versuche möglichst viele dieser einfachen Abbildungen linear unabhängig zu kriegen!

$$\begin{matrix} L_i(v_i) = w \neq 0 & \\ L_i(v_j) = 0 & \text{falls } i \neq j \end{matrix}$$

Diese $L_i \in Hom(V, W)$ sind linear unabhängig.
Angenommen $\sum_{i=1}^n a_i L_i = 0 \qquad$ (Zz.: alle $a_i = 0$)

$$0 = W_{v_j}\left(\sum_{i=1}^n a_i L_i\right) := \left(\sum_{i=1}^n a_i L_i\right)(v_j) = \sum_{i=1}^n a_i L_i(v_j) = \sum_{i \neq j}^n a_i \underbrace{L_i(v_j)}_{=0} + a_j L_j(v_j)$$

Also $a_j * \underbrace{w}_{\neq 0} = 0$ also $a_j = 0$

Mit anderen Worten: Anwendnung der Auswertung W_{v_j} liefert $a_j = 0$. Dies kann für j wiederholt werden. Also sind alle $a_j = 0$ und $L_1, \ldots, L_n$ linear unabhängig. Wie bekommt man weitere? Wähle eine Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ für W und wiederhole die Definition von eben für jedes w_k.

$$\begin{matrix} L_{ki}(v_i) = w_k & \\ L_{ki}(v_j) = 0 & i \neq j \end{matrix}$$

Dieses definiert $n * m$ dieser einfachen Abbildungen

Beh.: Die L_{ki} sind linear unabhängig.

Vor.:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}L_{ki} = 0 \text{ mit } a_{ki} \in K$$

Zz.:
Alle $a_{ki} = 0$
Was macht die Auswertung W_{v_j} mit dieser Linearkombination?

$$W_{v_j}\left(\sum_{k,i} a_{ki}L_{ki}\right) = \sum_{k,i} a_{ki} \underbrace{L_{ki}(v_j)}_{\text{sehr oft 0 und nur} \neq 0, \text{ (dann } = w_k) \text{ wenn der Summationsindex i gleich dem Index j des gewählten } W_{v_j} \text{ ist}} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} * w_k$$

j ist fest gewählt / w_k lin. unab. nach Vor.

$$\Rightarrow a_{kj} = 0 \text{ für j fest und} k = 1, \ldots, m$$

Wiederhole dies Argument mit allen Auswertungen W_{v_j} $\quad j = 1, \ldots, n$
Damit: alle $a_{k_j} = 0$
Letzter Schritt: Jede lineare Abbbildung $L \in Hom(V, W)$ ist Linearkombination der bisher gefundenen linear unabhängigen L_{ki}
Jede lineare Abbildung ist durch die Bilder $L(v_j) \in W$ mit $j = 1, \ldots, n$ (mit Basis $\{w_1, \ldots, w_m\}$)der Basisvektoren schon bestimmt.

$$\text{D.h.: } L(v_j) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \lambda_{kj} w_k}_{u_j}$$

Die Zahlen λ_{kj} sind durch L eindeutig bestimmt. Und wenn man sie kennt, ist L bekannt.

Beh.:

$$L = \textstyle\sum_{k,j} \lambda_{kj} * L_{kj}$$
$$\Leftrightarrow \textstyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_{kj} w_k = L(v_j) = \underbrace{\displaystyle\sum_{ki}}_{i=j \Rightarrow w_k} \lambda_{ki} * \underbrace{L_{ki}(v_j)}_{\text{entweder } w_k \text{ oder } 0}$$

Dies ist genau dann wahr, wenn die linke und die rechte Seite auf allen Basisvekktoren v_j dasselbe Bild haben.

Wir haben damit gezeigt $\left\{L_{ki} \;\middle|\; \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, m \end{array}\right\}$ ist eine Basis von Hom(V,W).

In gewisser Weise sind alle n-dim Vektorräume gleich.

V sei ein beliebiger n-dim Vektorraum und $K^n = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} ; a_j \in K \right\}}_{\text{das Standardbeispiel.}}$

Wähle Basis $\{v_a, \dots, v_n\}$ und stelle $v \in V$ eindeutig dar und definiere eine Abb. nach K^n:

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \quad \underset{\text{KbBV}}{\xrightarrow{\textbf{K}\text{oeff. }\textbf{b}\text{zgl. }\textbf{B}\text{asis von }\textbf{V}}} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

$$KbbV(v) = KbBV\left(\sum a_j v_j\right) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Warum ist KbBV linear?
injektiv?
surjektiv?

- linear

$$\left(\sum r a_j v_j\right) = \begin{pmatrix} & a_1 \\ r * & \vdots \\ & a_n \end{pmatrix}$$

$$KbBV(u_1 + u_2) = KbBV\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j v_j}_{u_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j v_j}_{u_2}\right)$$

$$= KbBV \sum (a_j + b_j) v_j = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ linear!

- injektiv

  Aus $KbBV(u_1) = KbBV(u_2)$ folgt(linear!) $KbBV(u_1 - u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

  d.h.: $u_1 - u_2 = \sum_{j=1}^{n} o * v_j = 0 \in V$ oder $u_1 = u_2$
  $\Rightarrow u_1 = u_2$ injektiv bewiesen!

- surjektiv! (offensichtlich)

$$\left.\begin{array}{l}\text{linear}\\ \text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\end{array}\right\}\text{Isomorphismus}$$

Was wird aus linearer Abbildung $L : V \to W$ $(K^n \to K^m)$?

$$K^n \overset{KbBV}{\longleftarrow} V \overset{KbBW}{\longrightarrow} K^m$$

$$K^n \overset{\text{KbBW } \circ L \circ (KbBV)^{-1}}{\longrightarrow} K^m$$

Vorhin hatten wir $L_{ki} \in Hom(V, W)$

$$\left.\begin{array}{l} L_{ki}(v_i) = w_k \\ L_{ki}(v_j) \underbrace{=}_{i \neq j} 0 \end{array}\right| \text{Was wird aus dieser Basis}$$

$$KbBV(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; KbBV(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile}$$

$$KbBW(w_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Zeile} \in K^m$$

Was ist $KbBV \circ L_{ki} \circ (KbBV)^{-1} : K^n \longrightarrow K^m$?

$$KbBV(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te Zeile} \in K^n \longrightarrow KbBW(w_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Zeile}$$

Alle anderen Vektoren der Standardbasis von K^n

$$KbBV(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow\neq \text{i-te Zeile} \in K^n \longrightarrow KbBW(w_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$KbBW \circ L_{ki} * (KbBV)^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Zeile}$$

8.1 Nutzen Lineare Abbildungen

Falls ein Polynom$P \in K[x]$ eine Nullstelle in $a \in K$ hat, kann man schreiben
$P(x) = (x-a) * P_1(x); \qquad P_1 \in K[x]$
$Grad(P_1) = (Grad(P)) - 1$
Die 0-Abb. hat 7 Nullstellen oder auch noch mehr.

8.1.1 Tricklösung zu Assoziativität

Für Abbildungen $f, g, h \in Abb(M, M)$ gilt das Assoziativgesetz wegen $(f \circ (g \circ h))(x) = f(g(h(x))) = ((f \circ g) \circ h)(x)$ immer. Beim Nachweis der Körperaxiome kann man Abbildungen $Add_a, Mul_a \in Abb(K, K)$ definieren durch: $Add_a(b) := a + b$, $Mul_a(b) := a \cdot b$, also $a + b = Add_a \circ Add_b(0)$. Wegen dieser Interpretation braucht man die Assoziativgesetze nicht mehr nachzurechnen. Surjektivitätskriterium für lineare $L : V \to W$.

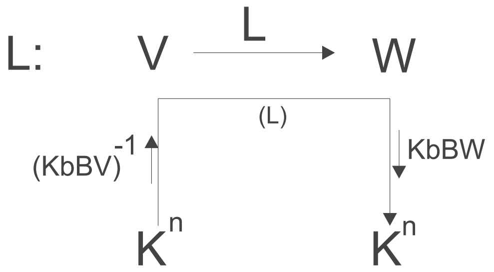
Beh.: L ist injektiv genau dann wenn $0 \in V$ als einziges Element auf $0 \in W$ abgebildet wird.

Angenommen:
$L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow$
$L(v_1 - v_2) = 0\} \, v_1 - v_2 = 0$ oder $v_1 = v_2$
Falls $L(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ bekannt

8.1.2 Koeffizienten bezgl. der Basis, (Wiederholung)

$L : V \to W$
$\{v_1, ..., v_n\}$ Basis für V
$\{w_1, ..., w_n\}$ Basis für W
$KbBV : V \to K^n$

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$



Die besonders einfachen linearen Abbildung. L_{ki} $V \to W$ werden definiert (nachdem die Basen gewählt sind) durch:
$L_{ki}(v_i) := w_k$
$L_{ki}(v_j) := 0$ für $j \in \{1, \ldots, n\} - i$ oder $j \neq i$
Diese $n * m$ linearen Abbildungen sind linear unabhängig. (Dazu werden Auswertungen $W_{v_j} : Hom(V, W) \to W$ benutzt). Jede andere lineare Abb. $L : V \to W$ ist Linearkombinatin der L_{ki}

$$L = \sum_{i,k} \lambda_{ki} L_{ki} \quad \text{Lin.-kom in } Hom(V, W) = \text{Lin. Abb.(V,W)}$$

$$L(v_j) = \sum_{i,k} \lambda_{ki} \cdot \underbrace{L_{ki}(v_j)}_{\text{falls } i \neq j \text{ falls Summationsindex i ungleich dem Index j } v_j \text{ ist}} = \sum_{i=j,k=1}^{n} \lambda_{kj} \cdot \underbrace{L_{kj}(v_j)}_{w_k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{kj} w_k}_{\text{Lin.-kom. in W}}$$

$$KbBW\ L_{ki} \circ (KbBV)^{-1}\ K^n \to K^m$$

$$\text{i-te Zeile} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{k-te Zeile}|\text{Nun Lin.-Kom.}\ \cdot \lambda_{kj}, \sum_k$$

Nach Kombination von L mit den (nach Wahl der Basen) Standardabb.:

$$L = \sum \lambda_{ki} L_{ki}$$

$$\text{i-te Zeile} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{kj} \\ \vdots \\ \lambda_{nj} \end{pmatrix}$$

$KbBW \circ L \circ (KbBV)^{-1}$ hat man folgende Interpretation für die Zahlen λ_{ki} :

$$L(v_j) = \sum_k \lambda_{kj} w_k$$

Die Zahlen λ_{kj} bei festen j können als Bilder in K^m des j-ten Basisvektor von K^n interpretiert werden.

Um die Abb.(L) zu beschreiben, ist Kenntnis der Zahlen $(\lambda_{kj})_{k=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$ offenbar ausreichend.

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{mn} \end{pmatrix} \text{ oder kürzer } \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \ldots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Diese Anordnung heißt die Matrix der linearen Abb. L bzgl. der Basen } \{v_1,\ldots,v_n\} \text{ von V und } \{w_1,\ldots,w_n\} \text{ von W}}$$

8.2 Die Standardkonvention von Linearkombinationen

$$\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{1j} \end{pmatrix} * a_j \text{ der Spaltenvektoren } \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{mj} \end{pmatrix}$$

zu schreiben, ist die sogenannte Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \underbrace{\circ}_{\text{wird definiert durch Gleichheitszeichen}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_{1j} \\ \vdots \\ \lambda_{1j} \end{pmatrix} * a_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1j} * a_j \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{2j} * a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj} * a_j \end{pmatrix}}_{\text{Bildvektoren}}$$

Die Multiplikation von Matrizen beschreibt offensichtlich die Komposition lin. Abbildungen!

9 Folgen

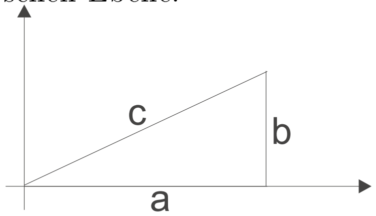
- Definitionen:
  Ein paar Vokablen:
  beschränkt $|f(x)| \leq C \qquad x \in ....$
  Dehnungsschranke: $|f(x) - f(a)| \leq L|x - a|$
  (streng) monoton wachsend: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

- Differentiationsregeln: Linear, Produkt., Kettenregel (Beweise der Regeln verbessern die Regeln)
  $f' \leq g' \Rightarrow g - f$ ist wachsend

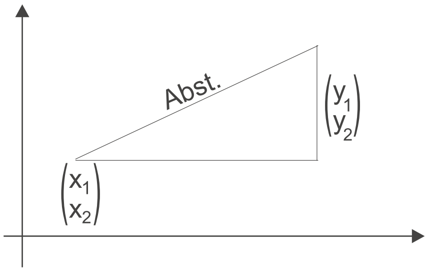
  $$\frac{f'}{f} \leq \frac{g'}{g} \text{ ist wachsend}$$

- Hilfsmittel: Archimedes Axiom:
  $0 < r, 0 < R$ dann gibt es $n \in \mathcal{N}, n * r > R$
  zuzüglich eines indirekten Beweises: Falls $0 \leq r$ alle Ungleichungen $r \leq \frac{const}{n}, n \in \mathcal{N}$ erfüllt dann folgt $r = 0$
  Archimedes Strategie: Um eine Ungleichung $a \leq b$ zu beweisen, genügt es die schwächeren Ungleichungen $a \leq b + \frac{comst}{n} \qquad \forall n \in \mathcal{N}$ zu zeigen.

Anwendung: Ausdehnung der Differenzierbarkeit auf Kurven in der euklidischen Ebene.



$c = \sqrt{a^2 + b^2}$



$$Abst. = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Seien $f, g : I \to \mathcal{Q}($ oder $\mathcal{R})$ diffbare Funktionen dann ist $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : I \to \mathcal{Q}^2$

9.1 Beispiel: gute Approximation mit dem Monotoniesatz

$$\begin{array}{ccccccccc} f_n(x) := & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n & \leq & f_{n+1}(x) \leq & \ldots & (exp?) & \ldots \leq g_{m+1}(x) & \leq & g_m(x) := \left(\frac{1}{1-\frac{x}{m}}\right)^n \\ & & \Uparrow & & & & & \Uparrow & \\ & \frac{f_n'}{f_n} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}} & \leq & \frac{f_{n+1}'}{f_{n+1}} \leq & \ldots & & \ldots \frac{g_{m+1}'}{g_{m+1}} & \leq & \frac{g'}{g_m}(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{m}} \end{array}$$

Aus der ersten Zeile folgt dann:
Vor.: $n \geq n_1$, $x \in [0, R]$, $R \leq \frac{n_1}{2}$
Beh.:

$$0 \leq g_n(x) - f_n(x) = \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} - \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n * \left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

$$= g_n(x) * (1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n) \leq g_{n_1}(R) * (1 - q^n)$$

$$\text{mit } q = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \text{ und } \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k \leq n$$

(ausführlicher im Abschnitt Endgültige Definition)

$$1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq n * (1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)) = \frac{x^2}{n} \leq \frac{R^2}{n}$$

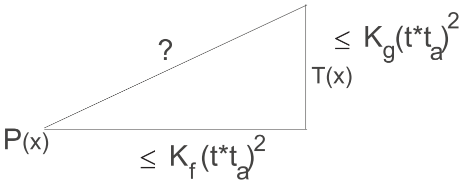
Vor.:

$$t \in [t_0 - r_f, t_0 + r_f] \Rightarrow |f(t) - f(t_0) - f'(t_0) * (t - t_0)| \leq \overbrace{K_f * (t - t_0)^2}^{Fehler_f}$$
$$t \in [t_0 - r_g, t_0 + r_g] \Rightarrow |g(t) - g(t_0) - g'(t_0) * (t - t_0)| \leq \underbrace{K_g * (t - t_0)^2}_{Fehler_g}$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$|\underbrace{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(t) - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(t_0)}_{\begin{pmatrix} f(t)-f(t_0) \\ g(t)-g(t_0) \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}(t_0) * (t-t_0)|$$

$$\leq \sqrt{Fehler_f^2 + Fehler_g^2} \leq \sqrt{K_f^2 + K_g^2} * (t-t_0)^2$$



Wir haben also erreicht:

$$\leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \ldots \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq$$

$$\text{und } 0 \leq g_n(x) - f_n(x) \leq \underbrace{\frac{const}{n}}_{\substack{\text{Die Konstante ist bestimmt,} \\ \text{so dass für alle } x \in [0,R] \text{ die} \\ \text{Ungleichung gilt.}}}$$

Ziel: In dieser Situation soll eine ,, Grenzfunktion“ definiert werden.
Für jedes einzelne x soll der Wert dieser ,,Grenzfunktion“ definiert werden.

Eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots, \in \mathcal{N}$ besteht aus zwei monotonen Zahlenfolgen $a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots, \ldots b_n \geq b_{n+1} \geq \ldots$, mit anderen Worten:

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, so dass außerdem gilt:
Vorläufig: $|b_n - a_n| \leq \frac{const}{n}$ (wird noch ein wenig abgeschwächt)

Vollständigkeitsaxiom für reelle Zahlen besagt: Zu jeder Intervallschachtelung gibt es eine reelle Zahl r, die in allen Intervallen liegt: $r \in [a_n, b_n]\ \forall\ n \in \mathcal{N}$

9.2 Konvergenz

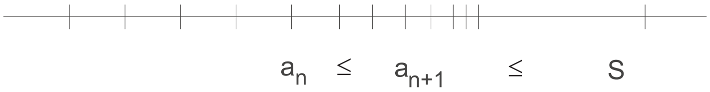
Welche Eigenschaften erwarten wir von Konvergenzen?
Die ,,Aussage“ Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ konvergiert gegen a bedeutet dasselbe wie die

Folge $\{a_n - a\}_{n\in\mathcal{N}}$ konvergiert gegen 0.

Was für Folgen konvergieren gegen 0?
Mindestens die Archimedes Folgen $a_n = \frac{const}{n}$

Majorisierungsprinzip: Falls a_n eine schon bekannte Nullfolge ist, und r_n ist eine Folge mit $|r_n| \leq a_n$, dann ist auch r_n Nullfolge.

Warum genügt das nicht? Genauer, warum definieren wir nicht:
Eine Folge r_n heißt Nullfolge, falls gilt $|r_n| \leq \frac{const}{n}$?
Nicht abbrechende Dezimalzahlen sind Beispiele monoton wachsender beschränkter Folgen. $b_n = 0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$



Zu den geometrisch wünschenswerten Eigenschaften von Konvergenz gehört: Eine monoton wachsende beschränkte Zahlenfolge in $\mathcal{R}$ sollte einen Grenzwert haben.
Beispiel:

$$-\frac{const}{n} \leq a_n \leq a_{n+1} \leq 0$$

sei eine monotone Nullfolge. Jetzt definieren wir schlechtere Nullfolgen, die aber immer noch monoton und beschränkt sind:

$$r_1 = a_1, r_2 = a_2, r_3 = a_2, r_4 = a_2, \ldots, r_{20} = a_2, r_{21} = a_3, \ldots, r_{100} = a_3$$

usw. wir verlangsamen die Konvergenz von a_n so sehr wir wollen. Dadurch wird verhindert, dass die monotone Nullfolge $\{r_n\}$ explizit mit $\frac{const}{n}$ vergelichen werden kann.

9.3 Endgültige Definition

Eine Folge $\{r_n\}$ heißt Nullfolge, wenn die Aussage richtig ist:
Zu jeder (evtl. sehr kleinen) Fehlerkonstanten $\varepsilon > 0$ (oder auch $\frac{1}{k}, k \in \mathcal{N}$) gibt es einen (evtl. sehr großen) Garantieindex n_ε so dass aus:

$$n \geq n_\varepsilon \text{ folgt } |r_n| \leq \varepsilon$$

Zusatz:
$\{a_n\}$ heißt konvergent gegen a falls gilt: $\{a_n - a\}$ ist Nullfolge
Endgültige Intervallschachtelung: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und $\{b_n - a_n\}$ ist Nullfolge.

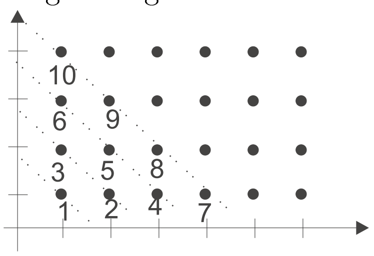
Aus dem Vollständigkeitsaxiom für $\mathcal{R}$ folgt sofort:
Die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ einer Intervallschachtelung konvergiernen gegen die Zahl $r \in [a_n, b_n]$, die das Vollständigkeits-Axiom liefert.
Beweis:

$$\begin{aligned} 0 \le r - a_n \le b_n - a_n &: \text{ Nullfolge nach Voraussetzung} \\ &\Rightarrow r - a_n \text{ auch Nullfolge} \end{aligned}$$

9.3.1 Intervallschachtelung für die Exponentialfunktion

$$[f_n(x), g_n(x)] \text{ ist ein Intervallschachtelung}$$
$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \ldots \le g_{n+1}(x) \le g_n(x) \text{ und } \{g_n(x) - f_n(x)\} \text{ ist Nullfolge}$$

Vollständigkeitsaxiom: Es gibt eine reelle Zahl $r \in [f_n(x), g_n(x)]$ diese Zahl heißt $r = exp(x)$
$f_n(x) = f'_n(x) * \left(1 + \frac{x}{n}\right)$ $\quad g_n(x) = g'_n(x) * \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ Erwartung: exp sollte diffbar sein mit $exp' = exp$
Einschub:
Es gibt unglaublich viel mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen.



1. Behauptung: Die positiven rat. Zahlen sind abzählbar.
   D.h. jede positive rationale Zahl hat eine nat. Zahl als Nummer [(m, n) die rationale Zahl $\frac{m}{n}$ repräsentieren]

2. Zum Vergleich von rationalen und reellen Zahlen in $[0, 1]$
   Um jede Zahl $q \in \mathcal{Q}$ wähle ich ein kleines Intervall, so dass die Gesamtlänge all dieser Intervalle $\le \frac{1}{1000000}$ ist!

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} q_1 & \text{sitzt in einem Intervall der Länge } \frac{1}{1000000} * \frac{1}{2} \\ q_2 & \text{sitzt in einem Intervall der Länge } \frac{1}{1000000} * \frac{1}{4} \\ \vdots & \\ q_k & \text{sitzt in einem Intervall der Länge } \frac{1}{1000000} * \frac{1}{2k} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Gesamtlänge} \\ \le \\ \frac{1}{1000000} \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right)}_{\le 1} \end{array}$$

Wiederholung, einfache Fogerungen

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt **Nullfolge**, wenn gilt: Zu jeder Fehlerschranke $\varepsilon \geq 0$ gibt es einen Garantieindex n_ε so dass: $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\lvert a_n \rvert \leq \varepsilon$ ist.
Eine Folge $\{b_n\}$ heißt **konvergent** gegen b wenn $\{b_n - b\}$ Nullfoge ist.

Was können wir ohne weitere Anstrengungen?

Vor.:
f sei eine Funktion mit Dehnungsschranke L ($\lvert f(y) - f(x)\rvert \leq L * \lvert y - x\rvert$)

Beh.:
f bildet gegen b konvergente Folgen $\{b_n\}$ auf gegen f(b) konvergente Folgen $\{f(b_n)\}$ ab.

Beweis:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε so dass $n \geq n_\varepsilon : \lvert b_n - b\rvert \leq \varepsilon$
Aus der Vor. über f folgt: $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \lvert f(b_n) - f(b)\rvert \leq L * \lvert b_n - b\rvert \leq L * \varepsilon$
Wie ist es zu reparieren, das nur die Fehlerschranke $L * \varepsilon$ erreicht wird?
Zu jedem $\frac{\varepsilon}{L} > 0$ gibt es $n_{\frac{\varepsilon}{L}}$ so dass $n \geq n_{\frac{\varepsilon}{L}} : \lvert b_n - b\rvert \leq \frac{\varepsilon}{L}$
Aus der Vor. über f folgt: $n \geq n_{\frac{\varepsilon}{L}} \Rightarrow \lvert f(b_n) - f(b)\rvert \leq L * \lvert b_n - b\rvert \leq L * \frac{\varepsilon}{L}$
Verbesserung: $\Rightarrow$ Falls Garantieindex für die Folge $f(b_n)$ aus der Voraussetzung über die Folge $\{b_n\}$ zu der Fehlerschranke $\frac{\varepsilon}{L}$ bestimmt wird, so wird am Schluß die gewünschte Fehlerschranke für die Bildfolge $\{f(b_n)\}$ erreicht.

Vor.:
$\{a_n \geq 0\}$ sei ein konvergente Folge.

Beh.:
Dann ist $a \geq 0$

Indirekter Beweis.:
$a_n - a$ ist eine Nullfolge, $\lvert a_n - a\rvert \leq P_n$ $\{P_n\}$ ein pos. Nullfolge
Angenommen: $a < 0 : P_n \underbrace{\geq}_{\text{Konvergenzdef.}} a_n - a \geq -a = \lvert a\rvert \underbrace{>}_{\text{indirekte An.}} 0$
Wie kann die Def. von $\{P_n\}$ ist Nullfolge benutzt werden, um hier einen Wiederspruch zu erreichen?
Zu jedem $\varepsilon > 0$, z.B.: $\varepsilon = \frac{\lvert a\rvert}{3}$, gibt es einen Garantieindex n_ε mit $0 < \lvert a\rvert \leq P_n \leq \frac{\lvert a\rvert}{3}$ falls $n \geq n_\varepsilon$

Der Widerspruch ist $1 \leq \frac{1}{3}$ (nach Division $|a| > 0$) $\rightsquigarrow$ Deswegen ist die Annahme falsch d.h. $a \geq 0$

Anwendung auf die Approximation der Exponentialfunktion

1. Schranken

$$f_n(x) \leq \exp(x) \leq g_n(x) \leq g_8(x) \leq \left(\frac{1}{1-\frac{4}{8}}\right)^8 = 2^8$$

2. Ableitungsschranken, Dehnungsschranken

$$f_n'(x) = \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}}_{\geq 0} \leq f_n(x) \leq 2^8 \quad \begin{array}{l} n \geq 8 \\ x \leq 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} |f_n(y) & - & f_n(x) & | \leq 2^8 * |y-x| \\ \| & & \| & \\ \underbrace{\exp(y)+r_n}_{Nullfolge} & & \underbrace{\exp(x)+s_n}_{Nullfolge} & \end{array}\right\} \begin{array}{l} |\text{Monotoniesatz} \\ \\ \text{Dreiecksungleichung} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$|\exp(y)-\exp(x)| \leq 2^8 * |y-x| + \underbrace{|r_n| + |s_n|}_{Nullfolge}$$

$$\text{Deshalb folgt } |\exp(y)-\exp(x)| \leq 2^8 * |y-x|$$

9.4 Wiederholung zur Exponentialfunktion

siehe Intervallschachtelung
$n^* \leq n$
$0 \leq x \leq R := \frac{n^*}{2}$
$0 \leq g_n(x) - f_n(x) \leq \frac{2^{n^*}R^2}{2}$

$$0 \leq g_n(x) - f_n(x) = g_n(x) * \left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq \underbrace{g_{n^*}(R)}_{2^{n^*}} * \left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$$

NR.:

$$(n+1)q^n \leq 1+q+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \leq \frac{1}{1-q}$$

$$(1-q)*R \geq (1-q)*(\underbrace{1+q+\ldots+q^{n-1}}_{\substack{\text{n-} \\ \text{Summanden} \\ \leq n}}) = (1-q^n)$$

$$1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq n*\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\right)=\frac{x^2}{n}\leq\frac{R^2}{n}$$
$$(1-q^n)\leq n*(1-q)$$
$$0\leq g_n(x)-f_n(x)\leq\frac{2^{n^*}*R^2}{n}\text{wohlbekannte Nullfolge}$$
$$[f_n(x),g_n(x)]\text{ ist damit Intervallschachtelung}$$

9.5 Welche Eigenschaften hat die Grenzfunktion?

Insbesondere: Ist exp. Funktion differenzierbar und gilt $\exp' = \exp$?
Eine vorläufige und einfache Frage ist: Kann man die Sehnensteigungen der Grenzfunktion kontrollieren?
Dazu werden die Sehnensteigungen der Approximation f_n mit dem Monotoniesatz kontrolliert. $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ $\quad f_n'(x) = n*(1+\frac{x}{n})^{n-1}*\frac{1}{n} \leq f_n(x) \leq g_{n^*}(x) \leq g_{n^*}(R) = 2^{n^*}$
$0 \leq x$
Monotoniesatz: $0\leq x,y\leq R: |f_n(x)-f_n(y)| \leq 2^{n^*}*|x-y|$
$\exp(x) = f_n(x)+r_n$ $\quad r_n, s_n$ sind Nullfolgen (≥ 0)
$\exp(y) = f_n(y)+s_n$
Wie groß ist $|\exp(x)-\exp(y)| \leq ?$
NR.:
$|\exp(x)-r_n-\exp(y)+s_n| \leq 2^{n^*}*|x-y|$
$|\exp(x)-\exp(y)| \leq 2^{n^*}*|x-y|+s_n-r_n$
Zur Dreiecksungleichung:
Formulierungsvarianten:

$$\begin{array}{lll} |a+b|\leq|a|+|b| & \text{ersetzte a durch} & |c|\leq|c\pm b|+|b| \\ |a\pm b|-|b|\leq|a| & c\pm b & |c|-|b|\leq|c\pm b| \end{array}$$

Anwendungsstrategien:

$$\begin{array}{ll} |\text{Kompliziert}-\text{Einfach}|\leq\text{kl. Fehler} & |\text{Hauptterm}+\text{Störterm}|\leq\text{Wunsch} \\ |\text{Funktion}-\text{Tangente}|\leq\text{quad. Fehler} & |\text{Hauptterm}|\leq\text{Wunsch}+|\text{Störterm}| \end{array}$$

Archimedes Strategie:
Um $a \leq b$ zu beweisen, genügt es $a \leq b+\frac{const}{n}$ zu beweisen.
In unserem Fall folgt also aus:

$$|\exp(x)-\exp(y)|\leq 2^{n^*}*|x-y|+\frac{2^{n^*}*R^2}{n}$$

$$\Rightarrow 0\leq x,y\leq R\leq\frac{n^*}{2}\Rightarrow|\exp(x)-\exp(y)|\leq 2^{n^*}*|x-y|$$

Die ist unsere erste Ungleichung für nicht berechenbare Funktionswerte.

Ist exp **sogar differenzierbar, und gilt** $\exp' = \exp$**?**

NR.: $f_n'(x) * (1 + \frac{x}{n}) = f_n(x)$ $\{\exp(x) - f_n(x)\}$ ist Nullfolge
$f_n'(x) + f_n'(x) * \frac{x}{n} = f_n(x) \Rightarrow 0 \leq f_n(x) - f_n'(x) \leq \frac{2^{n^*}R}{n}$ Nullfolge
also $\Rightarrow |\exp(x) - f_n'(x)|$ Nullfolge
Gibt es eine Fehlerabschätzung für die Grenzfunktion?

$$|f_n(x) - f_n(a) - f_n'(a) * (x-a)| \leq \frac{Schranke(f_n'')}{2} * |x-a|^2 \leq \underbrace{\frac{2^{n^*}}{2} * |x-a|^2}_{\forall n \geq n^*}$$

$$\text{denn } f_n''(x) = f_n'' = \frac{n-1}{n} * (1 + \frac{x}{n})^{n-1} \leq f_n'(x) \leq 2^{n^*}$$

9.6 Weitere Funktionen? $\exp, \sin, \cos$

Wir haben kein anderes Verfahren als durch Approximation mit rationalen Funktionen (=Polynomquotienten) [am besten von oben und unten $\rightsquigarrow$ Intervallschachtelung] neue Funktionen zu konstruieren
Wiederholung:
$a_n \leq a_{n+1} \leq + \ldots + \leq b_{n+1} \leq b_n$
$\Rightarrow [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$
$b_n - a_n$ ist Nullfolge
r_n Nullfolge $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε mit $n > n_\varepsilon \Rightarrow |r_n| < \varepsilon$
Harmlose Ausdehnung: Konvergenz a_n konvergiert gegen a $\Leftrightarrow a_n - a$ Nullfolge

9.7 Auftritt der reellen Zahlen

Es gibt genug, d.h. Axiom über Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ gibt es eine reelle Zahl r mit $r \in [a_n, b_n]$ für alle n
Arschimedes Axiom:
Falls $0 \leq r \leq \frac{const}{n} \forall n$ so folgt: $|a - \frac{const}{n}| \leq \varepsilon \Rightarrow |a| \leq \varepsilon$

9.8 Konstruktion von exp (Wiederholung)

$f_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
$g_n(x) := \left(\frac{1}{1-\frac{x}{n}}\right)^n$ bei $x = n$ ein Pol

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \ldots \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$$

$\frac{f_n'(x)}{f_n} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \leq 1$
$0 \leq 1 - \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \leq \frac{R}{n}$
$0 \leq x \leq R - \frac{n^*}{2}, n \geq n^*$ z.B.: =8
$\frac{g_n'(x)}{g_n} = \frac{1}{1-\frac{x}{n}} \geq 1$
Intervallschachtelung: $\underbrace{g_n(x) - f_n(x)}_{Nullfolge} \leq 2^{n^*} * \frac{R^2}{n}$

Auftritt der reellen Zahlen

Vollständigkeits Axiom: Es gibt für jedes x eine Zahl, genannt $\exp(x)$, mit $\exp(x) \in [f_n(x), g_n(x)]$
Was weiß man über die Grenzfunktion?

$$f_n'(x) \leq f_n(x) \leq g_{n^*}(x) \leq g_{n^*}(R) = 2^{n^*} \text{ Konstante}$$

$0 \leq x, 0 \leq R \Rightarrow$

$$|\underbrace{f_n(x)}_{=\text{exp(x) + N.F.}} - \underbrace{f_n(a)}_{=\text{exp(a) + N.F.}}| \leq L * |x-a| ???$$

$$\text{also } |exp(x) - exp(a)| \leq 2^{n^*} * |x-a|$$

Beh.: Es gilt sogar:

$$|exp(x) - exp(a) - exp(a) * (x-a)| \leq \frac{1}{2} 2^{n^*} * |x-a|^2$$

Widerholung: Zweimalige Anwendung des Monotoniesatzes

$$-B \leq h'' \leq +B \Rightarrow$$
$$-B(x-a) \leq h'(x) - h'(a) \leq B * (x-a) \overset{x \leq 0}{\Rightarrow}$$
$$-B * (a-x) \leq h'(a) - h'(x) \leq B * (a-x) \overset{x \leq 0}{\Rightarrow}$$
$$-\frac{B}{2}(x-a)^2 \leq h(x) - h(a) - h'(a) * (x-a) \leq +\frac{B}{2}(x-a)^2$$
$$f_n'(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$
$$f_n''(x) = \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-2} \leq f_n'(x) \leq 2^{n^*} = B$$

Mit dieser Schranke für die zweite Ableitung gilt zuerst für die Approximation von exp:

$$|\underbrace{f_n(x)}_{=\exp(x)+\text{N.F.}} - \underbrace{f_n(a)}_{=\exp(a)+\text{N.F.}} - \underbrace{f_n'(a)(x-a)}_{=\exp(a)+\text{N.F.}}| \leq \underbrace{\frac{1}{2}2^{n^*} * (x-a)^2}_{\text{unabhängig von n}}$$

Mit dem Archimedes Axiom folgt die Behauptung für die Grenzfunktion.

10 Lineare Abbildungen, Linearkombination, lineare Gleichungssysteme

Wiederholung zur Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \lambda_{1j}a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{nj}a_j \end{pmatrix} \leftarrow \text{k-te Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} * a_1 + \ldots + \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{mn} \end{pmatrix} * a_n$$

Koeffizienten bzgl. der Basen

$$\{v_1, \ldots, v_n\} bzw. \{w_1, \ldots, w_n\} \; L(v) = \sum_{j=1}^n a_j L(v_j) = \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^m \lambda_{kj} w_k$$

$$L(v_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_{kj} w_k$$

10.1 Matrixmultiplikation und Komposition linearer Abbildungen

Verabredung:
Nachdem das Produkt $(\lambda_{kj})(a_j)$ Matrix mal Spalte schon definiert ist, wird das Produkt Matrix $*$ Matrix so definiert, dass die rechte Matrix als Matrix aus Spaltenvektoren betrachtet wird.

Wenn die Produktmatrix $(\lambda_{kj}) \bullet (\mu_{ji})$ die Matrix der Komposition $L \circ M$ sein soll (was natürlich gewünscht wird) dann müssen die Spalten der Produktmatrix die Bilder der Basis sein:

$$\begin{array}{lccccc}
 & M & & L & & \\
U & \rightarrow & V & \rightarrow & W & \\
K^l & \downarrow & K^n & \downarrow & & \text{L(M(U))} \\
\text{Basen gewählt} & \begin{pmatrix} \mu_{ik} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \lambda_{kj} \end{pmatrix} & &
\end{array}$$

$$\underbrace{\left(\lambda_{kj} \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \vdots \\ \mu_{n1} \end{pmatrix} ; \lambda_{kj} \begin{pmatrix} \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{n2} \end{pmatrix} ; \ldots ; \lambda_{kj} \begin{pmatrix} \mu_{1l} \\ \vdots \\ \mu_{nl} \end{pmatrix} \right)}_{\text{Matrixprod von } (\lambda_{kj})(\mu_{ji})} \begin{array}{c} L \\ \leftarrow \\ \lambda_{kj} \end{array} \begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{ml} \end{pmatrix}$$

$$\text{Bild von } L \circ M \text{ von } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{array} \text{ von } K^l = U \text{ sein. Das haben wir gerade überprüft}$$

Zeilenlänge l
Spaltenlänge m

$$\begin{tikzcd} U^l \arrow[r, "M"] \arrow[rr, bend right] & V^n \arrow[r] & W^m \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{l} \text{m Zeilen, Spaltenlänge, dim Bild-Bereich} \\ \text{n Spalten, Zeilenlänge, dim Def.-Bereich} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1} & \cdots & \mu_{mn} \end{array}$$

10.2 Gleichungssysteme, verschiedene Interpretationen

1. Urbilder finden

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{11} & \dots & \mu_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m1} & \dots & \mu_{mn} \end{pmatrix}}_{L} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

   Frage: Gegeben $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, gibt es $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, so dass $L \bullet a = b$?

2. Koeffizienten von Linearkombinationen bestimmen

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} * a_1 + \ldots + \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{mn} \end{pmatrix} * a_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

   Oder: Finde die Koeff. $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, so dass die Linearkombination, der Spalten den gegebenen Vektor $b \in K^m$ ergibt!

3. Betrachte die Zeilen dieser Linearkombination als lineare Gleichungen:

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{11}a_1 & \dots & \lambda_{1n}a_n = b_1 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \lambda_{m1}a_1 & \dots & \lambda_{mn}a_n = b_n \end{array}$$

1. 2. und 3. bedeutet alles dasselbe und es hilft, wenn man die Betrachtung wechseln kann.!

Falls $b \neq 0$ heißt das Gleichungsystem **inhomogen**
Falls $b = 0$ heißt das Gleichungsystem **homogen**

Die Lösungsmenge eines homogenen linearem Gleichungsystems, also $L^{-1}(0)$, ist ein Untervektorraum von K^n. $\begin{pmatrix} L * a = 0 \text{ und } L * c = 0 & \Rightarrow \\ L(a+c) = 0, L(r * a) = 0 & \end{pmatrix}$ Zwei verschiedene Lösungen desselben inhomognen Gleichungsystems, haben als Differnz eine Lösung des homogenen Systems ($L * a = b, L * c = b \Rightarrow L * (a - c) = 0$)
Daher genügt es zur Lösung des inhomogenen Systems eine einzige Lösung zu finden und außerdem das homogene System zu lösen.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 3 & a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 7 & a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 7 \\ \hline \end{array}$$

$$a_{11}(x_1 - y_1) + a_{12}(x_2 - y_2) = 3 - 3 = 0$$
$$a_{21}(x_1 - y_1) + a_{22}(x_2 - y_2) = 7 - 7 = 0$$

Also ist die Differenz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen Systems

10.2.1 Lösungskriterien für das inhomogene System

2) Das System $L * x = b$ ist genau dann lösbar, wenn b Linearkombination der Spalten der Matrix $\left(\lambda_{kj}\right) = L$ ist.

Definition:
Der Rang einer Menge von Vektoren ist die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren, die man in dieser Menge finden kann.
$Rang(V) = dim(V)$ $\qquad Rang(L) := Rang(L(V))$ = Rang der Bildmenge
= Rang der Menge der Spaltenvektoren einr Matrix von L.

Satz:
Spaltenrang einer Matrix = Zeilenrang einer Matrix

Dimensions-Satz:
$dim(Ker(L)) = n - Rang(L)$
Dimension der Lösungsmenge

10.3 Spalten- und Zeilenrang

$v_1, \ldots, v_n$ geg. $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j$ heißt Linearkombination L linear $L(\sum a_j v_j) = \sum a_j L(v_j)$
linear abhängig

Es gibt $\sum a_j v_j = 0$ nicht alle $a_j = 0$, ,,nichttriviale Lin.-Kom.“

linear unabhängig

$$\sum a_j v_j = 0 \text{ alle } a_j = 0$$

- Warnung:
  Falls die $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, dann auch $L(v_1), \ldots, L(v_n)$
  Es gibt keine allgemeinen Aussagen, was lin. Abb. aus linear unabhängigen Vektoren machen

- Warnung:
  Falls $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ linear unabhängig sind, dann sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig
  Es gibt keine allgemeinen Aussagen über $v_1, \ldots, v_n$ falls $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ als abhängig vorausgesetzt sind.

10.3.1 Beweis des Dimensionssatzes

Vor.: $L : V \to W, \qquad dim(V) =: n$
Betrachten: $U := Kern(L) = \{v \in V; L(v) = 0 \in W\}$
Bild(L) $= \{w \in W;$ es gibt $v \in V$ mit $L(v) = w\}$

Beh.: $dim(U) + dim(Bild(L)) = n$

Bemerkung: Zusammenhang mit lin. Gleichungssystem:

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; x_j \in K, j = 1, \ldots, n \right\}$$

$$L * x = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} * \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in K^n} = 0 \in K^m$$

$$L : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $L * x = 0$ ist gerade der Unterraum: $Kern(L) \subset K^n$

Beweis des Dimensionssatzes:
Es sei $w_1, \ldots, w_b \in W$, $b \leq n$ eine Basis vom Bild(L). Wähle Vektoren $v_1, \ldots, v_b \in V$ mit $L(v_j) = w_j, j = 1, \ldots, b$.
Bemerkung: $v_1, \ldots, v_b$ sind linear unabhängig. Warum? Angenommen $\sum a_j v_j = 0$ dann auch $0 = L(\sum a_j v_j) = \sum a_j L(v_j) = \sum a_j w_j$, also alle $a_j = 0$ da die w_j lin. unabhängig.

$u_1, \ldots, u_d$ sei eine Basis von U ($d \leq n$)

1. Behauptung: Die Menge der Vektoren $\{u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_b\}$ ist linear unabhängig.
Beweis: Angenommen

$$0 = \sum_{k=1}^{d} b_k u_k + \sum_{j=1}^{b} a_j v_j$$

Ziel: Zeige, dass alle b_k und alle a_j Null sein müssen
Bilde diese Linearkombination mit L ab:

$$0 = L(0) = \sum_{k=1}^{d} b_k * \underbrace{L(u_k)}_{=0} + \sum_{j=1}^{b} L(a_j v_j) = \sum_{j=1}^{b} a_j w_j$$

w_j sind linear unabhängig $\Rightarrow$ alle $a_j = 0$
Dann bleibt übrig:

$$\sum_{k=1}^{d} b_k * \underbrace{u_k}_{\text{Basis in U}} = 0 \Rightarrow \text{ alle } b_k = 0$$

2. Behauptung: Die Menge der Vektoren $\{u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_b\}$ ist eine Basis von V d.h. jedes $v \in V$ kann als Linearkombination von diesen Vektoren geschrieben werden.
Beweis: Betrachte zu gegebenem $v \in V$ zuerst $w = L(v), \{w_1, \ldots, w_b\}$ Basis $\Rightarrow w = \sum_{j=1}^{b} a_j w_j$
Definiere: $\tilde{v} := \sum_{j=1}^{b} a_j v_j$
Beh.: $v - \tilde{v} \in U$ denn $L(\tilde{v}) = \sum a_j w_j = L(v)$, also $v - \tilde{v} = \sum_{k=1}^{d} b_k u_k$

Spaltenrang von A = Maximalzahl lin. unabh. Spalten
Zeilenrang von A = Maximalzahl lin. unabh. Zeilen

Satz: Zeilenrang = Spaltenrang

Definition:
Eine Spalte heißt überflüssig wenn sie Linear-Kombination anderer Spalten ist.
Eine Zeile heißt überflüssig wenn sie Linear-Kombination anderer Zeilen ist.

Bemerkung:
Der Spaltenrang ändert sich nicht, wenn man eine überflüssige Spalte streicht.
Der Zeilenrang ändert sich nicht, wenn eine überflüssige Zeile gestrichen wird.

Lemma:
Der Spaltenrang ändert sich nicht, wenn eine überflüssige Zeile gestrichen wird.
Der Zeilenrang ändert sich nicht, wenn eine überflüssige Spalte gestrichen wird.

Angenommen, das Lemma sei bewiesen, dann folgt der Satz:

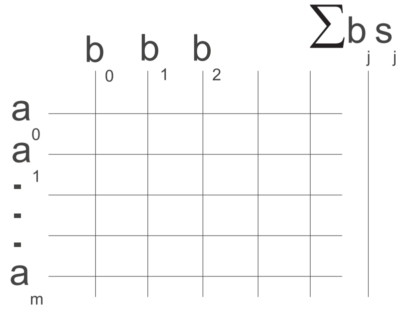
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix sei ohne überflüssige Zeilen und Spalten
m=Länge der Spalten (= Anzahl der Zeilen)
n=Länge der Zeilen (= Anzahl der Spalten)

Keine überflüssige Spalte $\Rightarrow$ n ist der Spaltenrang, alle Spalten lin. unabh., also $n \leq m$ (Austauschsatz)
Keine überflüssige Zeile $\Rightarrow$ m ist der Zeilenrang und $m \leq n$

$$\Rightarrow n = m$$

Beweis des Lemma



a_k: Multiplikatoren für Zeilenvektoren
b_j: Maultiplikatoren für Spaltenvektoren
Angenommen diese Zeilen seien lin. abh.
Nun wird eine überflüssige Spalte erzeugt.
Behauptung: Dann bleiben die Zeilen linear abhängig. $\sum a_k z_k = 0$ Linearkombination der Zeilenvektoren a_k
der $Matrix(\lambda_{kj})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$

$$\sum_k a_k z_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_{kj} = 0 \text{ für jeden einzelnen Spaltenindex j}$$

Linearkombination der Spaltenvektoren s_j ergibt die neue Spalte

$$\sum_j b_j s_j = \sum b_j \lambda_{kj} \text{ für jeden einzelnen Zeilenindex k}$$

$$\sum_k a_k \overbrace{\sum_j b_j \lambda_{kj}}^{\text{überflüssige Spalte}} = \sum_j b_j \overbrace{\sum_k a_k \lambda_{kj}}^{=0}$$

Die verlängerten Zeilen seien $\tilde{z}_k = (z_k, \sum_j b_j * \lambda_{kj})$ Wir haben gezeigt: $\sum a_k \tilde{z}_k = 0$.

10.4 Austauschsatz und Gaußelimination

Geg.: $v_1, \ldots, v_n$ lin. unabhängig
Geg.: $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$ $\qquad w_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{kj} v_j$
Diese $(n+1)$ Vektoren sind immer lin. abhängig.
Hauptaussage: Falls $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig sind, so kann man $v_1, \ldots, v_n$ als Linearkombination der $\{w_k\}_{k=1,\ldots,n}$ schreiben.
$A * x = b$ oder ausführlicher

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Falls das Gleichungssystem für die folgenden rechten Seiten: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
gelöst werden kann, dann ist die Lösung mit beliebigen rechten Seiten einfach eine explizite Linearkombination dieser speziellen Lösungen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & x_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Vereinfachung: $m = n \Rightarrow m \times n$ Einheitsmatrix
und die aus den Lösungen gebildete Matrix ist die inverse Matrix zur Koeffizientenmatrix A, $A * X = 1$.
Vergleich der Aussagen:
Die Verwandschaft des Gleichungslösens mit dem Austauschsatz erkennt man am besten in folgender Formulierung: Das System $A*x = b$ lösen, bedeutet die Spalte b aus den Splatenvektoren von A linear zu kombinieren. Dann bedeutet nämlich das Lösen von $A * X = 1$ die Standardbasisvektoren als Linearkomabination der Spalten von A zu schreiben - und das war Formulierung B das Austauschsatzes.

Das einfachste Gleichungsystem überhaupt ist dieses:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$$

Kann man mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen die Matrix in die Einheitsmatrix umwandeln?

$A * x = b$ $\qquad A^{-1} * b = x$

RS am Anfang

RS am Schluß

0

$a_{2,1}$

1 $\ddots$ 1

A^{-1}

$a_{1,1} = 0$?

$$\begin{array}{cccc|l} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & *\frac{1}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & -a_{21} * \frac{\text{Erste Zeile}}{a_{11}} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & -a_{k1} * \frac{\text{Erste Zeile}}{a_{k1}} \end{array}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & * & \dots & * \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} * a_{21} & ,\dots, & a_{2n} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} * a_{21} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{m2} - \frac{a_{12}}{a_{11}} * a_{m1} & ,\dots, & a_{mn} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} * a_{m1} \end{array}$$

$$\text{Nach dem 1. Schritt} \quad \begin{array}{ccccc} 0 & \frac{1}{a_{2,1}} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} max\ j|\frac{a_{2j}}{a_{21}}| \\ max\ j|\frac{a_{3j}}{a_{31}}| \\ \vdots \\ max\ j|\frac{a_{mj}}{a_{m1}}| \end{array}\right\} \text{Wähle das kleinste Maximum}$$

11 Approximationen mit Taylorpolynomen

Erster Erfolg $exp' = exp$ ist bei rationalen Funktionen unmöglich!

Woher kommen Approximationen für ,,neue“ Funktionen?

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Beispiel geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-x} - \underbrace{(1 + x + \ldots + x^n)}_{\substack{\text{n-te T.-polynom} \\ \text{von } f(x) = \frac{1}{1-x}}} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$|x| < 1 \quad \longrightarrow \qquad \left\{\frac{x^{n+1}}{1-x}\right\} \text{Nullfolge}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}; f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; f''(x) = \frac{2!}{(1-x)^3}; \ldots; f^{(k)}(x) = \frac{k^*!}{(1-x)^{k^*+1}}$$

$exp' = exp \quad \rightsquigarrow exp'' = exp' = exp$

$$\left.\begin{array}{rcl} exp'(0) & = & 1 \\ exp''(0) & = & 1 \\ exp'''(0) & = & 1 \\ \vdots & & \\ exp^{(k)}(0) & = & 1 \end{array}\right\}$$

Daher ist das Talorpolynom $T_n(x)$ vom Grad n der Exponentialfunktion bei 0: $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$
$\{T_n(x)\}$ ist für jedes $0 \leq x$ monoton wachsend in n

$\boxed{\text{Beh.: } T_n(x) \text{ konvergiert gegen exp(x)}}$

$$T_n'(x) = 0 + 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = T_n(x) - \frac{x^n}{n!} \leq T_n(x)$$

$$1 \geq \frac{T_n'(x)}{T_n(x)} \stackrel{MS}{\Rightarrow} T_n(x) \leq exp(x)$$

Grenzwert der Folge $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ war zur Def. der Exp.-Funktion benutzt worden.
Beh.: $\forall n$: $f_n(x) \leq T_n(x) \leq exp(x)$
Daraus folgt: $0 \leq exp(x) - f_n(x) =$ bekannte Nullfolge $\Rightarrow T_n(x)$ konvergiert gegen $exp(x)$

$f_n(x) \leq T_n(x)$ weil alle Koeff. von f_n $\leq$ den Koeffizienten von T_n sind
nämlich weil alle Ableitungen $f_n^{(k)}(0) \leq T_n^{(k)}(0) = 1$ für $k \leq n$

$$\begin{array}{rcll} f_n(x) & = & \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n & \text{bei } 0 = 1 \\ f_n'(x) & = & \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{(n-1)} & \text{bei } 0 = 1 \\ f_n''(x) & = & \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{(n-2)} & \text{also } f_n''(0) = \frac{n-1}{n} < 1 \ \Rightarrow \ \text{alle } \leq \Rightarrow \text{wahr} \\ f_n'''(x) & = & \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{(n-3)} & f_n'''(0) = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} < 1 \end{array}$$

usw.

Taylorpolynome konvergieren gegen exp′ !

11.1 Bemerkungen zu exp

$$\left.\begin{array}{rcl} f_\lambda(x) & := & \exp(\lambda * x) \\ f'_\lambda(x) & = & \lambda \exp(\lambda * x) = \lambda * f_\lambda(x) \end{array}\right\} \frac{f'_\lambda}{f_\lambda}(x) = \lambda$$

Funktionen zu beliebigen Wachstumsraten
$\exp(1) := e$ („Euler")

Erinnerung: $0 < f, g \qquad f(0) = 1 = g(0)$

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} \Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g}{f}\left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right) = 0$$

$$\frac{g}{f}(0) = 1 = \frac{g}{f}(x) \Rightarrow g = f$$

$f(x) = \exp(x) \qquad g(x) = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 = g(0), f' = f, \\ g'(x) = \frac{1}{\exp(a)} * \exp'(x+a) = g(x) \end{array}\right\}$$

f=g, also $\exp(x) * \exp(a) = \exp(x+a)$ „Additionstheorem" von exp $\exp(x + 2^n) = \exp(x) * \exp(2)^n$ $x = -a$: $\exp(-a) * \exp(a) = \exp(0) = 1$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Weil $\exp(\frac{x}{n})^n = \exp(x)$ gilt, kommen wir zu besseren Approximationen, falls die Wachstumsraten $\frac{f'}{f}(x)$ für kleine x nähr bei 1 sind, wie etwa bei $f = T_m$
Definition:

$$\left.\begin{array}{l} h_n(x) := f(\frac{x}{n})^n \\ h'_n(x) = n * f'(\frac{x}{n}) * \frac{1}{n} \end{array}\right\} \frac{h'_n}{h'_n}(x) = \frac{f'}{f'}(\frac{x}{n})$$

$$1 \geq \frac{T'_m}{T_m} = \frac{1 - \frac{x^m}{m!}}{T_m} \geq \left(1 - \frac{x^m}{m!}\right)$$

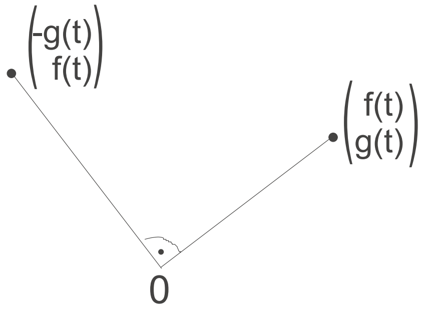
$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
$1 \geq \frac{T'_3}{T_3} \geq 1 - \frac{x^3}{3!}$
$T_3(\frac{x}{8})^8, T_3(\frac{-x}{8})^{-8}$ sind in der Tat hervorragende Approximationen

11.2 Sin, Cos

Ziel: Den Kreis als Kurve, die mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird, beschreiben.
Def.: Eine Kurve ist eine Abbildung:
$c : I \subset R \to R^2$, meistens gegeben durch zwei Funktionen $c(t) = \binom{f(t)}{g(t)}$

Falls $f = g$ differnenzierbar, so gilt:
$|c(t) - c(t_0) - \binom{f'(t_0)}{g'(t_0)} * (t - t_0)| < \sqrt{k_f^2 + K_g^2} * (t - t_0)^2$
Deswegen heißt $\binom{f'}{g'}(t_0)$ Ableitung $c'(t_0)$ der Kurve
Genauer: Wir suchen zwei Funktionen, genannt $f = cos$ und $g = sin$, mit
$f^2(t) + g^2(t) = 1$ Bild der Kurve ist auf dem Einhaitskreis
$(f')^2(t) + (g')^2(t) = 1$ Die Länge der Ableitung, auch „Geschwindigkeit" soll 1 sein

$h(t) := f^2(t) + g^2(t)$ $h'(t) = 2 * (f(t) * f'(t) + g(t) * g'(t)) = 0$
Kann man hieraus ablesen, dass $\binom{f'}{g'} \perp \binom{f}{g}$ ist?



$\Rightarrow x * f(t) + y * g(t) = 0$

In der Tat: $\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix}$ ist proportional zu $\begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix}$, senkrecht zum Radius $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda * \begin{pmatrix} -g(t) \\ f(t) \end{pmatrix}$
$h(t) = (f')^2(t) + (g')^2(t) = 1$
$h'(t) = 2 * (f'(t) * f''(t) + g\prime(t) * g''(t)) = 0$
$\Rightarrow \binom{f''}{g''}(t)$ ist senkrecht zu $\binom{g'}{f'}$
also $\binom{f\prime\prime}{g''}$ ist proportional zu $\binom{f}{g}$
Beh.: Der Proportionalitätsfaktor ist -1.

Setze $(f'', g'') = \lambda (f, g)$ ein in die Ableitung von $f * f' + g * g' = 0$, also $0 = f'^2 + f * f'' + g'^2 + g * g'' = (f'^2 + g'^2) + \lambda * (f^2 + g'^2) + \lambda * (f^2 + g^2) = 1 - \lambda$

$$d.h.: \begin{array}{lll} f'' = -f & f' = -g & \text{mit } f(0) = 1 \\ g'' = -g & g' = f & \text{und } g(0) = 0 \end{array}$$

Diese Anfangsüberlegungen genügen, um alle Taylorpolynome der gesuchten (noch nicht konstruierten) Funtkionen f unf g hinzuschreiben. - Ziel: mit der Hoffnung, dass die Taylorpolynome konvergieren:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 1 & g(0) = 0 \\ f'(0) = -g(0) = 0 & g'(0) = f(0) = 1 \\ f''(0) = -f(0) = -1 & g''(0) = -g(0) = 0 \\ f'''(0) = -g''(0) = 0 & g'''(0) = -f''(0) = -1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$C_n = T_f(x) = 1 + 0 * x - \frac{x^2}{2!} + 0 * x^3 + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$S_n = T_g(x) = 0 + 1 * x + 0 * x^2 - \frac{x^3}{2!} + 0 * x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!}$$

Arbeitssparende Bemerkung: Für $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ sind die Folgen:

$$\left.\begin{array}{l} 1, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^4}{4!}, \ldots \\ 1, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, \ldots \end{array}\right\}$$ monotone Nullfolgen und in den Taylorpolynomen wechslen die Vorzeichen ab. Also:

Definition: Gegeben sei $a_n > 0, a_n \geq a_{n+1} \ldots$ Nullfolge
Dann betrachte nach Leibniz die Folge

$$\begin{array}{lllllll} L_n = & a_0 - a_1 & + & a_2 - a_3 & + & a_4 \ldots & \pm a_n \\ & (a_0 - a_1) & + & (a_2 - a_3) & + & (a_4 - a_5) \ldots & \\ & \leq 0 & & \leq 0 & & \leq 0 \ldots & \end{array}$$

Beobachtung: $L_1 \geq L_3 \geq L_5 \geq \ldots \geq L_{2k+1} \geq$ ist eine monoton wachsende Folge
außerdem ist $L_0 \geq L_2 \geq L_4 \geq \ldots \geq L_{2k} \geq \underbrace{a_0}_{\geq 0} - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0 ,,L_2``} - \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0 ,,L_4``} - \underbrace{(a_5 - a_6)}_{\geq 0 ,,L_6``} - \ldots$
monoton fallend

$$\begin{array}{cccccccc} L_0 & \geq & L_1 & & L_2 & \geq & L_3 & \\ & & L_1 & \leq & L_2 & & L_3 & \leq & L_4 \end{array}$$

Daher ist mit jeder Leibniz-Reihe $L_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j$ eine Intervallschachtelung verbunden:

$$[L_1, L_0] \supset [L_3, L_2] \supset [L_5, L_4] \supset \ldots \supset \underbrace{[L_{2j+1}, L_{2j}]}_{\substack{L_{2j} - L_{2j+1} = a_{2j+1} \\ \text{als Nullfolge vor-} \\ \text{ausgesetzt!}}} \supset \ldots$$

Deswegen (Vollständigkeitsaxiom) konvergiert jede Leibniz-Reihe

Anwendung: Für $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ konvergieren die Taylorpolynome von cos und sin gegen Grenzfunktionen

11.3 Abschließende Bemerkungen zu cos und sin

Stand: Taylorpolynome (n ist nicht der Grad des Polynoms)

$$C_n(x) = T_f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$S_n(x) = T_g(x) = 1 * x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2x+1}}{(2n+1)!}$$

Falls $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ dann sind die $C_n(x)$ und $S_n(x)$ Leibniz-Reihen, insbesondere also konvergent ($\rightarrow$ Vollständigkeitsaxiom)

$$\cos(x) \in [C_{2k+1}(x), C_{2k}(x)] \subset [0,1]$$
$$\sin(x) \in [S_{2k+1}(x), S_{2k}(x)] \subset [S_1(x), S_0(x)] = [0, \sqrt{2}]$$

Was kann man über die Grenzfunktion sagen?

Betrachte Approximation:

$$\begin{array}{rcl} C'_n(x) & = & -S_{n-1}(x) \\ S'_n(x) & = & C_n(x) \end{array}$$

$\Rightarrow$ Also unabhängig von n: $|C'_n(x)| \leq \sqrt{2}, |S'_n(x)| \leq 1$
Monotoniesatz:

$$\begin{array}{rcll} |C_n(x) - C_n(a)| & \leq & \sqrt{2} * |x-a| & C''_n(x) = -C_{n-1}(x) \\ |S_n(x) - S_n(a)| & \leq & 1 * |x-a| & S''_n(x) = -S_{n-1}(x) \end{array}$$

Diese Ungleichungen sind bedeutend besser als wenn sie die Taylorpolynome ohne Monotoniesatz allein mit der Dreiecksungleichung bearbeiten würden.

Archimedes: $|cosx - cosa| \leq \sqrt{2} * |x-a|$
$0 \leq a, x \leq \sqrt{2}$ $\quad |sinx - sina| \leq 1 * |x-a|$
Beweis:

$$[C_{2k+1}(x), C_{2k}(x)] \begin{array}{l} \text{Intervallschachtelung} \\ \text{Vollständigkeitsaxiom} \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} \cos(x) \in [C_{2k+1}(x), C_{2k}] \\ \text{d.h. } \cos(x) - C_n(x) \text{ ist ein Nullfolge} \end{array}$$

$$|C_n(x) - C_n(a)| \leq \sqrt{2} * |x-a|$$

$$|\cos(x) + Nullf. - \cos(a) + Nullf.| \leq \sqrt{2} * |x-a| \overset{\Delta-Ungl.}{\Longrightarrow} |\cos(x) - \cos(a)| \leq \sqrt{2} * |x-a| + Nullf.$$

Differenzierbarkeit und Ableitungen der Grenzfunktion?

Monotoniesatz:$[|C'''_n| \leq 1, |S'''_n| \leq \sqrt{2}]$ falls $0 \leq a, x \leq \sqrt{2}$

$$|C_n(x) - C_n(a) - C'_n(a) * (x-a)| \leq \frac{1}{2} * (x-a)^2, C'_n(a) = -S_{n-1}(a)$$

$$|S_n(x) - S_n(a) - S'_n(a) * (x-a)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} * (x-a)^2, S'_n(a) = C_{n-1}(a)$$

Daher folgt mit Archimedes (Weglassen von Nullfolgen)

$$\left.\begin{array}{l} |\cos(x) - \cos(a) + \sin(a) * (x-a)| \leq \frac{1}{2} * |x-a|^2 \\ |\sin(x) - \sin(a) - \cos(a) * (x-a)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} * |x-a|^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{d.h.:} \\ \cos' = -\sin \\ \sin' = \cos \end{array}$$

$f'' + f = 0$ wird von sin und cos und allen Linearkombinationen von sin und cos erfüllt

Satz: Zu gegeben Anfangsdaten $f(0), f'(0)$ gibt es nur eine Lösung!
Lin. Algebra: Es genügt, zu zeigen: Zu Anfangsdaten 0 gibt es nur eine Lösung!
Hilfsfunktion: $h(x) = f(x)^2 + f'(x)^2 : h'(x) = 2 * (f * f' + f' * f'')(x) = 2f'(x) * (f + f'')(x) = 0$
d.h.: $h = const$ also h(x) = h(0) oder $f^2(x) + f'^2(x) = f^2(0) + f'^2(0) = 0$,
Zu den Anfangsdaten 0 gibt es nur die Null-Lösung

11.4 Wiederholung zum Monotoniesatz

Zum Umgang mit Ungleichungen

1. Dreiecksungleichung
2. Monotoniesatz
3. Majorisierung mit der geometrischen Reihe

$$0 \leq f' \Rightarrow \text{ f ist schwach wachsend } (x < y \Rightarrow f(x \leq f(y)))$$

$$f' \leq g' \Rightarrow g - f \text{ erfüllt die Voraussetzungen}$$

$$T(x) := L * x \ |f'| \leq L \Leftrightarrow -L \leq f' \leq L$$

$$\begin{array}{lllll} -T'(x) & \leq & f'(x) & \leq & T'(x) \\ 0 & \leq & (f-T)' \quad 0 & \leq & (T-f)' \end{array}$$

$$a \leq x \Rightarrow \begin{array}{lllll} \underbrace{-T(x) + T(a)}_{-L(x-a)} & \leq & f(x) - f(a) & \leq & T(x) - T(a) \\ & \Leftrightarrow & f(x) - f(a) & \leq & L(x-a) \end{array}$$

Ausdehnung auf höhere Ableitungen

$$|f''| \leq B \Leftrightarrow -B \leq f'' \leq B, a \overset{\Longrightarrow}{\leq} x$$

$$-B(x-a) \leq f'(x) - f'(a) \leq B(x-a)$$

$$-\left(\frac{B}{2}(x-a)^2\right)' + (f'(a) * (x-a))' \leq f' \leq (f'(a) * (x-a))' + \left(\frac{B}{2}(x-a)^2\right)'$$

In Worten: Die Abweichung von der Tangente ist $\leq \frac{B}{2}(x-a)^2$:

$$\Rightarrow -\frac{B}{2}(x-a)^2 + f'(a)(x-a) \leq f(x) - f(a) \leq f'(a) * (x-a) + \frac{B}{2}(x-a)^2$$

Solche Schranken hat man i.a. auf Intervallen und nicht auf ganz $\mathcal{R}$

Sehnensteigungen

$$|f''| \leq B, x \in [a,b] \text{ Sehne}(x) = \frac{f(a) * (b-x) + f(b) * (x-a)}{b-a}$$

$$\text{Sehne}'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$\text{Sehne}''(x) = 0$$

$\tilde{f}(x) = f(x) - Sehne(x)$
$|\tilde{f}''| = |\tilde{f}''| \leq B$
$\tilde{f}(a) = 0, \tilde{f}(b) = 0$
Behauptung:

$$x \in [a,b] \Rightarrow |\tilde{f}(x)| \leq \frac{B}{2} \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} * \underbrace{(b-x)}_{\geq 0}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{B}{2}(x-a)(b-x) \leq \tilde{f}(x) \leq \frac{B}{2}(x-a)(b-x)$$

Beweis, Definiere:

$$h_l(x) := \tilde{f}(x) + \tfrac{B}{2}(x-a)(b-x) \quad h_r(x) := \tfrac{B}{2}(x-a)(b-x) - \tilde{f}(x)$$

$$0 \geq h''(x), h(a) = 0, h(b) = 0$$

Behauptung: $h \geq 0$

11.5 Anwendung auf sin & cos

Bekannt: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\sin'' + \sin = 0$, $\cos'' = 0$
$\cos(0) = 1$
$\sin(0) = 0$
$f'' + f = 0$ Funktionen mit dieser Eigenschaft bilden einen Vektorraum
Behauptung:
2 Funktionen f, g aus diesem Vektorraum, mit $f(0) = g(0)$ & $f'(0) = g'(0)$ stimmen überein. d.h. die Differenzfunktion

$$h = g - f, h(0) = 0, h' = 0, h'' + h = 0 \text{ ist die Nullfunktion}$$

Beweis:

$$E(x) = \frac{1}{2}h'^2(x) + \frac{1}{2}h^2(x) E'(x) = h' * (h''(x) + h(x)) = 0, \text{ d.h. } E(x) = const = E(0) \Rightarrow = 0$$

$$E(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \forall x$$

Anwendung:

$$\begin{array}{lr} g(x) = \cos(x+a) & [\text{bzw. } \sin(x+a)] \\ g(0) = \cos(a) & [\text{bzw. } \sin(a)] \\ g'(x) = \sin(x+a) & [\text{bzw. } \cos(x+a)] \\ g'(0) = \sin(a) & [\text{bzw. } \cos(a)] \end{array}$$

$f(x) = \cos(a) * \cos(x) - \sin(a) * \sin(x)$
$f(0) = \cos(a)$
$f'(x) = -\cos(a)\sin(x) - \sin(a) * \cos(x)$
$f'(0) = -\sin(a)$

f ist Lin.-komb. der Lösungen cos & sin und f hat dieselben Anfangswerte wie g, daher gilt $f = g$, d.h.

Additionstheoreme

$$\cos(a + x) = \cos(a) * \cos(x) - \sin(a) * \sin(x)$$
$$\sin(a + x) = \sin(a) * \cos(x) - \cos(a) * \sin(x)$$

Anwendung:
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$
$\sin(2x) = 2\sin(x) * \cos(x)$
$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$
Hiermit können Taylorapproximationen verbessert werden wie bei exp

12 Umkehrfunktionen

Umkehrfunktion: $f(x) \to x$
$f(x) = x^2$, Umkehrfunktion: $g(x) = \sqrt(x)$
Solange man nur $\mathcal{Q}$ kennt, ist der Def.-Bereich von g „etwas“ unübersichtlich.
Voraussetzung:

f sei schwach monoton wachsend und dehnungsbeschränkt
[z.B.: ist das der Fall wenn $0 \leq f' \leq L$ ist]
Behauptung:
$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$ deutlicher: Jede Zahl c im Intervall $[f(a), f(b)]$ ist Wert $c = f(c)$ einer Zahl $c \in [a,b]$
Bezeichnen mit $a, b, c, \ldots, x, y, z \in [a,b]$ Punkt im Definitionsbereich und mit $A, B, C, \ldots, X, Y, Z \in [f(a), f(b)]$ Punkte im Bild

$$\left.\begin{array}{l} X = f(x) \\ A = f(a) \\ B = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Für die Umkehrfunktion ist natürlich } g(X) = x, g(A) = a, g(B) = b$$

Zz: Zu jedem $C \in [A,B] = [f(a), f(b)]$ gibt es $c \in [a,b]$ mit $f(c) = C$
Einziges Mittel: Finde Intervallschachtelung für c
$a_1 := a, b_1 := b$ Induktionsanfang
$Test := f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \in [A,B]$ Didaktischer Schritt
Fallunterscheidung:
Der Test findet im Bild statt

$$\left.\begin{array}{c|c} C \leq Test & Test < C \\ \hline a_2 := a_1; & a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}; \\ b_2 := \frac{a_1+b_1}{2} & b_2 := b_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textbf{Resultat}: \\ C \in f([a_2, b_2]) \\ \text{Länge: } |[a_2, b_2]| = \\ \frac{1}{2}|[a_1, b_1]| = b_2 - a_2 \end{array}$$

Angenommen für $k = 1, 2, \ldots, k^*$ hätten wir

$$[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}] \text{ mit } C \in f([a_k, b_k]) \text{ und } |[a_k, b_k]| = \frac{1}{2}|[a_{k-1}, b_{k-1}]|$$

$$\text{also } f(a_k) \leq C \leq f(b_k)$$

Induktionschritt: Konstruktion von $[a_{k^*+1}, b_{k^*+1}]$
$Test := f\left(\frac{a_{k^*}+b_{k^*}}{2}\right) \in [f(a_k), f(b_k)]$
Fallunterscheidung:

$C \leq Test$	$Test < C$
$a_{k^*+1} := a_{k^*}$; $b_{k^*+1} := \frac{a_{k^*}+b_{k^*}}{2}$	$a_{k^*+1} := \frac{a_{k^*}+b_{k^*}}{2}$; $b_{k^*+1} := b_{k^*}$

Dann $C \in f([a_{k^*+1}, b_{k^*+1}])$ und $|[a_{k^*+1}, b_{k^*+1}]| = \frac{1}{2}|[a_{k^*}, b_{k^*}]|$
Vollständigkeitsaxoim:
Es gibt $c \in [a_k, b_k]$ für alle $k \in \mathcal{N}$
f schwach wachsend $\Rightarrow f(a_k) \leq f(c) \leq f(b_k)$
Konstruktion: $f(a_k) \leq C \leq f(b_k)$
$|C - f(c)| \leq f(b_k) - f(a_k) \leq \underbrace{L * |b_k - a_k|}_{Nullfolge}$

Archimedes: $C = f(c)$

Das Herstellen der Umkehrfunktion ist weitere neue Funktionskonstruktion
Wir brauchen eine neue Differentiationsregel.
Ableitung: $x^2 \to 2x$ $\qquad g \circ f(x) = x$
$\sqrt{x} \rightsquigarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Wenn g schon als diff. bekannt: $g'(f(x)) * f'(x) = 1$ oder $g'(X) = \frac{1}{f'(x)}$, $X = f(x)$

12.1 Beweis der Differentiationsregel für Umkehrfunktionen

Voraussetzung $f' > 0$ nicht nur ≥ 0
$X = f(x), g(X) = x$
$A = f(a), g(A) = a$
Vor.: Es gibt Zahlen r_a, K_a, so dass für $x \in [a - r_a, a + r_a]$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a) - f'(a) * (x - a)| \leq K_a(x - a)^2$$

Oder mit anderen Bezeichnungen:

$$|X - A - f'(a) * (g(X) - g(A))| \leq K_a(g(X) - g(A))^2$$

Nächste Einschränkung: $K_a * r_a < \frac{1}{2}f\prime(a)$ (Bedingung für r_a), ergibt:

$$|f(x) - f(a) - f'(a) * (x - a)| \leq \frac{1}{2}f'(a)|x - a|$$

Mit der $\triangle$-Ungl. und anderen Bezeichnungen ($X = f(x)$ usw.)

$$\Delta\text{-Ungl. } \frac{1}{2}f'(a) * |g(X) - g(A)| = \frac{1}{2}f'(a) * |x - a| \leq |f(x) - f(a)| = |X - A|$$

$$|x - a| \leq \frac{2}{f'(a)} * |X - A|$$

Beim Differenzieren von Umkehrfunktionen sollen nur Voraussetzungen über X, nicht über x gemacht werden.
Voraussetzung an $X - A$ sollen garantieren, dass $x - a \leq r_a$
$|X - A| \leq \frac{1}{2}f'(a) * r_a \Rightarrow |x - a| \leq r_a$ d.h. alle hingeschriebenen Ungl. gelten

$$|X - A - f'(a)(g(X) - g(A))| \leq K_a * (g(X) - g(A))^2$$

aus $|X - A| \leq \frac{1}{2}f'(a)r_a$ folgt

$$|X - A - f'(a)(g(X) - g(A))| \leq \frac{4}{f'(a)^2} * |X - A|^2$$

Dividieren durch $f'(a)$: Im Intervall $|X-A| \leq \frac{1}{2}f'(a) * r_a$ gilt:

$$|g(X)-g(A)-\underbrace{\frac{1}{f'(a)}}_{Ableitung} *(X-A)| \leq \underbrace{\frac{4K_a}{f'(a)^3} * |X-A|^2}_{^2\text{-Fehler}}$$

Daher sit g differnenzierbar und $g'(A) = \frac{1}{f'(a)}$

13 Bemerkungen zu den Komplexen Zahlen

Wir hatten auf verschiedene Weise in $\mathcal{Q}^2$ Multiplikationen definiert, die die Körperaxiome erfüllen. Besonders wichtig ist: $\mathcal{Q}^2$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}$$

Hierdurch wird $\mathcal{Q}^2$ zu einem Körper und:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$$

Macht man dasselbe mit $\mathcal{R}^2$ so erhält man die Komplexen Zahlen $\mathcal{C}$
Satz:

$$|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}| * |\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix}|$$

„Die Länge eines Produktes ist gleich dem Produkt der Längen“
Behauptung (quadriert):

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

In der Tat:

$$a^2c^2 + b^2d^2 - 2acbd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc = a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$z = a + bi, \qquad |a| \leq |z|, |b| \leq |z|, \qquad w = c + id$
Realteil von z: $Re(z) = 0$ Imaginärteil von z: $Im(z) = b$

$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$|z * w| = |z| * |w|$$

14 Äquivalenzklassen

Beispiel:
$a, b, c, d \in \mathcal{Z}$

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathcal{Z}^2, d \neq 0, b \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \underbrace{\sim}_{äquivalent} \frac{c}{d} \underbrace{\Leftrightarrow}_{Def.} \underbrace{a * d - b * c}_{in\mathcal{Z}}$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b} \text{ reflexiv}$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b} \text{ symmetrisch}$$

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \text{ und } \frac{c}{d} \sim \frac{e}{f} \; f \overset{\Longrightarrow}{\neq} 0 \; \frac{a}{b} \sim \frac{e}{f} \text{ transitiv}$$

Jede Relation mit diesen Eigenschaften heißt „**Äquivalenzrelation**“

$P, Q, R, S \in \mathcal{Q}[X]$ oder $K[X]$

$$\frac{P}{Q}, \frac{R}{S} \in \mathcal{K}^2, Q \neq 0, S \neq 0$$

reflexiv & symmetrisch $\surd$

transitiv: $U \neq 0$

$$\frac{P}{Q} \sim \frac{R}{S} \text{ und } \frac{R}{S} \sim \frac{T}{U} \overset{Beh.}{\Longrightarrow} \frac{P}{Q} \sim \frac{T}{U}$$

$$\text{Vor.: } P * S = Q * R; R * U = S * T$$

$$\text{Beh.: } P * U = Q * T$$

$$\text{Multiplizieren: } P * U * R * S = Q * T * R * S$$

$a) R = 0 \Rightarrow P = 0, T = 0 \Rightarrow \surd$
$b) R \neq 0 \Rightarrow R * S \neq 0 \overset{kürzen}{\Longrightarrow} P * U = Q * T \Rightarrow \surd$
Bemerkung: $A, B \in K[X]$ und $A * B = 0$ aber $B \neq 0$ dann folgt $A = 0$
Definition einer Multiplikation:

$$\left[\frac{a}{b}\right] * \left[\frac{c}{d}\right] := \left[\frac{a * c}{b * d}\right]; \left[\frac{P}{Q}\right] * \left[\frac{R}{S}\right] := \left[\frac{P * R}{Q * S}\right]$$

„Definition wurde repräsentantenweise hingeschrieben“
Zz.: „Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentation“
Vor.:

$$\underbrace{\frac{a}{b} \sim \frac{A}{B}}_{b,B\neq 0}; \underbrace{\frac{c}{d} \sim \frac{C}{D}}_{d,D\neq 0}$$

Beh.:

$$\frac{a*c}{b*d} \sim \frac{A*C}{B*D}$$

Vor.:

$$a*B = b*A; c*D = d*C$$

Beh.:

$$a*c*B*D = b*d*A*C\surd$$

„Die Multiplikation kann repräsentatenweise definiert werden.“
Nutzen: Das Assoziativgesetz braucht nicht nachgerechnet zu werden!
Definition einer Addition:

$$\left[\frac{P}{Q}\right] + \left[\frac{R}{S}\right] := \left[\frac{PS+RQ}{Q*S}\right]$$ Die repräsentantenweise Definition hat eine Rechtfertigung nötig

$$\text{Vor.: } \underbrace{\frac{p}{q}}_{q\neq 0} \sim \frac{P}{Q}; \underbrace{\frac{r}{s}}_{s\neq 0} \sim \frac{R}{S}$$

$$p*Q = q*P; r*S = s*R$$

$$\begin{aligned}\text{Beh.: } \tfrac{ps+qr}{qs} \sim \tfrac{PS+QR}{QS} \quad &\Leftrightarrow \quad (ps+qr)*QS = qs(PS+QR)\\ &\Leftrightarrow \quad pQ*sS + rS*qQ = qP*sS + sR*qQ\surd\end{aligned}$$

15 Abstände und Skalarprodukte in Vektorräumen

Betrachte das Beispiel $P, Q \in \mathcal{R}_3[X]$ Polynome vom Grad ≤ 3 mit Koeff. in $\mathcal{R}$
Was kann man als „Abstand“ dieser Polynome bezeichnen?

Axiome für den Begriff Abstand $Abstand(A,C) \leq Abst.(A,B) + Abst(B,C)$ Dreiecksungleichung $Abstand(A,C) = 0 \Rightarrow A = C$ Axiom 1 $Abstand(A,B) = Abstand(B,A)$ Axiom 2

$\sqrt{(P(0)-Q(0))^2}$ Ist das ein guter Abstand?
$\geq 0\surd$
Axiom 2 $\surd$
Dreiecksungleichung $\surd$
$|P(0)-Q(0)| = 0 \not\Rightarrow P = Q$. Also: $\sqrt{(P(0)-Q(0))^2}$ ist kein Abstand

Neuer Versuch
Wie viele Werte muß man kennen, damit das Polynom $\in \mathcal{R}_3[X]$ eindeutig bestimmt ist?

Falls $W_0(P) = W_0(Q), W_1(P) = W_1(Q), W_2(P) = W_2(Q), W_3(P) = W_3(Q)$ ist so folgt $P = Q$
Warum?

$$\left.\begin{array}{l} W_j(P-Q) = 0 \\ j = 0,1,2,3 \end{array}\right\} \text{d.h. das Polynom P-Q vom Grad } \leq 3 \text{ hat vier Nullstellen, und damit } P - Q = 0$$

Dasselbe noch einmal mit dem Dimensionssatz statt mit Polynom-Faktorisieren.

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} : \mathcal{R}_3[X] \to \mathcal{R}^4 \text{ Wie groß ist der Rang dier linearen Abb.?}$$

$$P_0 = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)}$$

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} : P_0 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{erster Basisvektor liegt im Bild von} \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_3 \end{pmatrix} : \mathcal{R}_3[X] \to \mathcal{R}^4$$

Ebenso treten die anderen Basisvektoren im Bild auf. D.h. Rang $= 4$
Dimenionssatz:
$\underbrace{dim(Kern)}_{=0} + \underbrace{dim(Bild)}_{=4} = \underbrace{dim(\mathcal{R}_3[X])}_{=4}$

$$dim(Kern \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_3 \end{pmatrix}) = 0 \text{ bedeutet: Aus } \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_3 \end{pmatrix} (P) = 0 \text{ folgt } P = 0$$

Neuer Versuch:
Länge(P):= $\sqrt{W_0(P)^2 + W_1(P)^2 + W_2(P)^2 + W_3(P)^2}$;
$Länge(r * P) = |r| * Länge(P)$ „positiv homogen"
$Länge(P) = 0 \Rightarrow P = 0\surd$
$Abstand(P, Q) = Abstand(P + R, Q + R)$ „translationsinvariant"
$Abstand(P, Q) := Länge(P - Q) \geq 0 = 0 \Rightarrow P = Q$ Axiome 1,2 $\surd$

Gilt Dreiecksungleichung? (Falls ja, dann liefert Definition einen guten Abstand)
Es genügt zu beweisen: $Länge(P - Q) \leq Länge(P) + Länge(Q)$
$Abstand(P, Q) \leq Anstand(P, 0) + Abstand(Q, 0)$
Zz.: $W_0(P - Q)^2 + W_1(P - Q)^2 + W_2(P - Q)^2 + W_3(P - Q)^2 \leq$
$\left(\sqrt{W_0(P)^2 + \ldots + W_3(P)^2} + \sqrt{W_0(P)^2 + \ldots + W_3(P)^2}\right)^2$

15.1 Verallgemeinerung dessen, was Sie an Euklidscher Geometrie in $\mathcal{R}^2$ kennen

Die ,,Kenntnisse" werden als Axiome zusammengefaßt.
Axiome eines einfachen metrischen Raumes

- Abstand(p,q)
  $0 \leq Abst(p,q)$
  $0 = Abst(p,q) \Rightarrow p = q$
  Häufig: Abst(p,q) = d(p,q)
- Symmetrie
  Abst(p,q) = Abst(q,p)
- Dreiecksungleichung
  $Abst(p,q) + ABst(q,r) \geq Abst(p,r)$

Diese Axiome stellen ihnen keine Abstände zur Verfügung, sie legen nur fest, was min. erfüllt sein muß, damit wir von Abständen reden.
In Vektorräumen sind die Abstände eng mit der Länge von Vektoren verbunden.
$Abst(p,q) = Länge(q-p)$ oder $Norm(q-p) = |q-p|$ Beispiel:

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}; q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}; q-p = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}; Länge(q-p) = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2}$$

Axiome für Länge oder Norm

- $0 \leq Länge(v)$
  $0 = Länge(v) \Rightarrow v = 0$,,definit"
- $Länge(v) = Länge(-v)$, allgemein: $r \in \mathcal{R} : |r * v| = \underbrace{|r|}_{Betrag} * \underbrace{|v|}_{Länge}$
  ,,positiv homogen"
- $|v + w| \leq |v| + |w|$
  ,,Dreiecksungleichung"

$Abst(p+v, q+v) = Abst(p,q)$
$p \rightarrow p + v$,,Translation"
Abstand ist translations-invariant

Die Axiome liefern keine Beispiele. Diese muß man extra angehen.
Beispiel: $v = \binom{v_1}{v_2} \in \mathcal{R}^2$: Pythagoras Länge $|v| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
Maximum-Länge: $|v| := max(|v_1|, |v_2|)$
1) $> 0 \surd$
2) $\surd$
3) nachrechenbar $\surd$
Oktaeder-Norm $|v| := |v_1| + |v_2|$

15.2 Länge in dem Polynom-Vektorraum $\mathcal{R}_3[X]$

$$Länge(P) := \sqrt{W_0(P)^2 + W_1(P)^2 + W_2(P)^2 + W_3(P)^2} \geq 0;$$

$$Länge(r * P) = |r| * Länge(P) \text{ ,,positiv homogen“ } \surd$$

In $(R)_3[X]$ sind die Auswertung $W_{a_j}(j = 1,2,3,4)$ an vier paarweise verschiedenen Stellen immer linear unabhängig! Da $Hom(\underbrace{\mathcal{R}_3[X]}_{4-dim}, \mathcal{R})$ vierdim ist, sind die W_{a_j} sogar eine Basis.
Warum sind $W_{a_1}, W_{a_2}, W_{a_3}, W_{a_4}$ in $Hom(\mathcal{R}_3[X], \mathcal{R})$ lin. unabh.
Antwort: Man kann eine Basis von $\mathcal{R}_3[X]$ angeben, $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ so dass $W_{a_j}(P_k) = 0$ für $k \neq j$ und $= 1$ für $k = j$

$$P_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} \text{ usw.}$$

Angenommen: $\sum \lambda_j W_{a_j} = 0 \in Hom(\mathcal{R}_3[X], \mathcal{R})$
Wende dies auf P_k an:

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j * W_{a_j}(P_k) = 0$$

Daher folgt aus $Länge(P) = 0$ $W_{aj}(P) = 0, j = 1, \ldots, 4$, also $P = 0$. ,,definit“
Beh.: $Länge(P+Q) \leq Länge(P) + Länge(Q)$ Dreiecksungleichung

$$Länge(P+Q)^2 = \sum_{j=0}^{3} (\underbrace{W_j(P+Q)}_{W_j(P)+W_j(Q)})^2 \overset{Beh}{\leq} Länge(P)^2 + 2Länge(P)Länge(Q) + Länge(Q)^2$$

$$\text{mit } \sum_{j=0}^{3}(W_j(P+Q))^2 = \sum_{j=0}^{3}(w_j(P))^2 + 2W_j(P)W_j(Q) + (W_j(Q))^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{3} W_j(P) * W_j(Q) \overset{Beh}{\leq} Länge(P) * Länge(Q)$$

$$\Uparrow$$

$$\left(\sum_{j=0}^{3} W_j(P) * W_j(Q)\right) * \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{3} W_k(P) * W_k(Q)\right)}_{\text{Der andere Name für den Summenindex bereitet Anwendung der Distribution vor}} \overset{Beh}{\leq} \left(\sum_{j=0}^{3} W_j(P)^2\right) * \left(\sum_{k=0}^{3} W_k(Q)^2\right)$$

$$\underbrace{\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}}_{\sum_{j,k=0}^{3}} W_j(P)*W_j(Q)*W_k(P)*W_k(Q) \overset{Beh}{\leq} \underbrace{\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3}}_{\sum_{j,k=0}^{3}} W_j(P)^2*W_k(Q)^2$$

Etwas sortieren & Aufspalten. Die Summanden mit $j = k$ stimmen links und rechts überein:

$$W_j(P)*W_j(Q)*W_{j=k}(P)*W_{j=k}(Q) = W_j(P)^2*W_{j=k}(Q)^2 \leftarrow \text{subtrahieren}$$

$$\sum_{j,k;j\neq k} \underbrace{W_j(P)*W_j(Q)*W_k(P)*W_k(Q)}_{\substack{\text{Indexpaare(j,k)}\\ \text{sowie (k,j) gleich}}} \overset{Beh}{\leq} \frac{1}{2}\sum_{j\neq k}^{3} W_j(P)^2*W_k(Q)^2+W_k(P)^2*W_j(Q)^2$$

$$2ab \leq a^2+b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a \mp b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} a = W_j(P)*W_k(Q) \\ b = W_k(P)*W_j(Q) \end{array}\right\} \text{zeigt}$$

$$W_j(P)*W_j(Q)*W_k(P)*W_k(Q) \leq \frac{1}{2}\left(W_j(P)^2*W_k(Q)^2+W_k(P)^2*W_j(Q)^2\right)$$

Wir werden noch einen viel kürzeren Beweis kennen lernen.

15.3 „Explizite Lösungen“

Skalarprodukte bringen Geometrie in die Vektorräume. Skalarprodukte führen bei vielen Problemen zu besonders expliziten Lösungen.

Erinnerung

$$w,v \in V; w \text{ fest}, \quad \left.\begin{array}{ll} v \to \langle w,v\rangle & \text{ist linear} \\ v \to \langle v,w\rangle & \text{ist linear} \end{array}\right\} \text{bilinear}$$

$$\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle \text{ symmetrisch } + \text{ bilinear } \Rightarrow \text{symmetrische Bilinearform}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leq \langle v,v\rangle & \text{positiv semidefinit} \\ 0 = \langle v,v\rangle \Rightarrow v = 0 & \end{array}\right\} \text{pos. definit}$$

Bilden die Skalarprodukte einen Vektorraum?
Summe von zwei Skalarprodukten: $\langle v,w\rangle + \langle\langle v,w\rangle\rangle$ ist Skalarprodukt
Vielfache von Skalarprodukten: $r * \langle v,w\rangle$
$0 * \langle,\rangle$ kein Skalarprodukt
$-1 * \langle v,w\rangle$ nicht pos. def.
$\Rightarrow$ kein Vektorraum
(Wenigstens die symmetrischen Bilinearformen bilden einen Vektorraum)

$V, \{v_1, \dots, v_n\}$ Vektorraum mit Basis
Behauptung: Es gibt ein Skalarprodukt $\langle , \rangle$, so dass die v_j paarweise senkrechte Einheitsvektoren sind. ($\langle v_j, v_k \rangle$) $= 0$ falls $j \neq k$ und $\langle v_j, v_j \rangle = 1$ (Daher Einheitsvektoren).
Definiere die linearen Abb. $l_1, \dots, l_n \in Hom(V, \mathcal{R})$

$$k = 1, \dots, n \begin{cases} l_k(v_k) := 1 \\ l_k(v_j) := 0 & j \neq k \end{cases}$$

- $$\langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^{n} l_k(v) * l_k(w) \text{ offenbar. sym. bilinear mit } \langle v_j, v_k \rangle = 0 \; j \neq k \text{ und } \langle v_j, v_j \rangle = 1$$

- $$\langle v, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} l_k(v)^2 \geq 0 \text{ positiv semidefinit}$$

- $$\text{Gilt } \langle v, v \rangle = 0 \overset{?}{\Rightarrow} v = 0?$$

Zunächst wird gezeigt, dass das Skalarprodukt bei Verwendung der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ besonders einfach ist:

a)

$$\underbrace{\langle v_{j_1}, v_{j_2} \rangle}_{j_1 \neq j_2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} l_k(v_{j_1})}_{0, \text{ außer für } k = j_1, \text{ sonst } 1} \underbrace{l_k(v_{j_2})}_{0, \text{ außer für } k = j_2}$$

b)

$$v = \textstyle\sum_{j_1=1}^{n} x_{j_1} v_{j_1} \qquad w = \sum_{j_2=1}^{n} y_{j_2} v_{j_2}$$

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \sum x_{j_1} v_{j_1}, w \rangle \\ &= \sum_{j_1} x_{j_1} \langle v_{j_1}, w \rangle \\ &= \sum_{j_1} x_{j_1} * \langle v_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} y_{j_2} * v_{j_2} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} x_{j_1}y_{j_2} * \underbrace{\langle v_{j_1}, v_{j_2}\rangle}_{=0,\text{ falls } j_1 \neq j_2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j
\end{aligned}$$

Dies wird auch als „Standardform" eines Skalarproduktes bezeichnet.

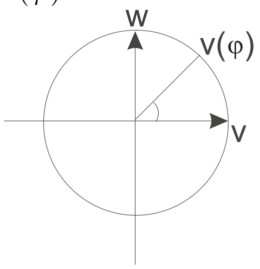
Nun zu pos. definit:

$$\langle v, v\rangle = \sum x_j^2 = 0 \Rightarrow \text{ alle } x_j = 0 \Rightarrow v = 0$$

Zu „senkrecht stehen"
v und w seien Vektoren mit $\langle v, v\rangle = 1, \langle w, w\rangle = 1$ und $\langle v, w\rangle = 0$ Einheitsvektoren
Definiere $v(\varphi) := v * cos(\varphi) + wsin(\varphi)$ $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
Quadrat der Länge von $v(\varphi)$

$$\begin{aligned}
\langle v(\varphi_1), v(\varphi_2)\rangle &= \langle v * \cos\varphi_1 + w * \sin\varphi_1, v * \cos\varphi_2 + w * \sin\varphi_2\rangle \\
&= \cos\varphi_1 * \langle v, v * \cos\varphi_2 + w * \sin\varphi_2\rangle + \\
&\quad \sin\varphi_1 * \langle w, v * \cos\varphi_2 + w * \sin\varphi_2\rangle \\
&= \cos\varphi_1 * \cos\varphi_2 * \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=1} + \cos\varphi_1 * \sin\varphi_2 * \underbrace{\langle v, w\rangle}_{=0} + \\
&\quad \sin\varphi_2 * \cos\varphi_2 * \underbrace{\langle w, v\rangle}_{=0} + \sin\varphi_1 * \sin\varphi_2 * \underbrace{\langle w, w\rangle}_{=1} \\
&= \cos\varphi_1 * \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 * \sin\varphi_2 = \cos\varphi_1 - \varphi_2 \\
&= (= 1) \text{ für } \varphi_1 = \varphi_2
\end{aligned}$$

$v(\varphi)$ lauter Einheitsvektoren $\quad \varphi \to v(\varphi)$ Kreis in dem Vektorraum $span(v, w)$

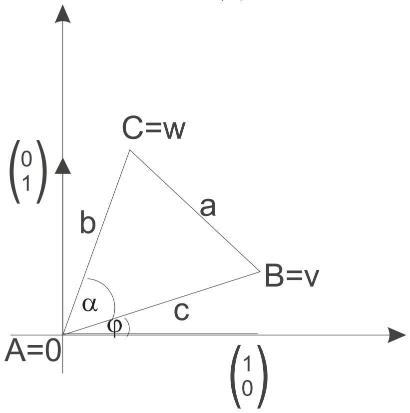


$$\left\langle v(\varphi), v\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right\rangle = cos\left(\varphi - (\varphi + \frac{\pi}{2})\right) = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

elementar-geometrisch senkrecht
Das veranlaßt die

Definition: v und w $\neq 0$ $\frac{\langle v,w\rangle}{|v|*|w|} = \cos <)(v, w)$

Ein Skalarprodukt liefert also nicht nur Längen von Vektoren sondern auch Winkel zwischen ihnen. Verwende in $\mathcal{R}^2$ das Standard Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ Betrachte $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ als zu einander senkrechte Einheitsvektoren.
$C = w = b * \binom{\cos(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha)}$
$B = v = c * \binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$



Wie kann man a aus b, c, α berechnen?

$$\begin{aligned} a^2 &\overset{Def.}{=} \langle w - v, w - v\rangle \\ &= |w|^2 - 2\langle w, v\rangle + |v|^2 \\ &= b^2 - 2bc \underbrace{\left\langle \frac{w}{|w|}, \frac{v}{|v|} \right\rangle}_{\text{Def.}: \cos\sphericalangle(w,v) = \cos\alpha} + c^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Kosinussatz der euklischen Geometrie, $\alpha = \frac{\pi}{2}$: Satz des Pythagoras

15.4 Standard Skalarprodukt von $\mathcal{R}^d$

Was würden Sie als Standard Skalarprodukt von $\mathcal{R}^d$ bezeichnen?
$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix} ; x_j \in \mathcal{R} \right\}$$
a)
$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix}}_{v} ; \langle \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \end{pmatrix}}_{w} \right\rangle := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$$

b) Betrachte

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_d} \text{ als } \underbrace{\text{paarweise senkrechte (=orthogonale) Einheitsvektoren}}_{\text{,,Orthonormalbasis``}}$$

$V, \langle , \rangle$ V sei ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $e_1, \dots, e_n$ seien eine Orthonormalbasis, d.h. $\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$v \in V$ sei beliebig. Natürlich gilt: $v = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$

Im allgemeinem muß man ein lin. Gleichungssystem lösen, um diese x_j zu finden.

Bei Anwesenheit eines Skalarproduktes hat man explizite Formeln.

$$v = \sum x_j e_j \;\Rightarrow\; \langle v, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{d} x_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j * \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\substack{0, \quad \text{außer} \\ \text{falls } j = k}} = x_k$$

also

$$\boxed{v = \sum_{j=1}^{d} \langle v, e_j \rangle * e_j}$$

$V, \langle , \rangle, \{e_1, \dots, e_d\}$, $A * V \to$ V linear $(A \in Hom(V,V) = End(V))$

Wie sieht die Matrix von A bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ aus?

$$A * e_j = \sum_{k=1}^{d} a_{kj} * e_k$$

Altes Rezept: von A bzgl. Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ zu finden. Nutzen von Skalarprodukten?

(Wiederholung: $v = \sum x_j e_j \Rightarrow A * v = \sum x_j * A * e_j = \sum_k \left((a_{k_j}) * (x_j) * e_k \right)$ Matrix-Multiplikation)

$$\begin{aligned} \langle A * e_j, e_i \rangle &= \left\langle \textstyle\sum_{k=1}^{d} a_{k_j} * e_k, e_i \right\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{d} a_{k_j} * \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_{\substack{0 \text{ außer für} \\ k = i}} \\ &= a_{ij} \end{aligned}$$

also eine explizite Formel für die Matrix

$V, \langle , \rangle, \{v_1, \ldots, v_d\}$ Basis die noch nicht an das Skalarprodukt angepaßt ist.
Wichtige Frage: Kann man daraus eine Orthonormalbasis machen?
$(|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle})$
$v_1 \rightsquigarrow e_1 := \frac{v_1}{|v_1|}$. $\{e_1, v_2, \ldots, v_d\}$ immer noch eine Basis
$v_2 \rightsquigarrow w_2 := v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle * e_1$
$\langle w_2, e_1 \rangle = \langle v_2, e_1 \rangle - \langle v_2, e_1 \rangle * \langle e_1, e_1 \rangle = 0$
$\{e_1, w_2, v_3, \ldots, v_d\}$ ist weiter eine Basis, $e_2 := \frac{w_2}{|w_2|}$.
Induktionsvoraussetzung:

$k = 1, 2$ erledigt $\begin{cases} e_1, \ldots, e_k, \text{ orthogonal, seien bereits gefunden, so dass } \{e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_d\} \text{ weiterhin Basis ist.} \\ j \leq k : Span(e_1, \ldots e_j) = Span(v_1, \ldots, v_j) \end{cases}$

Induktionsschritt:

$$w_{k+1} := v_{k+1} - \langle v_{k+1}, e_1 \rangle * e_1 - \langle v_{k+1}, e_2 \rangle * e_2 - \ldots \langle v_{k+1}, e_k \rangle * e_k v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, e_j \rangle e_j$$

liefert: $\langle w_{k+1}, e_j \rangle = 0$ für $j = 1, \ldots, k$.
Argumentiere: $\{e_1, \ldots, e_k, w_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_d\}$ ist weiterhin Basis.

$$\begin{array}{lll} span\{v_1, \ldots, v_r, v_{k+1}\} & \Rightarrow & = span\{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}\} \\ & w_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} x_j v_j & \text{denn } v_{k+1} = w_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} x_j v_j \end{array}$$

Orthonormalisierungsverfahren

$$w_1 := \frac{v_1}{|v_1|}$$

Orthonormalisierung im $(k+1)$-ten Schritt:

$$w_{k+1} := \frac{v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, v_i \rangle w_i}{|v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, v_i \rangle w_i|}$$

15.5 Isometrien und Abbildungen mit orthonormal Basen

Abbildungen, die Skalarprodukte respektieren also $U \in Hom(V, V)$ mit $\langle U * v_1, U * v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ heißen „orthogonale Abbildungen" oder Isometrien bzw. abstandstreu!
$Abst(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle = |x - y|$
$Abst(U * x, U * y) = \langle U * x - U * y, U * (x - y) \rangle = |x - y|$

Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Orthonormalbasis von V, dann ist auch $f_1 = U * e_1, \ldots, f_m = U * e_m$ eine O-N-Basis. Dies gilt auch umgekehrt: U respektiert Skalarprodukt (Beweis). Wir haben also: Es gibt viele orthonormale Abbildungen.

Beweis

Es sei $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ und $w = \sum_{k=1}^{m} y_k e_k$
Nun gilt

$$
\begin{aligned}
< v, w > &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \right\rangle \\
&\underbrace{=}_{\text{bilinear}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k \underbrace{< e_j, e_k >}_{=0 \text{ falls } j \neq k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j
\end{aligned}
$$

Wenn nun eine Abbildung isometrisch also abstandserhaltend ist, dann gilt: U orthogonal $\Rightarrow U$ ist injektiv, denn $|U * v| = |v|$, d.h. nur 0 wird auf 0 abgebildet. Sie ist sogar bijektiv.

Deshalb bilden die orthogonalen Abbildungen eine Gruppe, d.h. $U_1 \circ U_2$ ist orthogonal und das Assoziativgesetz gilt. Man muß aber beachten, daß das Kommututivgesetz <u>nicht</u> gilt.

Des weitern gilt: $e_1, \ldots, e_n \underset{\overleftarrow{U^{-1}}}{\overset{U}{\longrightarrow}} f_1, \ldots, f_n$.

15.5.1 Wie sieht nun die Matrix einer orthogonalen Abbildung aus?

Wir wollen nun untersuchen, wie die Matrix einer orthogonalen Abbildung bzgl. einer orthonormalen Basis ausschaut!

Sei V ein Vektorraum mit der orthonormal Basis $e_1, \ldots, e_n$ und einer orthogonalen Abbildung nach $\mathcal{R}^d$ sowie $<,>$ das Standard Skalarprodukt.

Es gilt nun:

$$v = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^d$$

Betrachtet man ersteinmal die Bilder der Einheitsvektoren, ergibt sich:

$$f_j = U * \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{j-te Zeile des std. Basisvektors}$$

Nun sind die Bildvektoren von U die Spaltenvektoren der Matrix von U:

$$(U) = (f_1, \ldots, f_n)$$

Wenn wir nun die inverse Matrix zu (U) suchen, so reicht es die Spaltenvektoren der Matrix zu Zeilenvektoren zu machen. Es ergibt sich:

$$\left(U^{-1}\right) \underbrace{=}_{\text{ohne Rechnung}} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \\ \vdots \end{pmatrix} \quad f_j' \text{ Zeilenvektor zu } f_j$$

In der Tat ergibt sich:

$$\left(U^{-1}\right) * (U) = U^{-1} \circ U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

15.5.2 Beispiel 1

Wir wollen nun zwei Beispiele für isometrische Abbildungen untersuchen. Dazu nehmen wir den Raum $\mathcal{R}^2$ bzw. $\mathcal{C}$. Diese Räume unterscheiden sich im Prinzip nicht von einander. Jedoch interpretieren wir sie unterschiedlich.
So sind die Standard Basen unterschiedlich bzw. werden unterschiedlich gelesen:

$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{C}$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$(1, i)$
$v \in \mathcal{R}^2 = x * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$1 * x + i * y = x + iy$

Wir nehmen nun folgende Matrix und wenden sie auf Vektoren der Räume an.

Zuerst in $\mathcal{R}^2$:

$$U*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \underbrace{*}_{\text{Matrixmultiplikation in } \mathcal{R}^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi * x & -\sin\varphi * y \\ \sin\varphi * x & \cos\varphi * y \end{pmatrix}$$

Und nun in $\mathcal{C}$:

$$(\cos\varphi + i*\cos\varphi)\underbrace{*x+iy}_{\mathcal{C}} = \cos\varphi * x - \sin\varphi * y + i*(\sin\varphi * x + \cos\varphi * y)$$

Diese Abbildungen heißen Drehung, weil

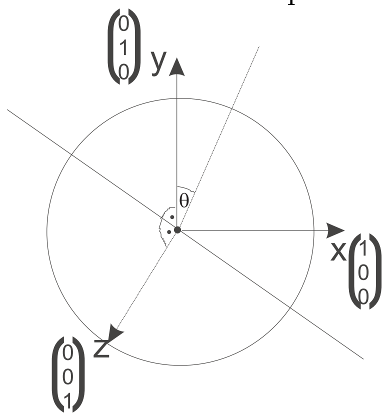
$$\left\langle U*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle = \cos\varphi * \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}^2 = \cos\varphi(x^2+y^2)$$

Dies läßt sich einfach nachrechnen:

$$\left\langle U*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle \underbrace{=}_{\text{std. Skalar}} (\cos\varphi * x - \sin\varphi * y) * x + (\sin\varphi * x + \cos\varphi * y) * y$$
$$= \cos\varphi * (x^2+y^2)$$

15.5.3 Beispiel 2

Wir wollen nun ein Beispiel im $\mathcal{R}^3$ betrachten.



Wir wollen die Standard Basis verwenden und die Matrix für folgende Abbildung suchen:

$$U: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ \cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ \cos\Theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix für diese Abbildung heißt orthogonale Matrix, da die 3 Spalten senkrecht zueinander stehen:

$$\begin{pmatrix} -\cos\Theta & 0 & \sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung heißt Spiegelung!

Wenn wir nun die beiden Winkelhalbierenden betrachten bzw. Summen- und Differenzvektor von $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ und $U * \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ (siehe Zeichnung oben), so ergibt sich für dies folgende Bild:

$$(U) * \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ \pm 1 + \cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sin\Theta \\ 0 \\ \pm\cos\Theta + 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir uns nun die Martix (U) ansehen, so läßt sich leicht erkenne, daß man diese bei geeigneter Basiswahl vereinfachen kann. Wir wollen nun eine optimalere Basis für (U) finden. Dies erreichen wir mit Hilfe folgender Umformung:

$$\frac{1}{\left|\begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ 1 + \cos\Theta \end{pmatrix}\right|} * \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ 1 + \cos\Theta \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ -1 + \cos\Theta \end{pmatrix}\right|} * \begin{pmatrix} \sin\Theta \\ 0 \\ -1 + \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Unter Verwendung dieser ON-Basis ergibt sich nun für (U) folgende Darstellung:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

15.6 Wie unterscheiden sich eigentlich Skalarprodukte in V?

Ein Skalarprodukt auf V erlaubt uns, eine ,,kanonische" lineare Abbildung Λ von V auf $Hom(V, \mathcal{R})$ zu definieren:

$$l_a(.) := < a, . >$$

bzw.

$$l_a(v) :=< a, v >$$

Diese Abbildung Λ ist offenbar linear, d.h. es gilt

$$a_1 + a_2 \to l_{a_1 \underbrace{+}_{\text{in V}} a_2} = l_{a_1} \underbrace{+}_{Hom(V,\mathcal{R})} l_{a_2}$$

Λ ist injektiv, denn es gilt: Falls $< a, v >= 0 \forall\ v \Rightarrow a = 0$. Es gilt weiterhin, daß V und $Hom(V, \mathcal{R})$ die gleiche Dimension haben. Daraus folgt Λ ist bijektiv. D.h. jede lineare Abbildung $l \in Hom(V, \mathcal{R})$ kann als Skalarprodukt geschrieben werden.

15.6.1 Wie findet man zu $l \in Hom(V, \mathcal{R})$ das $a \in V$ mit $l(v) = \langle a, v\rangle \forall\ v$?

l sei gegeben. Ist $l = 0$ wähle $a = 0$.
ist $l \neq 0$, so ist $V_l := Ker(l) = \{v | l(v) = 0\}$ Unterraum mit der Dimension $dim - 1$. Man sagt auch Kodimension = 1.
Schließlich wähle $b \neq 0$ und senkrecht v und betrachte $\tilde{l}(v) :=< b, v >$, dann gilt jedenfalls $Ker(\tilde{l}) = Ker(l)$ und $\tilde{l}(b) = \langle b, b\rangle$. Daher folgt $l = \frac{l(b)}{\langle b,b\rangle} * \tilde{l}$.

16 Verbesserung des Monotoniesatzes durch Abschwächung der Vorausetzung

$f : [a, b] \to \mathcal{R}$ sei für jedes $c \in [a, b]$ diffbar., d.h.
Zu jedem $c \in [a, b]$ gibt es r_c, K_c, so dass für $x \in [a.b]$ mit $|x - c| \leq r_c$ gilt: $|f(x) - f(c).f'(c) * (x - c)| \leq K_c * |x - c|^2$. Beachte: r_c, K_c dürfen von c abhängen.
Man kann in dieser Situation nicht sagen: Es gibt ein n, so dass für alle $c \in [a, b]$ gilt $\frac{b-a}{n} \leq r_c$. Damit ist der ältere Beweis nicht zu führen.
Die Vollständigkeit von $\mathcal{R}$ erlaubt trotzdem zu beweisen:

$$\text{Aus } 0 \leq f' \text{ folgt f ist schwach wachsend}$$

(Je schächer die Vorausetzungen, desto indirekter die Beweise)
Indirekter Beweis: Angenommen es gibt $a_1 < b_1 \in [a, b]$ mit $f(b_1) - f(a_1) \leq -\varepsilon$

$$m := \frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} < 0$$

Bemerkung:
Sei $t \in (a_1, b_1)$, und die Steigung über a_1, b_1 sei $\leq m$ dann ist mindestens eine der Steigungen über a_1, t oder über t, b_1 ebenfalls $\leq m$.
Konstruktion einer Intervallschachtelung $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, so dass die Sehnen über a_k, b_k Steigungen $\leq m$ haben $|\ldots| = \frac{1}{2}|\ldots|$

$a_1, b_1 \surd$
$test = \frac{a_1+b_1}{2}$
Fallunterscheidung:

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Steigung über } a_1, test \text{ ist } \leq m & oder & \text{Steigung über } test, b_1 \text{ ist } \leq m \\ a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2} & & a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Didaktischer-}\\ \text{schritt}\end{array}$$

Induktionsvor.:

Für $k = 1, 2, 3, \ldots, k^*$ sei $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$ konstruiert, $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1})$

$$\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \leq m$$

$$test = \frac{a_{k^*} + b_{k^*}}{2} \begin{array}{lcl} \text{Steigung über } a_{k^*}, test \text{ ist } \leq m & oder & \text{Steigung über } test, b_{k^*} \text{ ist } \leq m \\ a_{k^*-1} := a_{k^*}, b_{k^*-1} := \frac{a_{k^*}+b_{k^*}}{2} & & a_{k^*-1} := \frac{a_{k^*}+b_{k^*}}{2}, b_{k^*-1} := b_{k^*} \end{array}$$

Vollständigkeitsaxiom: Es gibt eine reelle Zahl $c \in [a_k, b_k] k = 1, 2, 3, \ldots$
In jedem gilt für die Steigung über a_k, c oder über c, b_k: Steigung $\leq m$
Damit haben wir eine Nullfolge r_k mit $\frac{f(c+r_k)-f(c)}{r_k} \leq m < 0$
Dann folgt $f'(c) \leq m < 0$ Widerspruch zur Voraussetzung

16.1 Satz von Bolzano-Weierstraß

Wiederholung: $\{r_n\}$ heißt Nullfolge falls gilt:
Zu jeder Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ gibt es einen Garantieindex n_ε so dass $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |r_n| \leq \varepsilon$
$\{a_n\}$ heißt konvergent gegen a, wenn $a_n - a$ Nullfolge
Feststellung: Bisher habn wir nur Nullfolgen $|r_n| \leq \frac{const}{n}$ benötigt.

Wozu braucht man die übliche Definition?

Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede monoton wachsende und beschränkte Folge konvergiert.

$$\ldots a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq S \overset{Beh.}{\Longrightarrow} \{a_n\} \text{ konvergiert}$$

Was muß man tun? Z.B. Eine Intervallschachtelung finden, von der die $\{a_n\}$ die linken Intervallenden sind.
Dies ist etwas mühsam. Wir zeigen zunächst den

Satz von der oberen Grenze

Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathcal{R}$, die beschränkt ist, besitzt eine kleinste obere

Schranke oder obere Grenze, Bezeichung: sup M; Supremum M
Beweis durch Halbieren mit Fallunterscheidung

$$m \in M \neq \emptyset \text{ Es gibt eine Zahl S, so dass } \forall r \in M : r \leq S \text{ obere Schranke}$$

Ziel: Konstruiere geeignete Intervallschachtelung
Induktionsanfang
$a_1 := m$, $b_1 := S$, $test := \frac{a_1+b_1}{2}$

test ist keine obere Schranke	oder	test ist obere Schranke
$\exists m_1 \in M : test < m_1$		
$b_2 := b_1; a_2 := m_1$		$a_2 := a_1; b_2 := test$
	usw.	

Didaktischer Schritt:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2] \text{ mit } a_1, a_2 \in M, b_1, b_2 \text{ sind obere Schranken}$$

$$test := \frac{a_2+b_2}{2}$$

test ist obere Schranke	oder	test wird übertroffen
		d.h.: $\exists m_2 \in M : test < m_2$
$a_3 := a_2; b_3 := test$		$a_3 := m_2; b_3 := b_2$

Induktionsvor.: Für $n = 1, 2, \dots, n_*$ ist $[a_n, b_n]$ definiert mit den Eigenschaften $a_n \in M, b_n$ obere Schranken $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$

$$test := \frac{a_{n_*}+b_{n_*}}{2}$$

test ist obere Schranke	oder	test wird durch m_{n_*} übertroffen
$a_{n_*+1} := a_{n_*}; b_{n_*+1} := test$		$a_{n_*+1} := m_{n_*}; b_{n_*+1} := b_{n_*}$

Vollständigkeit liefert $r \in [a_n, b_n] \forall n$

16.2 Gibt es noch kleinere obere Schranken

Beh.: r ist kleinste obere Schranke
(**Bemerkung**: $b_n - r$ und $r - a_n$ sind Nullfolgen)
$r - \varepsilon$ kann nicht obere Schrenke sein, weil a_n schließlich größer als $r - \varepsilon$ ist. r ist tatsächlich obere Schrenke. Falls nicht, so wird r übertroffen, d.h. es gibt $m \in M$ mit $r < m$. Weil $b_n - r$ Nullfolge ist, ist dann für genügend große n $b_n < m$, also b_n nicht obere Schranke.
Anwendung: Monotone beschränkte Folgen konvergieren gegen ihre obere Grenze. (In dem ursprünglichem Beweis war die Intervallschachtelung so konstruiert, dass alle Elemente a_n der monotonen Folge als linke Endpunkte der Intervalle auftreten.)

16.3 Konvergenz auf höhere Dimensionen ausdehnen

$\binom{a_n}{b_n}$ sei Folge in $\mathcal{R}^2$
Def.: $\binom{a_n}{b_n}$ konvergiert gegen $\binom{a}{b}$ genau dann, wenn a_n gegen a und b_n gegen b konvergiert.

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{dn} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^d$$

Def.: $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{dn} \end{pmatrix}$ konvergiert in $\mathcal{R}^d$ gegen $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$ genau dann wenn alle Folgen $(a_{kn} - a_k)_{k=1,\ldots,d}$ Nullfogen sind.
Man muß zu viel arbeiten, wenn man dies alles mit Intervallschachtelungen beschreiben will.

16.3.1 Cauchyfolge

Nullfolge, konvergente Folge, Cauchyfolge
Def.: a_n ist Cauchyfolge falls gilt: Zu jeder Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ gibt es einen Garantieindex n_ε, so dass gilt: $m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon$
Bemerkung: Jede konvergente Folge ist offensichtlich Cauchyfolge
$m, n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}, |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon$

16.4 Volständigkeitsaxiom II: Jede Cauchyfolge in $\mathcal{R}$ konvergiert

II richtig $\Rightarrow$ Unser ursprüngliches Vollständigkeitsaxiom gilt, weil die linke Randfolge ebenso wie die rechte Randfolge einer Intervallschachtelung Cauchyfolgen sind.

$m \geq n \qquad \underbrace{[_{a_n} a_m \ldots]_{b_n}}_{\leq \varepsilon}$

Satz: Aus unserer ursprünglichen Vollständigkeitsformulierung folgt das Vollständigkeitsaxiom II
Beweis durch Konstruktion einer Intervallschachtelung mit Hilfe von ,,Halbieren & Fallunterscheidung“. Die gegebene Cauchyfolge heiße C_n
Finde ein erstes Intervall $[a_1, b_1]$ in dem unendlich viele Elemente der Cauchyfolge enthalten sind. (Induktionsanf.):
Wähle in der Definition von C.F. $\varepsilon = 1$, bestimme den Garantieindex n_1, und bemerke: $m \geq n_1 \Rightarrow |C_m - C_{n_1}| \leq \varepsilon = 1$, d.h. für $m \geq n_1$ gilt $C_m \in [\underbrace{C_{n_1} - 1}_{=:a_1}, \underbrace{C_{n_1} + 1}_{=:b_1}]$

Typischer Halbierungsschritt: $test := \frac{a_1+b_1}{2}$
Entweder in $[a_1, test]$ oder in $[test, b_1]$ liegen unendlich viele Elemente der Cauchyfolge. Wähle das richtige der beiden als $[a_2, b_2]$ usw.
$[a_1, b_1] \subset \ldots \subset [a_{n_*}, b_{n_*}]$ alle enthalten unendlich viele C_m
Schluß-Bemerkung: C_n konvergiert gegen den Punkt $r \in [a_n, b_n]$

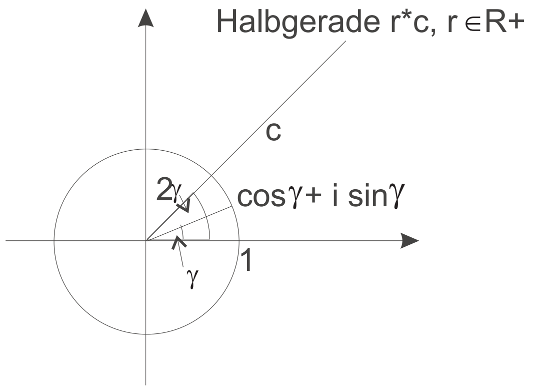
17 Komplexe Zahlen

17.1 Veranschaulichung komplexer Funktionen

Polynome $P \in \mathcal{C}[X]$
Polynomfunktion $z \in \mathcal{C} \to P(z)$
Die Veranschaulichung mit Hilfe des Graphen ist unmöglich.
Einfachste Funktion $z \to z + a$ ($a \in \mathcal{C}$ konstant) $\surd$
$z \to c * z$ ($c \in \mathcal{C}$ konstant) Wichtig: $|c * z| = |c| * |z|$
$c * z_k - c * z_j = c * (z_k - z_j)$
Alle Abstände im Argumentbereich werden mit $|c|$ multipliziert um die Abstände im Wertebereich zu bekommen!

$$\underbrace{|cz_k - cz_j|}_{\text{Abstand zwischen } c * z_k \text{ und } c * z_j \text{ im Wertebereich}} = |c| * \underbrace{|z_k - z_j|}_{\text{Abstand zwischen } z_k \text{ und } z_j \text{ im Argumentbereich}}$$

Die nächste einfache Funktion ist $z \to z * z$



$z = r * c$; $z^2 = \underbrace{r^2 * c^2}_{Halbgerade}$ $r^2 \in \mathcal{R}_+$
Halbgeraden durch 0 werden auf Halbgeraden durch 0 abgebildet
Speziele $c := \cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)$
$c^2 = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) + i * 2\cos(\varphi) * \sin(\varphi) = \cos(2\varphi) + i * \sin(2\varphi)$

$P(z) = z * z$
$P(z) - P(a) = z^2 - a^2 = (z-a) * (z+a) \underbrace{\approx}_{\text{z sehr nahe bei a ist}} 2a * (z-a)$

$|P(z) - \underbrace{P(a) - 2a * (z-a)}_{z \to \underbrace{a^2}_{\text{Wert}} + 2a* \underbrace{|z-a|}_{\text{Lineare Approx}}}| = \underbrace{|z-a|^2}_{{}^2-Fehler}$ sind gute Beispiel von kleinen Fehlern

17.2 Die Differentialrechnung mit komplexen Funktionen als Wiederholung der Argumente in $\mathcal{R}$

1. **Binomische Formel und $\triangle$-Ungl.**:
   Potenzen: $|z^n - \underbrace{a^n - na^{n-1} * (z-a)}_{\text{lin. Approx}}| \le \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} * R^{n-2}}_{\text{Konst}} * \underbrace{|z-a|^2}_{{}^2\text{-Fehler}}$

   $a, z \in \mathcal{C}$
   $|a|, |z| \le R$

2. **Polynome** (1. + Lin.-Komb.)

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad P'(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k * k * z^{k-1}$$
$$|P(z) - P(a) - P'(a)(z-a)| \le K * |z-a|^2$$

   $K = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} |a_k| * k(k-1) * R^{k-2}$ wegen $|a_k|$ ist die Konstante oft viel zu groß

3. **Definition: Differenzierbar mit quadratischem Fehler**
   $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ oder $\to$ Kreisscheibe um a $\{z; |z-a| \le r\}$
   heißt differenzierbar mit quadratsichem Fehler, falls gilt: Es gibt eine komplexe Zahl $F'(a)$, einen Kontrollradius $\delta \in r$ und eine Konstante K, so dass:

$$|z-a| \le \delta \Rightarrow |F(z) - \underbrace{F(a) - F'(a) * (z-a)}_{\text{lin. Approx.}}| \le \underbrace{K * |z-a|^2}_{{}^2\text{-Fehler}}$$

4. **Differentiationsregeln**

$$(\alpha * f + \beta * g)' = \alpha * f' + \beta * g' \text{ (Lin. Komb. + } \triangle\text{-Ungl.)}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{Produkt } (f * g)' & = & f' * g + f * g' \\ \text{Komp. } (f \circ g)' & = & (f' \circ g) * g' \end{array}\right\} \text{Beweise werden mit der endgültigen Definition noch geführt}$$

5. Ein Monotoniesatz macht keinen Sinn, stattdessen:

$$\underbrace{|F'| \leq S}_{\text{z.B. in } |z-a| \leq R} \quad \Rightarrow \underbrace{|F(z) - F(a)| \leq S * |z-a|}_{\text{,,}\textbf{Schrankensatz}\text{``}}$$

6. **Grenzfunktionen**

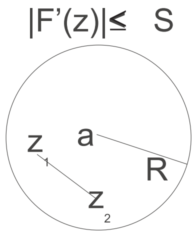
7. **Endgültige Differentierbarkeits-Definition**

17.3 Beweis des Schrankensatzes

In der Kreisscheibe $D_R(a) := \{z \in \mathcal{C}; |z-a| \leq R\}$ sei F differenzierbar und $|F'(z)| \leq S$

Behauptung.:

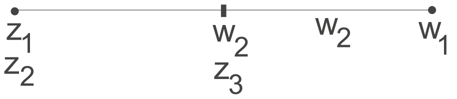
$$|F(z_1) - F(z_2)| \leq S * |z_a - z_2|$$



Indirekter Standard Beweis.
Angenommen dies wäre falsch, d.h. es gibt zwei Punkte $z_1, w_1 \in D_R(a)$, so dass $|F(w_1) - F(z_1)| > S * |w_1 - z_1|$

$$\text{oder } |F(w_1) - F(z_1)| \geq (S + \varepsilon) * |w_1 - z_1| \quad \text{für ein genügend kleines } \varepsilon > 0$$

$z_m = \frac{z_1 + w_1}{2}$



$|z_1 - z_m| + |w_1 - z_m| = |w_1 - z_1|$

Behauptung:

$$\begin{array}{lrcl} & |F(w_1) - F(z_m)| & \geq & (S+\varepsilon) * |w_1 - z_m| \\ \text{oder} & |F(z_m) - F(z_1)| & \geq & (S+\varepsilon) * |z_m - z_1| \end{array}$$

Warum? Wenn nicht $\Rightarrow$ nicht $\geq$ sondern $<$ in beiden Fällen,
mit $\triangle$-Ungl.:

$$|F(w_1) - F(z_1)| \leq \underbrace{\underbrace{|F(w_1) - F(z_m)|}_{<(S+\varepsilon)|w_1 - z_m|} + \underbrace{|F(z_m) - F(z_1)|}_{(S+\varepsilon)*|z_m - z_1|}}_{<(S+\varepsilon)|w_1 - z_1|} \text{ Widerspruch!}$$

$\Rightarrow$ Behauptung $\surd$

$$\begin{array}{lcclcl} & |F(w_1) - F(z_m)| & \geq & (S+\varepsilon) * |w_1 - z_m| & \Rightarrow & w_2 := w_1 \quad \text{und} \quad z_2 := z_m \\ \text{oder} & |F(z_m) - F(z_1)| & \geq & (S+\varepsilon) * |z_m - z_1| & \Rightarrow & w_2 := z_m \quad \text{und} \quad z_2 := z_1 \end{array}$$

usw. durch Induktion

Induktions-Anfang:

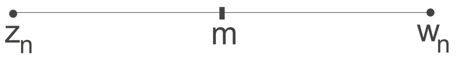
$$|F(w_1) - F(z_1)| \geq (S+\varepsilon) * |w_1 - z_1|$$

Induktions-Voraussetzung:

Für $n = 1, 2, \ldots, n_*$ seien z_n, w_n definiert mit folgenden Eigenschaften:

$$|z_n - w_n| = \frac{1}{2}|z_{n-1} - w_{n-1}|, |F(z_n) - F(w_n)| \geq (S+\varepsilon) * |z_n - w_n|$$

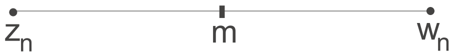
Die Strecke von z_n nach w_n ist Teilstück der Strecke von z_{n-1} nach w_{n-1}



Induktions-Schritt:

Betrachte $m = \frac{z_n + w_n}{2}$ Dann gilt:

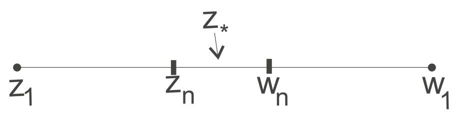
$$\begin{array}{lccl} & |F(z_n) - F(m)| & \geq & (S+\varepsilon) * |z_n - m| \\ \text{oder} & |F(w_n) - F(m)| & \geq & (S+\varepsilon) * |w_n - m| \end{array}$$



Falls $|F(z_n) - F(m)| \geq (S+\varepsilon)|z_n - m|$ dann wähle $z_{n+1} := z_n$ und $w_{n+1} = m$ andernfalls wähle das andere Teilstück, also $w_{n+1} = w_n$ und $z_{n+1} = m$ Damit hat man die Cauchyfolgen $\{z_n\}$ und $\{w_n\}$ sind in der Kreischeibe $D_R(a)$

$$\left.\begin{array}{l} z_n = x_n + i * y_n \\ |x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \end{array}\right\}$$

1. wegen $z_n = x_n + iy_n$ überträgt sich die Vollständigkeit von $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{C}$ (sogar auf $\mathcal{R}^d$.
2. z_n und w_n sind Cauchyfolgen mit demselben Grenzwert $z_* \in D_R(a)$.



z_* liegt auf jeder der Strecken von z_n nach w_n und daher gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & |F(z_n) - F(z_*)| & \geq & (S+\varepsilon) * |z_n - z_*| & \sharp 1 \\ \text{oder} & |F(w_n) - F(z_*)| & \geq & (S+\varepsilon) * |w_n - z_*| & \end{array}$$

Auf der anderen Seite hat man Differenzierbarkeit bei z_*

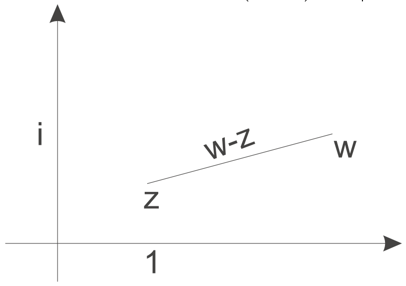
$$|z - z_*| \leq \delta_* \Rightarrow |F(z) - F(z_*) - F'(z_*) * (z - z_*)| \leq K|z - z_*|^2$$

$$\begin{array}{lrcll} \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\Longrightarrow} & |F(z) - F(z_*)| & \leq & |F'(z_*)| * |z - z_*| + K * |z - z_*|^2 & \\ \forall z : |z - z_*| \leq \delta_* & & \leq & (S + K|z - z_*|) * |z - z_*| & \sharp 2 \end{array}$$

$z_n - z_*$ und $w_n - z_*$ sind Nullfolgen.
Insbesondere kann $|z_n - z_*| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$; $|w_n - z_*| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$ erreicht werden
$\Rightarrow$ Widerspruch von $\sharp 1$ und $\sharp 2$

17.4 Schrankensatz auf höhere Ableitungen

$z, w \in \mathcal{C}$ $Abstand(z, w) = |z - w| =$ Länge Strecke z nach w

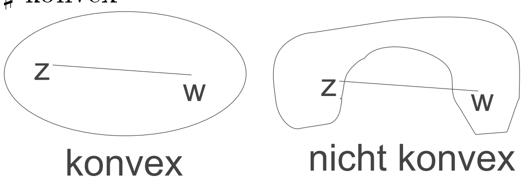


$|z * w| = |z| * |w|$

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

- $|F(z) - F(w)| \leq L * |z - w|$ Falls dies gilt für alle $z, w \in Definitionsbereich(F)$ dann heißt L ,,Dehnungschranke“ oder ,,Lipschitz-Schranke“

- Schrankensatz: Falls in einem konvexem$^\sharp$ Gebiet $G \subset \mathcal{C}$ bekannt ist $|F'| \leq S$ (d.h. $z \in G \Leftrightarrow |F'(z)| \leq S$) dann ist S Dehungsschranke.
  $\sharp$ konvex

  Eine Teilmenge G in einem euklidischem Raum $\mathcal{R}^d$ heißt konvex, wenn mit

je zwei Punkten $p, q \in G$ die ganze Verbindungsstrecke $[g(t) := p*(1-t)+q*t(0 \le t \le 1)]$ in der Teilmenge enthalten ist.
Oder: z und w seien aus dem Def.-Bereich von F. Wir interessieren uns für $|F(w)-F(z)| \le ?\ |w-z|$
Behauptung: Falls längs der Verbindungsstrecke von z nach w bekannt ist: $|F'| \le S$ dann gilt $|F(w)-F(z)| \le S*|w-z|$. (Gleicher Beweis wie früher)

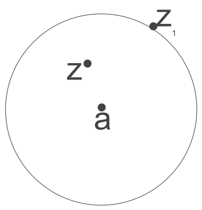
Schrankensatz mit höheren Ableitungen

Voraussetzung: $|F''| \le S$ in einem konvexem Gebiet G

$$\stackrel{a,z,w\in G}{\Longrightarrow} |F'(w)-F'(z)| \le S*|w-z|$$

$$\begin{aligned}
|\underbrace{(F(z)-F(a)-F'(a)*(z-a))'}_{G'(z)}| &= |F'(z)-(F(a))'-(F'(a)*z)'-(F'(a)*a)'| \\
&= |F'(z)-F'(a)| \\
&\le S*|z-a|
\end{aligned}$$

Dies ist keine Konstante; im Schrankensatz brauchen wir jedoch eine Konstante $\Rightarrow$ wir brauchen Konstante, setzen $|z_1-a| = r_1$



$r_1 = |z_1-a|$ $\quad |z-a| \le r_1$

$$|G'(z)| \le S*r_1$$

$$\stackrel{\text{Schrankensatz}}{\Longrightarrow} |G(z)-G(a)| \le S*r_1*|z-a|$$

speziell für $z = z_1$

$$|F(z_1) - \underbrace{F(a)-F'(a)*(z_1-a)}_{\text{lin. Approx. von F}}| \le \underbrace{S*|z_1-a|^2}_{^2\text{-Fehler}}$$

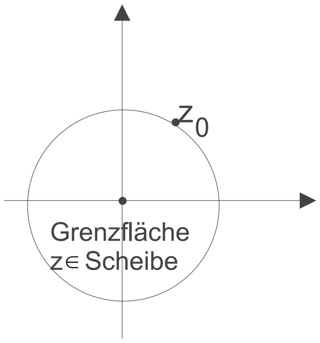
18 Konstruktion von Grenzfunktionen, sog. Potenzreihen

Erfolge aus $\mathcal{R}$

- $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
  $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

- Taylorpolynome
  $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(a)}}{k!}(z-a)^k$

Betrachte Polynome $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ Falls $a_0, a_1, \ldots$ gegeben ist, so ist $P_n(.)$ eine Funktionenfolge und für jedes z ist $P_n(z)$ eine Folge komplexer Zahlen.
Weil in $\mathcal{C}$ jede Cauchyfolge konvergiert, ist es unser Ziel $\{P_n(z)\}$ als Cauchyfolge nachzuweisen.
Satz:
Vor.: Angenommen $\{P_n(z_0)\}$ ist Cauchyfolge für ein $0 \neq z_0 \in \mathcal{C}$. (Erfüllt falls die a_k die Koeff. der Potenzreihen von $\exp, \sin, \cos$ sind)
Beh.: Wähle $0 < q < 1$ und $|z| \leq q * |z_0|$. Dann ist $\{P_n(z)\}$ Cauchyfolge.



Vor.: $\{P_n(z_0)\}$ konvergent
$\overset{falls}{\Rightarrow}$ $|z| < |z_0|$ so ist $P_n(z)$ konvergent
Vor.: $P_n(z_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k$ konvergiert, ist also insbesondere Cauchyfolge.
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_ε, so dass: $n, m \geq n_*$ $|P_m(z_0) - P_n(z_0)| \leq \varepsilon$ speziell wahr für $m = n+1 \rightarrow P_{n+1}(z_0) - P_n(z_0) = a_{n+1} z_0^{n+1}$ ist eine N.F.

Hilfssatz: Jede Nullfolge $\{C_n\}$ ist beschränkt
(Def.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε so dass $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |C_n| \leq \varepsilon$)
Beweis durch Spezialisierung der Def.:
Wähle $\varepsilon = 1$ und finde n_1, so dass

$n \geq n_1 \Rightarrow |C_n| \leq 1 \qquad S := max(1, |C_0|, \ldots, |C_{n_1}|)$
Damit gilt $|C_n| \leq S \; \forall \; n \in \mathcal{N}$

Anwendung:

- Es gibt also ein S, so dass $|a_n z_0^n| \leq S$ für alle $n \in \mathcal{N}$
- z gewählt mit $|z| \leq q * |z_0|$. Dann ist $|a_n z^n| = |a_n| * |z|^n \leq q^n * |a_n z_0^n|$ also

$$|P_n(z) - P_{n-1}(z)| = |a_n z^n| \leq S * q^n \text{ geometrisch majorisiert}$$

- $\{P_n(z)\}$ ist Cauchyfolge

$$\begin{aligned}
|P_{n+k}(z) - P_n(z)| &= |P_{n+k}(z) - P_{n+k-1}(z) + P_{n+k-1}(z) + - \ldots - P_n(z)| \\
&= |\textstyle\sum_{j=1}^{k}(P_{n+j}(z) - P_{n+j-1}(z))| \\
&\leq \textstyle\sum_{j=1}^{k} |P_{n+j}(z) - P_{n+j-1}(z)| \\
&\leq \textstyle\sum_{j=1}^{k} S * q^{n+j} \\
&\leq S * q^n * \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} q^j \\
&= \tfrac{S}{1-q} * q^n
\end{aligned}$$

Resultat: $|P_{n+k}(z) - P_n(z)| \leq \frac{S}{1-q} * q^n$
Damit ist $\{P_n(z)\}$ als Cauchyfolge nachgewiesen!

18.1 Komplexe Exponentialfunktion

18.1.1 Wiederholung: Geometrische Majorisierung

Zum Umgang mit Folgen

- Monoton + beschränk $\Rightarrow$ Konvergiert
- Leibnizreihen bringen ihre Intervallschachtelungen mit
- Geom. Majorisierung

$\{C_n\}$ sei eine Folge in $\mathcal{R}^d$ (Pythagoras-Abstand).
$Vor(g) : |C_{n+1} - C_n| \leq S * q^n$

Beispiel: $C_n = P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$
$P_n(z_0)$ konvergiert und $|z| \leq q * |z_0|$

Behauptung: C_n ist Cauchyfolge: $|C_{n+p} - C_n| \leq \frac{S}{1-q} * q^n$
Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|C_{n+p} - C_n| &= |\sum_{k=1}^{p} \underbrace{(C_{n+k} - C_{n+k-1})}_{\text{Teleskops.}}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{p} |C_{n+k} - C_{n+k-1}| \\
&\overset{Vor(g)}{\leq} \sum_{k=1}^{p} S * q^{n+k-1} \\
&= S * q^n * \sum_{k=1}^{p} q^{k-1} \\
&\leq S * q^n * \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \\
&= \frac{S}{1-q} q^n
\end{aligned}$$

und konvergiert deshalb

$$\begin{array}{llll}
Vor(g_0): & |C_{n+1} - C_n| & \leq & q * |C_n - C_{n-1}| \quad \overset{\text{Beh.}}{\Rightarrow} \quad Vor(g) \\
& & \leq & q^2 * |C_{n-1} - C_{n-2}| \\
& & \vdots & \\
\text{Induktions-Beweis} & |C_{n+1} - C_n| & \leq & q^n \underbrace{|C_1 - C_0|}_{=:S}
\end{array}$$

18.1.2 Kontraktions-Lemma

Dies kommt vor in folgenden Situationen:
$f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ mit $|f'| \leq q < 1$
C_0 beliebig $\quad C_{n+1} := f(C_n)$
Behauptung: $Vor(g_0)$ gilt!

$$\begin{aligned}
|C_{n+1} - C_n| &= |f(C_n) - f(C_{n-1})| \\
&\underbrace{\leq}_{\text{Schrankensatz}} q * |C_n - C_{n-1}|
\end{aligned}$$

Behauptung: Der Grenzwert $\lim C_n = C_\infty$ ist ein Fixpunkt $f(C_\infty) = C_\infty$ von f.

$$\lim C_n = \lim C_{n+1} = \lim f(C_n) = f(\lim C_n)$$

Wiederholter Hilfssatz:
HS.: $P_n(z_0)$ konvergiert $\Rightarrow$ Für $|z| \leq q * |z_0|$ ist $\{P_n(z)\}$ geom. majorisiert

$$|P_{n+1}(z_0) - P_n(z_0)| = |a_{n+1} * z_0^{n+1}| \text{ ist eine N.F. also } \leq S$$

$$\Rightarrow |P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq q^{n+1} * |a_{n+1} * z_0^{n+1}| \leq S * q^{n+1}$$

Anwendung

$P_n(z) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$
Bekannt ist: Dies konvergiert für jedes reelle x, also auch für jedes komplexe z
$\exp(z) := \lim_{n\to\infty} P_n(z)$

18.1.3 Eigenschaften der komplexen Grenzfunktion?

$$\begin{aligned} |P_n'(z)| &= |\sum_{k=1}^{n} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}| \\ &= |P_{n-1}(z)| \\ &\overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|z|^k}{k!} \\ &\leq \underbrace{\exp(|z|)}_{\text{reelle exp-Fkt.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_*|, |w_*| \leq R \quad &\Rightarrow \quad |P_n'(z)| \leq \exp(R) \\ &\Rightarrow \quad |P_n(w_*) - P_n(z_*)| \leq \underbrace{\exp(R) * |w_* - z_*|}_{\text{unabh. von n}} \end{aligned}$$

Daher folgt mit Archimedes Argument für die Grenzfunktion eine Dehungsschranke

$$|\exp(w_*) - \exp(z_*)| \leq \exp(R) * |w_* - z_*|$$

18.1.4 Was ist mit Differenzierbarkeit?

Wiederhole Anwendung des Schrankensatzes

$$|F''| \leq B \to |f(z) - f(a) - f'(a) * (z-a)| \leq B * |z-a|^2$$

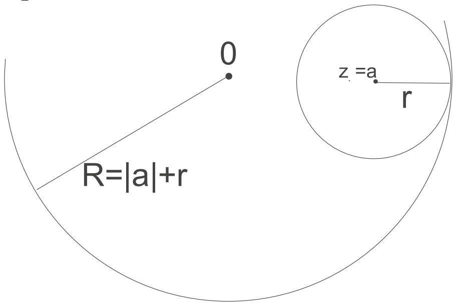
Anwendung auf die Funktion P_n $\quad |P_n''(z)| \overset{|z|\leq R}{\leq} \exp(R)$
Daher

$$|z_*|, |w_*| \leq R \Rightarrow |P_n(w_*) - P_n(z_*) - P_n'(z_*) * (w_* - z_*)| \leq \exp(R) * |w_* - z_*|^2$$

Archimedes

$$|\exp(w_*) - \exp(z_*) - \exp(z_*) * (w_* - z_*)| \leq \exp(R) * |w_* - z_*|^2$$

Spezialisiert:



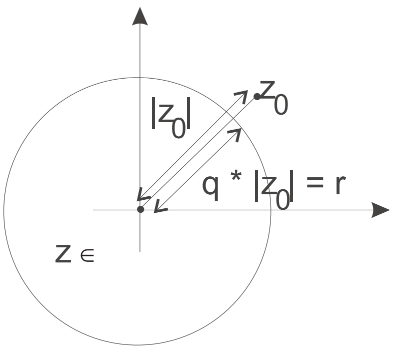
Voraussetzung: $|z - a| \leq r \qquad \mathcal{R} := |a| + r$

$$\Rightarrow |\exp(z) - \underbrace{\exp(a) - \exp(a) * (z - a)}_{\text{lin. Approx}}| \leq \underbrace{\exp(R) * |z - a|^2}_{^2\text{-Fehler}}$$

$\Rightarrow$ Die komplexe Exponentialfunktion ist (sogar mit ^{2}-Fehler) differenzierbar und $\exp' = \exp$

18.1.5 Verallgemeinerung auf Potenzreihen

$P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$
Vor.: Die $a_k, k \in \mathcal{N}$ sind gegeben und für ein z_0 ist bekannt $|a_n * z_0^n| \leq S$ Wähle $0 < q < 1$ und betrachte z mit $|z| \leq q * |z_0|$
Dann ist $|P_{n+1}(z) - P_n(z)| = |a_{n+1} z^{n+1}| \leq S * q^{n+1}$ geom. majorisiert
Also existiert $\lim_{n\to\infty} P_n(z) =: P_\infty(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$



18.1.6 Welche Eigenschaften hat die Grenzfunktion (P_∞)?

Betrachte $P_n'(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k * k * z^{k-1}$
Behauptung: beinahe geometrisch majorisiert

$$\begin{array}{rcl} |P_{n+1}'(z) - P_n'(z)| & = & |a_{n+1} * (n+1) * z^n| \\ & = & |a_{n+1} * z_0^{n+1} * (n+1) * \frac{z^n}{z_0^{n+1}}| \\ & \leq & \frac{S}{|z_0|} * (n+1) q^n \\ & \overset{\text{Beh.}}{\leq} & \frac{S}{|z_0|(1-\sqrt{q})} * \sqrt{q}^n \end{array}$$

Mit anderem Faktor geometrisch majorisiert, Beweis:

$$(n+1) * \tilde{q}^n \leq \sum_{k=0}^{n} \tilde{q}^k \leq \frac{1}{1-\tilde{q}} \text{ Standardabschätzung}$$

$$\text{Daher: } (n+1) * q^n = \sqrt{q}^n * (n+1) * \sqrt{q}^n \leq \frac{\sqrt{q}^n}{1-\sqrt{q}}$$

$\tilde{q} = \sqrt{q}$ Also ist $P_n'(z)$ C.F.
Erinnerung:

$$\frac{1}{1-q} - \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n}{1-q} \rightsquigarrow \frac{1}{(1-q)^2} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k * q^{k-1}} = \frac{n * q^{n-1}}{1-q} + \frac{q^n}{(1-q)^2} \geq 0$$

$$|P_n'(z)| \leq \frac{S}{|z_0|} * \sum_{k=0}^{n-1} k * q^{k-1} \leq \frac{S}{|z_0|} * \frac{1}{(1-q)^2}$$

Hilfe:

$$|P_m'(z)| = |\sum_{k=0}^{n} a_k * k * z^{k-1}| \leq \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} \underbrace{|a_k * k * z^{k-1}|}_{\leq \frac{S}{|z_0|} k * q^{k-1}} \leq \frac{S}{|z_0|} * \sum_{k=1}^{n} k * q^{k-1} \leq \frac{S}{|z_0|} * \frac{1}{(1-q)^2}$$

Schrankensatz:
$|z_*|, |w_*| \leq q * |z_0|$

$$|P_n(w_*) - P_n(z_*)| \leq \frac{S}{|z_0| * (1-q)^2} |w_* - z_*|$$

Archimedes Argument liefert eine Dehnungschranke für die Grenzfunktion:

$$|P_\infty(w_*) - P_\infty(z_*)| \leq L |w_* - z_*|$$

Was ist mit der Differenzierbarkeit der Grenzfunktion?

$$|P_n(w_*) - P_n(z_*) - P_n'(z_*) * (w_* - z_*)| \leq \underbrace{\begin{pmatrix}\text{Schranke für } |P_n''(z)| \\ \text{in der Scheibe } |z| \leq \\ q * |z_0|\end{pmatrix}}_{\text{unabh. von n}} *|w_* - z_*|^2$$

$$\Rightarrow |P_\infty(w_*) - P_\infty(z_*) - (\lim(P_n'(z_*)) * (w_* - z_*) \leq Schranke * |w_* - z_*|^2$$

d.h. P_∞ ist diffbar. und $P_\infty'(z)$ ist Grenzwert von $P_n'(z)$
Voraussetzung: $|z| \leq q * |z_0|$ $\quad |a_k * z_0^k \leq S|$

$$\begin{aligned} |P_n''(z)| &= |\sum_{k=2}^{n} a_k * k * (k-1) * z^{k-2}| \\ &\overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \sum_{n=2}^{n} |a_k| * (\tfrac{|z_0|^k}{|z_0|^2}) * k(k-1) * \tfrac{|z^{k-2}|}{|z_0^{k-2}|} \\ &\leq \tfrac{S}{|z_0|^2} * \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} \qquad \sharp^1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-q)^2} - \sum_{k=1}^{n-1} k * q^{k-1} = \frac{n * q^{n-1}}{1-q} + \frac{q^n}{(1-q)^n}$$

$$\underbrace{\frac{2}{(1-q)^3} - \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) * q^{k-2}}_{\geq 0} = \frac{n(n-1)q^{n-2}}{1-q} + \frac{n * q^{n-1}}{(1-q)^2} + \frac{n * q^{n-1}}{(1-q)^2} + \frac{2 * q^{n-1}}{(1-q)^3} \geq 0$$

$$|P_n''(z)| \overset{\sharp^1}{\leq} \frac{S}{|z_0|^2(1-q)^3} \text{ von n unabhängig, also}$$

$$|P_n(w_*) - P_n(z_*) - P_n'(z_*)(z_* - w_*)| \leq \frac{S}{|z_0|^2(1-q)^3} * |w_* - z_*|^2$$

Mit Archimedes auf die Grenzfunktion ausdehnen.

18.1.7 Schlußwort zu Grenzfunktionen

Rationale Funktionen reichen nicht zur Darstellung von sin, cos für Kreisbewegungen $\Rightarrow$ Grenzübergang, Approximation aus bekannten Funktionen.
$P_n(z) = \sum_{k}^{n} a_k z^k$ komplexe Polynome (berechenbar!)
$a_k = \frac{1}{k!} \rightarrow \lim P_n(z) = \exp(z)$
Grenzfunktion von konvergenten Potenzreihen sind tatsächlich differenzierbar, und zwar leicht: $P_\infty'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k * k * z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k * k * z^{k-1}$ (siehe C.F.)

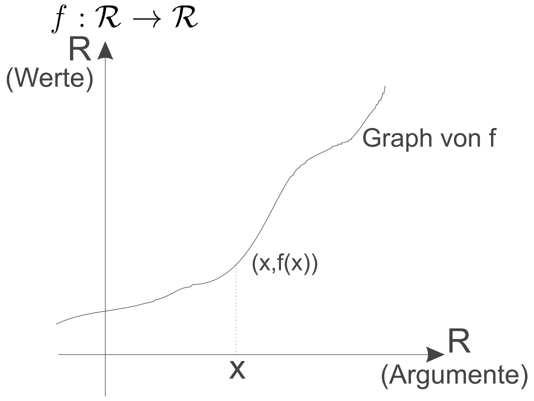


Bild einer Funktion in $\mathcal{R}^2$

In großen Bereichen der Mathematik werden die Vokabeln ,,Funktion" und ,,Abbildung" synonym gebraucht. Im reell 1-dimensionalen hat sich das nicht durchgesetzt, weil 1-dimensionale ,,Bilder" zu dürftig sind. Für komplexe Funktionen dagegen erhält man brauchbare Veranschaulichungen so: Man male in den Definitionsbereich der Funktion f ein (nicht zu einfaches) Bild und betrachte, was unter der Abbildung f aus diesem Bild wird! Für viele mathematische Zwecke ist ein quadratisches Gitternetz im Definitionsbereich von f schon ein ,,genügend kompliziertes Muster", wie das folgende Beispiel für $f(z) = z^2$ zeigt:

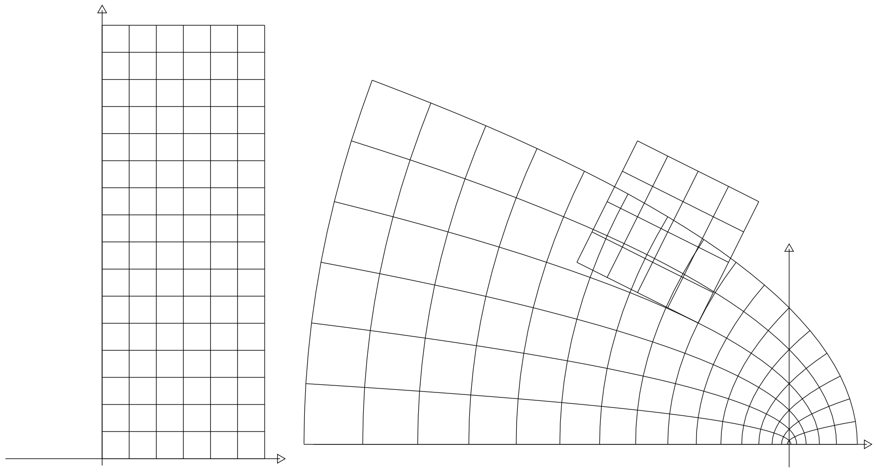


Bild unter $z \to z^2$, mit einer linearer Approximation

19 Eigenschaften stetiger Funktionen

$f : \mathcal{R}^d \to \mathcal{R}^d$ $Abstand(x, y) := |x - y| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$
f heißt stetig bei $a \in \mathcal{R}^d$ falls gilt: Jede gegen a konvergente Folge a_n hat als Bild eine gegen $f(a)$ konvergente Folge $f(a)$.

Bemerkung: Alle Funktionen f mit Dehnungschranke sind stetig.

Voraussetzung:

$|f(x) - f(y)| \leq L * |x - y|$
$a_n - a$ ist Nullfolge
Behauptung:

$$f(a_n) - f(a) \text{ ist Nullfoge}$$

Beweis:

$$|f(a_n) - f(a)| \leq L * |a_n - a| \Rightarrow \text{ Nullfolge } \surd$$

19.1 Die Komposition $f \circ g$ stetiger Funktionen ist stetig

Falls f_1 und f_2 stetig mit gleichem Def.-Bereich, dann ist auch $\alpha f_1 + \beta f_2$ stetig.
Sei $a_n - a$ Nullfoge
Behauptung:

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(a_n) - (\alpha f_1 + \beta f_2)(a) \text{ ist Nullfolge}$$

Nach Def.:

$$\begin{array}{ll} & \alpha * f_1(a_n) + \beta * f_2(a_n) - \alpha * f_1(a) - \beta * f_2(a) \\ = & \alpha * (f_1(a_n) - f_1(a) + \beta(f_2(a_n) - f_2(a))) \\ & \text{Nullfolgen nach Vor.:} \\ \Rightarrow & \text{Nullfolge} \end{array}$$

19.1.1 Produktregel

Voraussetzung: siehe Komposition
$a_n - a$ ist Nullfolge
Behauptung:

$$f_1 \cdot f_2 \text{ stetig}$$

Zz.: $(f_1 * f_2)(a_n) - (f_1 * f_2)(a)$ ist Nullfolge
Ziel:

$$\begin{array}{l} f_1(a_n) - f_1(a) \\ f_2(a_n) - f_2(a) \end{array} \text{ auftreten zu lassen}$$

$$\begin{array}{ll} \overset{Def.}{\to} & f_1(a_n) * f_2(a_n) - f_1(a) * f_2(a) \\ = & \underbrace{f_1(a_n)}_{\text{leider nicht konstant, aber (s.u.) beschränkt}} * \underbrace{(f_2(a_n) - f_2(a))}_{\underbrace{Versuch}_{Nullfolge}} + \underbrace{\underbrace{f_1(a_n) * f_2(a)}_{Korrektur} - f_1(a) * f_2(a)}_{\underbrace{(f_1(a_n) - f_1(a)) * f_2(a)}_{Nullfolge}} \end{array}$$

Weil $\{f_1(a_n)\}$ eine konvergente Folge ist, deshalb ist $f_1(a_n)$ beschränkt, also $|f_1(a_n)| \leq S$ unabhängig von n.

Stetige Funktionen verhalten sich auf manchen Teilmengen des Definitionsbereichs unerwartet gut.

Definition:
Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{R}^d$ heißt „abgeschlossen“ oder „vollständig“ in $\mathcal{R}^d$ falls jede Cauchyfoge $\{C_n\}, C_n \in A$ ihren Grenzwert C_∞ nicht nur in $\mathcal{R}^d$ hat, sondern sogar in A, $C_\infty \in A$
Beispiel:
Intervalle $A = \{x|1 \leq x \leq 10000\}$ sind abgeschlossen
Intervalle $A = \{x|1 < x < 10000\}$ nicht
Hauptsatz:
Eine Funktion f, die auf einer abgeschlossenen & beschränkten Menge A stetig ist, hat eine beschränkte Wertemenge $f(A)$.
$f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, 1]$ dem nur ein Punkt an der Abgeschlossenheit fehlt, nicht beschränkt.
$f(x) = x$ ist auf der abgeschlossenen unbeschränkten Menge $\mathcal{R}$ unbeschränkt.

A beschränkt in $\mathcal{R}$, d.h, es gibt S, so dass $A \subset [-S, S] = [a_1, b_1]$
Induktions-Anfang:
Angenommen f sei auf $A \cap [a_1, b_1]$ nicht beschränkt.
$test := \frac{a_1+b_1}{2}$
Induktions-Voraussetzung/Schritt:

Fallunterscheidung

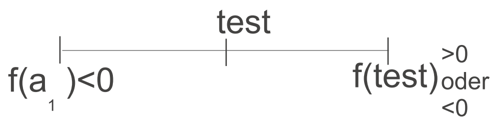
Entweder ist f auf $A \cap [a_1, test]$ oder auf $A \cap [test, b_1]$ nicht beschränkt
Wähle als $[a_2, b_2]$ die Hälfte, so dass f in $A \cap [a_2, b_2]$ unbeschränkt ist.
usw. d.h. durch wiederholen finden wir Intervalle
$[a_n, b_n]$ halb so lang wie $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ und f ist nicht beschränkt auf $A \cap [a_n, b_n]$
Wähle $c_n \in A \cap [a_n, b_n]$ mit $f(c_n) \geq n$
Wegen $c_n \in [a_n, b_n]$ ist c_n C.F., also konvergent, $\lim c_n (= c_\infty) \in A$. Nun ist f stetig in c_∞ also müßte gelten $f(c_\infty) = lim(f(c_n))$, aber $f(c_n)$ konvergiert nicht.

20 Vollständigkeit & Stetigkeit

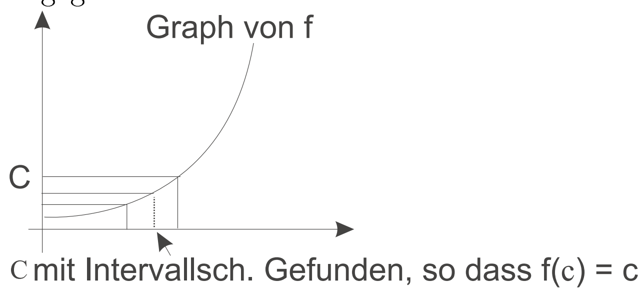
Zuerst einmal wollen wir uns noch einmal die Hauptstrategie unserer Beweismethode vor Augen führen!

20.1 Beweis durch Halbieren mit Fallunterscheidung - Wiederholung und Überblick

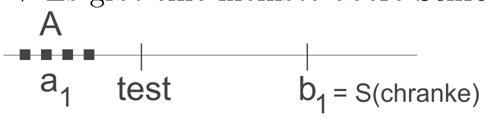
- Zwischenwertsatz: **Bild**
  $f(a_1) < 0 \quad f(b) > 0 \Rightarrow f(test) > 0$ oder < 0
  Diese Schachtelung findet die Nullstelle!



- Umkehrsatz:
  analog: Intervallschachtelung im Definitionsbereich mit Fallunterscheidung im Bildbereich. Die Schachtelung findet ein Urbild.
  C gegeben



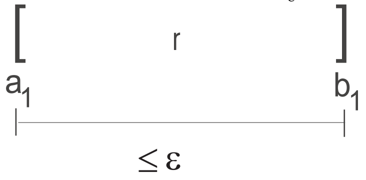
- $A \subset \mathcal{R}$ beschränkt
  $\Rightarrow$ Es gibt eine kleinste obere Schranke, genannt $sup(A)$



  Auch hier findet die Intervallschachtelung ohne indirekten Beweis die kleinste obere Schranke.

- Vollständigkeit
  Falls die Vollständigkeit mit Intervallschachtelung definiert wird, so gilt der Satz (die Intervallschachtelung findet den Grenzwert der Cauchyfolge):
  Jede Cauchyfolge konvergiert!
  (Gegeben eine Cauchyfolge $\{c_n\}$. Finde eine Intervallschachtelung $[a_n; b_n]$, so daß jedes Intervall $[a_n; b_n]$ unendlich viele Elemente der Cauchyfolge enthält.)
  Definition: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein m_ϵ^{CF}, so daß $m \geq m_\epsilon$ und $p > 0$
  $\Rightarrow |c_{m+p} - c_m| \leq \epsilon$

Warum konvergiert die Cauchyfolge gegen die von einer Intervallschachtelung gelieferte Zahl $r \in [a_n, b_n]$
Haben wir nun ein n_ϵ^{IS} und ein m_ϵ^{CF} gefunden, läßt sich sagen:



Im Intervall $r \in [a_{n_\epsilon^{IS}}, b_{n_\epsilon^{IS}}]$ (1) sind unendlich viele Elemente der Cauchyfolge, also insbesondere Intervall $c_{\tilde{m}} \in [a_{n_\epsilon}, b_{n_\epsilon}]$ mit $\tilde{m} \geq m_\epsilon^{CF}$ (2).
Aus (2) folgt:

$$|c_{\tilde{m}+p} - c_{\tilde{m}}| \leq \epsilon$$

Aus (1) folgt:

$$|c_{\tilde{m}+p} - r| \leq |c_{\tilde{m}+p} - c_{\tilde{m}}| + |c_{\tilde{m}} - r| \leq 2 * \epsilon$$

Resultat

$$m \geq m_\epsilon \Rightarrow |c_m - r| \leq 2 * \epsilon$$

20.2 Ausdehnung auf höhere Dimensionen

Voraussetzung
$A \subset \mathcal{R}^d$ ist abgeschlossen (=vollständig: jede Cauchyfolge konvergiert in A) und beschränkt.
A beschränkt in $\mathcal{R}^d$, d.h. es gibt eine Kugel $> A$ oder es sei ein Quader Q_1 mit $Q_1 \supset A$.
Vor. : $f: \quad A \subset \mathcal{R}^d \longrightarrow \mathcal{R}$ ist stetig.
Beh.: $f(A)$ ist beschränkt in $\mathcal{R}^e$

20.3 Indirekter Beweis

Angenommen f wäre in $A = A \cap Q_1$ nicht beschränkt. Dann führe dies zu einem Widerspruch!

Zerlege Q_1 in 2^d Teilquader mit halb so großen Kantenlängen. In min. einem Teilquadern gilt: f ist auf $A \cap$ Teilquader nicht beschränkt.
Wähle als Q_2 einen Teilquader, so dass f auf $A \cap Q_2$ unbeschränkt ist.
usw.

Resultat: Finde eine Quaderschachtelung $Q_n \subset Q_{n-1}$, so dass Kantenlänge$(Q_n)=\frac{1}{2}$ Kantenlänge(Q_{n-1}) und f ist auf $A \cap Q_n$ unbeschränkt.

Wähle

$$c_n \in A \cap Q_n \quad \text{mit} \quad f(c_n) \geq n \qquad (1)$$

$\{c_n\}$ ist Cauchyfolge und konvergiert gegen den Limespunkt der Quaderschachtelung $c_* = \lim c_* \in A$, da A abgeschlossen. Da aber f stetig ist, gilt:

$$\lim f(c_n) = f(c_n) \qquad (2)$$

(1) und (2) stehen aber im Widerspruch!

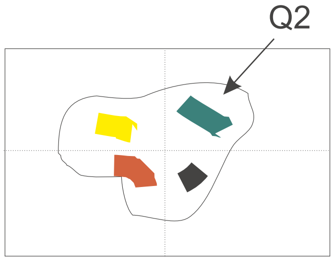
20.4 Verbesserung - Maximumsatz

Gleiche Voraussetzung
Behauptung: Es gibt einen Punkt $c_* \in A$ mit $|f(c_*)| \geq |f(a)| \forall\ a \in A$. Diese Behauptung nennt man den „Maximumsatz".

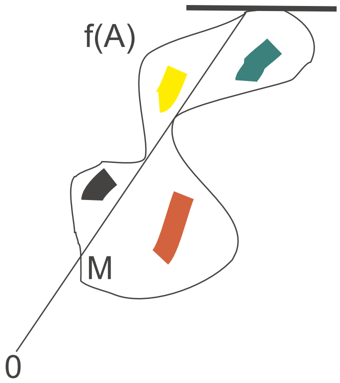
20.5 direkter Beweis

Eine Intervallschachtelung findet den Maximumpunkt!
$\emptyset \neq A \subset Q_1 \quad , \quad |f(A)|$ ist beschränkt (gerade bewiesen), also existiert $M = \sup(|f(A)|)$.

Zerlege Q_1 in 2^d Teilquader und wähle denjenigen als Q_2 für den gilt: $sup(|f(A \cap Q_2)|) = M$.



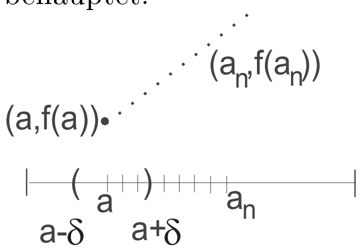
Q1 mit Teilquadern



usw.
Finde eine Quaderschachtelung Q_n mit $sup(f(A \cap Q_n)) = M$ Wähle $c_n \in A \cap Q_n$ und Cauchyfolge, Grenzwert $c_* \in A$. $|f(c_*)| \leq M$ ist klar.
Behauptung: $|f(c_*)| = M$ Wähle die C.F. $c_n \in A \cap Q_n$ etwas besser:
Wir wissen:
$sup(|f(A \cap Q_2)|) = M$ d.h. $M - \frac{1}{n}$ ist keine obere Schranke von $f(A \cap Q_n)$. D.h. $M - \frac{1}{n}$ wird übertroffen. Wähle daher $c_n \in A \cap Q_n$ mit

$$\underbrace{M - \frac{1}{n} \leq |f(c_n)|}_{M \leq \lim |f(c_n)| \leq M} \leq M$$

Damit sind alle wesentlichen Sätze über stetige Funktionen bewiesen, außer einem, der die Äquivalenz unserer Definition I mit der üblicheren Definition II behauptet.



Bisherige Definition:
Stetig: Für jedes $\{a_n\}$ mit $\lim a_n = a$ gilt $\lim(f(a_n)) = f(a)$

$$\text{1-dim.: } x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Äquivalente Eigenschaft und übliche Stetigkeitsdefinition II:
Zu jeder Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ gibt es einen Garantieindex $\delta > 0$, so dass

$$|x-a|_{\mathcal{R}^d} \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)|_{\mathcal{R}^e} \leq \epsilon$$

Aus der zweiten Eigenschaft folgt leicht die erste. Indirekter Beweis für die andere Richtung:
Angenommen die zweite Eigenschaft wäre nicht richtig: d.h. zu einer Fehlerschranke $\epsilon^* > 0$ finden wir kein Garantieintervall mehr.
Insbesondere ist weder $\delta_1 = \frac{1}{2}$, noch $\delta_2 = \frac{1}{4}, \dots$ noch $\delta_n = \frac{1}{2^n}$ usw. ein Garantieindex. d.h. zu jedem dieser Versuche gibt es einen Ausreißer:
$|a_n - a| \leq \delta_n$, aber $|f(a_n) - f(a)| > \epsilon_*$ Offensichtlich ist $\lim a_n = a, f$ stetig (1.Fassung) $\Rightarrow \lim(f(a_n)) = f(a)$ Widerspruch zu $|f(a_n) - f(a)| > \epsilon_*$

21 Symmetrische Matrizen, Eigenwerte, Eigenvektoren

$V, \langle , \rangle$ $\qquad Hom(V,R) =: V^*$ (Dachraum zu V)
$V \overset{bijektiv}{\longrightarrow} Hom(V,R) =: V^*$
$a \rightarrow l_a \qquad l_a(v) := \langle a, v \rangle$
Umkehrung: $0 \neq l \in V^d$ gegeben, $U = Kern(l)$ hat Kodimension 1.
bestimme $a \perp U$, so dass $\underbrace{l(a)}$ bekannt $= \langle a, a \rangle$ Gleichung für die Länge von a

Wozu ist das nützlich?
Wir wollen an der Ebene (Unterraum) $\perp$. einen Einheitsvektor $a \in V$ „spieglen".

$$\left.\begin{array}{lll} Sp(x) \in V = x - 2* & \langle a, x \rangle * a \\ x \in U \text{ oder } x \perp a & \Rightarrow Sp(x) = x \\ x = a & \Rightarrow Sp(a) = -a \end{array}\right\} \text{Spiegelung beschrieben ohne Basen oder Matrizen zu benötigen}$$

a)
$V, \langle , \rangle$ ON-Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$
$l \in V^*$ gegeben, wie? $l(e_j) = \lambda_j \; j = 1, \ldots, d$ hierdurch ist l bestimmt!

$$x \in V \rightsquigarrow x = \sum \underbrace{x_j}_{\langle x, e_j \rangle} e_j \Rightarrow l(x) = l(\sum x_j e_j) = \sum x_j \lambda_j = \langle x, \sum \lambda_j e_j \rangle$$

$$= \langle x, a \rangle, a = \sum_j l(e_j) * e_j$$

b)
$\{v_1, \ldots, v_d\}$ sei keine ON-Bais, aber eine Basis.
$l \in V^*$ kann gegeben werden durch $l(v_j) = \lambda_j \; j = 1, \ldots, d$ wie eben.
$x \in V, x = \sum x_j v_j$, diese x_j müssen durch Lösen eines Gleichungssystems bestimmt werden.
Was ist mit $U = Kern(l)$

$$l(\underbrace{\lambda_i v_j - \lambda_j v_i}_{\in Kern(l)}) \text{ (nur für } \lambda_i, \lambda_j \neq 0 \text{ dann } \lambda_i = 0 \Rightarrow V_j \in Kern(l))$$

Auf diese Weise kann man leicht eine Basis $w_1, \ldots, w_{d-1}$ von U finden.
Wie findet man einen letzten Basisvektor $w_d \perp U$? (Danach muß nur noch die Länge von w_d richtig gewählt werden: $l(w_d) = \langle w_d, w_d \rangle$)
$\langle w_d, w_j \rangle = 0 \; j = 1, \ldots, d-1$ (w_j schon bekannt)
sind $(d-1)$ zu lösende Gleichungen

21.0.1 Beispiel in $\mathcal{R}^3$

$\mathcal{R}^3, \langle , \rangle := \frac{1}{3} * Standardskalarprodukt \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Einheitsvektor mit Länge 1

Definiere l durch:

$$l \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0, \; l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \; l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Wie repräsentiert man l?

$$\underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle}_{2} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ zwei zueinander senkrechte Vektoren im Kern

$$\forall a : \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{3}(1 + a + 1) \overset{a=-2}{=} 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp Kern(l)$$

3 paarweise senkrechte Vektoren in $\mathcal{R}^3$, zwei davon im Kern von l

Wie groß ist l von $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

$l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$ gegeben

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & = \frac{1}{3}(2* & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ l: & 4 & & 0 & & 12 & \Rightarrow \text{ also } l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \end{array}$$

So, jetzt muß nur noch das $\frac{1}{3}$ vor dem Standardskalarprodukt weg.
$\langle , \rangle$ sei jetzt wieder Standardskalarprodukt

$$l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 6$$

$$l \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{gesuchte Vektor}}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 12$$

Wir kommen zurück zu der Frage: Wie verschieden sind zwei Skalarprodukte auf U?

1. $\langle , \rangle$ 2. $\langle\langle , \rangle\rangle$

Wähle v fest, dann ist $l_v(w) := \langle\langle v, w \rangle\rangle, l_v \in V^*$
daher gibt es ein $a(v)$, so dass $l_v(w) = \langle a(v), w \rangle$ (eben bewiesen)

zusammengefaßt: $\langle a(v), w\rangle = \langle\langle v, w\rangle\rangle$
Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\langle a(r*v), w\rangle &= \langle\langle r*v, w\rangle && |\text{Def. von a und Linearität von } \langle\langle,\rangle\rangle \\
&= r*\langle\langle v, w\rangle\rangle \\
&= r*\langle a(v), w\rangle && |\text{Def. von a } \langle,\rangle \\
&= \langle r*a(v), w\rangle \\
&\Rightarrow a(r*v) = r*a(v)
\end{aligned}$$

Analog für die Addition $a(v_1+v_2) = a(v_1)+a(v_2)$
d.h. $v \to a(v)$ ist linear
Damit können wir zwei Skalarprodukte mit Hilfe eines Endomorphismus vergleichen. Genauer:

$$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \langle A*v, w\rangle \text{ mit } A \in Hom(V,V) = End(V)$$

$$\underbrace{\langle A*v, w\rangle = \langle\langle v, w\rangle\rangle = \langle\langle w, v\rangle\rangle\langle A*w, v\rangle}_{\langle A*v,w\rangle \overset{\checkmark}{=} \langle A*w,v\rangle} \text{ Symmetrie des Skalarproduktes}$$

$$\langle\langle w, v\rangle\rangle \overset{Def.}{=} \langle A*w, v\rangle = \langle v, A*w\rangle$$ Solche Endomorphismen heißen symmetrisch oder selbstadjungiert.

Warum ist diese Eigenschaft angenehm?
Zur Berechnung einer Matrix (A) für die lin. Abb. A verwenden wir eine ON-Basis $\{e_1, \ldots, e_d\}$

$$(A) = \langle Ae_j, e_k\rangle_{j,k=1,\ldots,h} \overset{Sym.}{=} \langle e_j, A*e_k\rangle$$ d.h. die Matrix ist symmetrisch!

21.0.2 Eigenwerte & Eigenvektoren

Satz:
Gegeben $v, \langle,\rangle$ und $A \in End(V)$ symmetrisch $(A \in Sym(V))$

$$\langle A*v, w\rangle \underbrace{=}_{\Leftrightarrow \text{ symmetrisch}} \langle v, A*w\rangle$$

Behauptung:
Es gibt eine ON-Basis $\{f_1, \ldots, f_d\}$, so dass die Matrix (A) extrem einfach wird.
D.h. $A*f_j = \lambda_j * f_j (j = 1, \ldots, d)$
λ_j heißen „Eigenwerte“ von A
f_j heißen „Eigenvektoren“ von A

$$(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_d \end{pmatrix}$$ „Normalform für A“, Matrix bezüglich der Basis $\{f_1, \dots, f_d\}$

„Alle symmetrischen Endomorphismen sind diagonalisierbar!“
Anwendung auf Skalarprodukte $\langle v, w\rangle$ und $\langle\langle v, w\rangle\rangle = \langle A * v, w\rangle$
Schreibe: $v = \sum x_j f_j$ $\qquad w = \sum y_k f_k$

$$\langle v, w\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$$

$$\langle\langle v, w\rangle\rangle = \langle \sum x_j \underbrace{Af_j}_{\lambda_j f_j}, \sum y_k * f_k\rangle = \sum \lambda_j x_j y_j$$

In dieser Anwendung sind die $\lambda_j > 0$.
Beispiel in $\mathcal{R}^3$ bei einfachen Basen reicht es einfach die Einheiten auf den Achsen zu verändern, um zwischen den Skalarprodukten zu wechseln.

21.0.3 Invariant & orthogonales Komplement

Ein Unterraum $U \subset V$ heißt A invariant, falls $A * U \subset U$
Beispiel: Falls $\{v_1, \dots v_k\}$ Eigenvektoren sind, so ist $U = span(v_1, \dots, v_k)$ invarianter Unterraum.
Zu jedem Unterraum U heißt die Menge $U^\perp = \{v \in V; \langle v, u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ orthogonales Komplement von U.
Behauptung:
$U^\perp$ ist ein Unterraum $\surd$ (durch Hinsehen und Linearität von $v \leftarrow \langle v, u\rangle$)
Satz:
Das orthogonale Komplement eines A invarianten Unterraums ist wieder A-variant.

$$A * U^\perp \subset U^\perp$$

Beweis:

$$A * U^\perp = A * \{v; \langle v, u\rangle = 0 \text{ alle } u\} = \{A * v; \langle v, u\rangle = 0 \text{ alle } u\} \subset U^\perp?$$

Ist $\langle A * v, u\rangle = 0$ für alle u?
mit Symmetrie von A $\Rightarrow$
$\langle v, A * u\rangle \underbrace{=}_{AU \subset U} \langle v, u_1\rangle \underbrace{=}_{\text{wg. } u_1 \in U} 0$

$\Rightarrow A * v \in U^{\perp}$
Angenommen, man könnte zu jedem symmetrischem Endomorphismus wenigstens einen Eigenvektor finden, dann ist der Satz bewiesen: $dimV = 1$ trivial.
Ind.-Vor.: In $(d-1) - dim$ Unterräumen können wir solche Basen finden.
Nun sei $V, d - dim$ gegeben. Wir können mindestens einen Eigenvektor f_d finden.

$$A(\mathcal{R} \cdot f_d)_{inv.} \subset \mathcal{R} \cdot f_d$$

$U := (\mathcal{R} * f_d)^{\perp}$ ist ein (d-1)-dim invarianter Unterraum. Dort kann man $\{f_1, \ldots, f_{d-1}\}$ nach Ind.-Vor. finden

Damit ist die diagonalisiernde Basis aus Eigenvektoren gefunden.
Es belibt zu zeigen: Jeder symmetrische Endomorphismus besitzt immer mindestens einen Eigenvektor.
(Für die Logik der Argumentation vergleiche: Wenn wir zeigen können, dass jdes komplexe Polynom P mindestens eine Nullstelle c_1 hat, dann folgt, dass P in Linearfaktoren zerfällt, dann schreibe erst $P(X) = (X - c_1) * P_1(X)$ und benutze deann die Voraussetzung, um wenigstens eine Nullstelle von P_1 zu finden.)

21.1 Wiederholung & Symmetrische Endomorphismen

$L \in Hom(V,V) = End(V)$
Besitzen Endomorphismen Eigenvektoren ?

Definition:
$0 \neq v \in V$ heißt Eigenvektor von L falls $L(v) = \lambda * v$ mit λ als Eigenwert

21.1.1 Warum sind Eigenvektoren wichtig?

Angenommen, Sie hätten eine Basis aus Eigenvektoren $F := \{f_1, \ldots f_d\}$ $L(f_j) = \lambda_j f_j$ dann wird die Matrix besonders einfach:
Hier einige Beispiele:

$$\Big(L\Big)_F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}; \Big(L\Big)_F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_d} \end{pmatrix}; \Big(L\Big)_F^{2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Big(\frac{1}{k!}L^k\Big)_F = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_d^k}{k!} \end{pmatrix}; \Big(\exp(L)\Big)_F = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$$

Für symmetrische ($\langle A * v, w \rangle = \langle v, A * w \rangle$) Endomorphismen $A \in End(V), V_{\langle , \rangle}$ kann man immer eine Basis aus paarweise orthogonalen Eigenvektoren finden.

(Bei Verwendung einer ON-Basis F ist $(A)_F$ symmetrisch $\langle A * f_j, f_k\rangle = a_{kj} = \langle f_j, A * f_k\rangle = a_{jk}$)
Behauptung:
$\lambda \neq \mu$ seien verschiedene Eigenwerte und $A * v = \lambda * v, A * w = \mu * w$ dann gilt $\langle v, w\rangle = 0$ (d.h. es gibt höchstens d verschiedene Eigenwerte).
Beweis:

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle A * v, w\rangle \overset{sym.}{=} \langle v, A * w\rangle = \mu\langle v, w\rangle \to \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} * \langle v, w\rangle = 0$$

Behauptung:
Die Menge der $\lambda-$Eigenvektoren bildet einen <u>Unter</u>raum.
Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} A * v = \lambda * v \\ A * w = \lambda * w \end{array}\right\} \text{Voraussetzung}$$

Zz.:

$$\begin{array}{llcl} i) & A(v + w) & = & \lambda(v + w) \\ ii) & A(r * v) & = & \lambda(r * v) \end{array}$$

Warum genügt es, diese zwei Eigenschaften zu beweisen?
Vektorraumaxiome:
$v + w = w + v$ da Unterraum von V $\surd$
$v + 0 = v$ folgt aus ii) wenn $r = 0$ $\surd$
$v + (-v) = 0$ folgt aus ii) wenn $r = -1$ $\surd$
$u + (v + w) = (u + v) + w$ da Unterraum von V $\surd$
$r * (v + w) = rv + rw$ da Unterraum von V $\surd$
$(r + s * v = rv + sv$ da Unterraum von V $\surd$
Somit reicht es i) und ii) zu zeigen da damit automatisch alle Axiome erfüllt sind!

genannt $\lambda-$Eigenraum
U Unterraum: $U^\perp := \{v \in V; \langle v, u\rangle = 0 \forall\ u \in U\}$
A-invarianter Unterraum U
Definition.: $A * U \subset U$ (z.B. der Spann von Eigenvektoren)
Satz:

$$AU \subset U \Rightarrow A * U^\perp \subset U^\perp$$

Das orthogonale Komplement $U^\perp$ eines invarianten Unterraum U ist ebenfalls invariant. Unterraum U ist ebenfalls invariant $A * U^\perp \subset U^\perp$
Induktionsplan für die Konstruktion einer Basis aus Eigenvektoren:
Hilfssatz: Jeder symmetrische Endomorphismus besitzt mind. einen Eigenvektor.
Ind.-Anf.: Im Falle $d = 1$ ist jeder Vektor Eigenvektor $\surd$

Ind.-Vor.: In $d_* - 1$-dim Vektorräumen besitzt jeder sym. Endomorohismus eine Basis aus orthogonalen Eigenvektoren.
Ind.-Schritt:
Gegeben: $A : V^{d_*} \to V^{d_*}$ symmetrisch. Finde die Basis aus Eigenvektoren.
Hilfssatz besagt: Es gibt einen Eigenvektor $v_1 \in V, A * v_1 = \lambda_1 * v_1$
Beweis: $U = \mathcal{R} * v_1$ ist ein invarianter Unterraum daher ist auch $U^\perp$ invarianter Unterraum, also $A : U^\perp \to U^\perp$ symmetrisch der Dimension $d_* - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $A : U^\perp \to U^\perp$ eine Eigenbasis $f_2, \ldots, f_d \in U^\perp$, $A * f_j = \lambda_j f_j \; j, \ldots, d$
Damit ist $v_1, f_2, \ldots, f_d$ die gesuchte Basis.
Der Beweis wird auf Eigenschaften der Funktion $x \in V \; h(x) := \langle A{*}x, x\rangle$ beruhen.

Warum sind die linearen Abbildungen der Lin. Algebra stetig im Sinne der Analysis?
Wir zeigen dehnungsbeschränkt:
$L : V_{\langle,\rangle} \to W_{\langle\langle,\rangle\rangle} \; ||L(v_1) = L(v_2)||_w \stackrel{?}{\leq} |v_1 - v_2|$
$||L(v_1) = L(v_2)||_w = ||L(\underbrace{v_1 - v_2}_{v})||_w$
Gilt: $||L * v||_w \leq C * |w|_v$?
$||L * v||_w \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{dim(w)} |z_k|^2 |v|}$
Verwende ON-Basen:

$$\Big(L\Big) = \underbrace{(S_1, \ldots, S_{dim(V)})}_{\text{Spaltenvektoren}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{dim(w)} \end{pmatrix} \text{Zeilenvektoren}$$

$$L(v) = \Big(L\Big) * (v) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{dim(w)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{dim(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle z_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle z_{dim(w)}, v\rangle \end{pmatrix}$$

$$||L * v||_w^2 = \sum_{k=1}^{dim(w)} \langle z_k, v\rangle^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{dim(w)} |z_k|^2\right) * |v|^2$$

$\langle z_k, v\rangle^2 \leq |z_k|^2 * |v|$

$$\left.\begin{array}{ll} V_{\langle,\rangle} & V = \sum x_j e_j \\ \{e_1, \ldots, e_d\} \text{ ON-Basis} & \end{array}\right\} |v|^2 = \langle w, v\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 = |x_s|^2$$

$L : V^d \to W^D$
E sei Basis von V mit $\{e_1, \ldots, e_d\}$; F sein Basis von W mit $\{f_1, \ldots, f_D\}$

$$\Big(L\Big)_{E,F} : L_{e_j} = \sum_{k=1}^{D} a_{kj} f_k \begin{pmatrix} j=1 & j=2 & \dots & j=d \\ k=1 & & & \\ \vdots & & a_{kj} & \\ k=D & & & \end{pmatrix}$$

$v = \sum x_j e_j$

$$(v)_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}; \Big(L * v\Big)_F = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_D \end{pmatrix}; ||L * v||^2 = \sum_{k=1}^{D} y_k^2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{kj} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots z_1 \dots \\ \vdots \\ \dots z_D \dots \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle z_1, x_s \rangle \\ \vdots \\ \langle z_D, x_s \rangle \end{pmatrix}$$

$$x_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

z_k sind die Zeilenvektoren $a_{k1}, \dots, a_{kd}$ der Matrix $\Big(a_{kj}\Big)$ von L

$$\Rightarrow ||L * v||^2 = \sum_{k=1}^{D} y_k^2 = \sum_{k=1}^{D} \underbrace{\langle z_k, x_s \rangle^2}_{\leq |z_k|^2 * |x_s|^2} \leq \left(\sum_{k=1}^{D} |z_k|^2\right) * |v|^2$$

Warum ist h stetig?
$h(x+v) - h(x)$
Ziel: $|v|$ klein $\Rightarrow |h(x+v) - h(x)|$ klein

$$\begin{aligned} h(x+v) - h(x) &= \langle A * (x+v), x+v \rangle - \langle A * x, x \rangle \\ &= \langle A * x, x \rangle + \langle A * v, x \rangle + \langle A * x, v \rangle + \langle A * v, v \rangle - \langle A * x, x \rangle \\ &= 2\langle A * x, v \rangle + \langle A * v, v \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |h(x+v) - h(x)| &\leq 2|\langle A * x, v \rangle| + |\langle A * v, v \rangle| \\ &\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2 * \underbrace{|A * x|}_{\leq C * |x|} * |v| + \underbrace{|A * v|}_{\leq C * |v|} * |v| \\ &\leq 2 * C(|x| + |v|) * |v| \qquad | \text{ mit } |v| \leq 1 \\ &\leq \underbrace{2 * C * (|x| + 1) * |v|}_{\text{Dehnungschranke für h bei x}} \end{aligned}$$

Als nächstes: Die Funktion h hat auf der Einheitskugel $Ball_{r=1} = \{v \in V; |v| \leq 1\}$ ein Maximum.
Dazu ist zu zeigen: Die Einheitskugel ist sowieso beschränkt, aber auch abgeschlossenen.
Zz.: Sei $\{a_n\}$ Cauchy-Folge im $Ball_{r=1}$, dann gilt für den Grenzwert $a = lim a_n \in Ball$
$\{a_n\}$ Cauchy-Folge im $Ball_{r=1} \Rightarrow |a_n| \leq 1 \Rightarrow |lim a_n| \leq 1$, alos in der Tat $a \in Ball$
Analog läßt sich der Beweis führen wenn es sich nicht um den Ball sondern die Einheitssphäre handelt:
Funktion h hat auf der Einheitssphäre $Einheitssphäre_{r=1} = \{v \in V; |v| = 1\}$ ein Maximum.
Dazu ist zu zeigen: Die Einheitssphäre ist sowieso beschränkt, aber auch abgeschlossenen.
Zz.: Sei $\{a_n\}$ Cauchy-Folge im $Ball_{r=1}$, dann gilt für den Grenzwert $a = lim a_n \in Einheitssphäre$
$\{a_n\}$ Cauchy-Folge im $Ball_{r=1} \Rightarrow |a_n| = 1 \Rightarrow |lim a_n| = 1$, alos in der Tat $a \in Einheitssphäre$
Die Funktion h nimmt z.B.: bei $x = x_*$ in der Einheitssphäre ihr Maximum an.
Behauptung:

$$A * x_* = \lambda * x_* \text{ also der gesuchte Eigenvektor}$$

$v \perp x_*$
Kreis: $x(\varphi) = x_* * \cos(\varphi) + v * \sin(\varphi)$
bekannt: $h(x(\varphi)) \leq h(x(0))$

$$h(x(\varphi)) = \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\text{bei 0 Abl. 0}} *h(x_*) + \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{\text{bei 0 Abl. 0}} *h(v) + \underbrace{2 * \cos(\varphi * \sin(\varphi))}_{\text{Abl.} \neq 0} * \langle A * x_*, v\rangle$$

Da $2 * \cos(\varphi * \sin(\varphi))$ Abl. $\neq 0$, wechselt bei 0 das Vorzeichen $\Rightarrow \langle A * x_*, v\rangle = 0$
$\Rightarrow A * x_* \perp v$, senkrecht zu x_* sind.
Daher ist $A * x_*$ proportional zu x_*

21.2 Anwendung von Symmetrischen Endomorphismen

- Das wichtigste: Sehen lernen, wo man Linear-Kombinationen nutzen kann.
- Wichtigste Argumentation: Mit linear abhängig & linear unabhängig umgehen können.
- Wichtigeste Fakten:
  - Lösen von linearen Gleichungssystemen oder

  - Finden von Linearkombinationen oder
  - Urbilder $L^{-1}(w)$ unter lin. Abbbildungen
    $\rightsquigarrow$ Gaußelimination

- Anschaulicher Teil: Skalarprodukte

$A \in End(V)$
Voraussetzung:
$A * f_j = \lambda_j * f_j$ mit $j = 1, \ldots, k$ $(f_j \neq 0)$ $\lambda_j \neq \lambda_i$
Behauptung:

Die $f_1, \ldots, f_k$ sind linear unabhängig

Betrachte:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j$$

Zeige alle $a_j = 0$

Beispiel mit 2 Vektoren $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\qquad A * f_j = \lambda_j * f_j$
$a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0$

$$(A - \lambda_1 * id) * (a_1 f_1 + a_2 f_2) = 0$$
$$a_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_1)}_{=0} f_1 + a_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1) * f_2}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow a_2 = 0$

Entweder durch Induktion (k=1 schon erledigt)
Angenommen $k-1$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten seien schon als lin. unabh. bekannt.
Ind.-Schritt: Wende $(A - \lambda_1 id)$ auf Lin.-Kombination an:

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_1) * f_1 + \underbrace{\sum_{j=2}^{k} a_j(\lambda_j - \lambda_1) * f_j}_{\text{Nach Ind.-Vor.: } \Rightarrow\ a_j * \underbrace{(\lambda_j - \lambda_1)}_{\neq 0} = 0}$$

Oder Multipliziere die Linearkombination z.B. mit $(A-\lambda_2 id)\circ(A-\lambda_3 id)\circ\ldots\circ(A-\lambda_k id)$ läßt nur übrig

$$a_1\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)*(\lambda_1-\lambda_3)*\ldots*(\lambda_1-\lambda_k)}_{\neq 0}*f_1$$

$\Rightarrow a_1=0$
Wiederholung für die anderen Koeffizienten.

21.2.1 Symmetrische Endomorphismen

Satz über Symmetrische Endomorphosmen (gegeb. $V,_{\langle,\rangle}, A\in End(V)$)
Symmetrische Endomorphismen besitzen eine ON-Basis aus Eigenvektoren
$Dim=2$, bezgl. einer Basis:
$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda*\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}*\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}=0$$

$$Rang\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}<2\Leftrightarrow\exists\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\neq 0 \text{ im Kern der lin. Abb.}$$

$$\begin{array}{cc|l} a_{11}-\lambda & a_{12} & \text{Subtrahiere von 2. Z. } \frac{a_{21}}{a_{11}-\lambda}*\text{ erste Zeile}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \\ \hline 0 & (a_{22}-\lambda-a_{12}*\frac{a_{21}}{a_{11}-\lambda}) & =0\Leftrightarrow \text{ Rang } <2\end{array}$$

Falls die quadratische Gleichung $(a_{11}-\lambda)*(a_{22}-\lambda)-a_{12}*a_{21}=0^\sharp$ erfüllt ist, so ist der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12}\\ a_21 & (a_{22}-\lambda)\end{pmatrix}$ kleiner als 2, d.h. man findet zu diesem λ Eigenvektoren!
Bemerkung:
Es gibt quadratische Gleichungen ohne (reelle) Nullstellen $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$: $90^\circ-$ Drehung $\rightsquigarrow(-\lambda)^2-(-1)(+1)=\lambda^2+1>0$

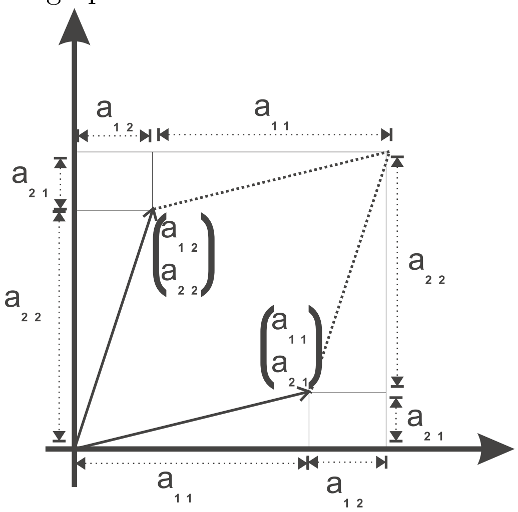
21.2.2 Höherdimensionale Diskussion

Das wichtigste nicht behandelte Thema ist die höherdimensionale Diskussion von dem, was für $u=2$ gemacht wurde. Was soll $\sharp$ ersetzen?

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\overset{det}{\rightsquigarrow} a_{11}*a_{22}-a_{12}*a_{21} \text{ war wesentlich für die 2-dim Diskussion}$$

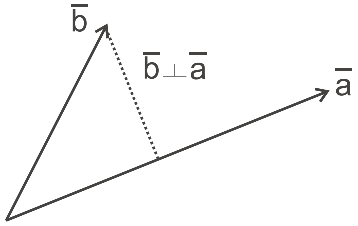
Frage: Was wird bei $n > 2$ hieraus?

Interpretation: Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.



Fläche (Parallelogramm) $= (a_{11}+a_{12})*(a_{22}+a_{21}) - a_{11}*a_{21} - 2a_{12}*a_{21} - a_{12}*a_{22} = 2a_{11}*a_{22} - a_{12}*a_{21}$

Dasselbe noch einmal mit Skalarprodukten:



$$b^{\perp} := b - \underbrace{x}_{\frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle}} * a \quad \underbrace{\perp}_{\text{wähle x so}} \quad a$$

$\langle b - x * a, a\rangle = 0$
$\langle b, a\rangle - a * \langle a, a\rangle = 0$
Fläche^2 des Parallelogramms

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 * |\vec{b}^{\perp}|^2 &= \langle a,a\rangle * \langle b^{\perp}, b^{\perp}\rangle \\ &= \langle a,a\rangle * \left\langle b - \frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle} * a, b - \frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle} * a \right\rangle \\ &= \langle a,a\rangle * \left(\langle b,b\rangle - \frac{\langle b,a\rangle^2}{\langle a,a\rangle} \right) \end{aligned}$$

$$F^2 = \langle a,a\rangle * \langle b,b\rangle - \langle a,b\rangle^2$$

Vergleich:

$$\begin{array}{rll} + \ \langle a,a\rangle * \langle b,b\rangle & = & (a_{11}^2 + a_{21}^2) * (a_{12}^2 + a_{22}^2) \\ - \ \langle a,b\rangle^2 & = & (a_{11}a_{21})^2 + (a_{21} + a_{22})^2 \\ \hline F^2 & = & (a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}) \end{array}$$

Vergleich

$A : V,_{\langle,\rangle}$ auf sich selbst $E = \{e_1, \ldots, e_d\}$ ON-Basis aber A hat keine übersichtliche Matrix in der Basis E	$F = \{f_1, \ldots, f_d\}$ ON-Basis aus Eigenvektoren zu A. Daher ist die Matrix sehr einfach: $\Big(A\Big)_F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$

Warum Basiswechsel?

$\Big(A\Big)_E$ unübersichtlich $\Big(A^{-1}\Big)_E$ erfordert Arbeit	$\Big(A\Big)_F$ übersichtlich $\Big(A^{-1}\Big)_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_d} \end{pmatrix}$

Beim Lösen von einfachen Differentialgleichungen möchte man die Exponentialreihe exp auf Matrizen anwenden.

$\Big(\exp A\Big)_E = \exp \Big(A\Big)_E$ erfordert sehr viel Arbeit	$\Big(\exp A\Big)_F = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}$

Definiere eine lineare Abbildung $S : V \to V$ durch $S * e_j = f_j \qquad j = 1, \ldots, d$

$$S^{-1}AS : e_j \to f_j \to \lambda_j f_j \to \lambda_j e_j$$

$$(S^{-1}AS)_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

$$(S^{-1}AS)_E = (S^{-1}) * (A)_E * (S)_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} = (A)_F$$

$$(A)_E = (S)_F * \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} * (S^{-1})_E$$

Erinnerung: Weil E und F ON-Basen sind ist S eine „orthogonale" lineare Abbildung und $(S^{-1})_E$ entsteht aus $(S)_E$ durch Spiegeln an der Hauptdiagonalen. S orthogonal $\Leftrightarrow$ $(S)_E$ als Spaltenvektoren paarweise orth. Einheitsvektoren hat

$$\begin{pmatrix} --- & s_1 \\ --- & s_2 \\ \vdots & \\ --- & s_d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & \cdots & | \\ | & | & & | \\ s_1 & s_2 & & s_d \end{pmatrix} = \Big(\langle s_k, s_j\rangle\Big) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big(A^{-1}\Big)_E = \Big(S\Big)_E * \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_d} \end{pmatrix} * \underbrace{\Big(S^{-1}\Big)_E \text{ Warum? } \Big(S\Big)_E}_{id} * \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}}_{id} * \Big(S^{-1}\Big)_E}_{id}$$

$$\Big(id\Big)_E = \Big(A^{-1} * A\Big)_E$$

Dasselbe gilt für die Exponentialreihe

$$\Big(A^2\Big)_E = \Big(A\Big)_E * \Big(A\Big)_E = \Big(S\Big)_E * \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d^2 \end{pmatrix} * \Big(S^{-1}\Big)_E$$

$$\sum_k | \Big(\frac{1}{k!}A^k\Big)_E = \frac{1}{k!}\Big(A^k\Big)_E ? \Big(S\Big)_E * \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\lambda_d}{k!} \end{pmatrix} * \Big(S^{-1}\Big)_E$$

$$\Big(\exp A\Big)_E = \exp\Big(\Big(A\Big)_E\Big) = \Big(S\Big) * \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_d} \end{pmatrix} * \Big(S^{-1}\Big)_E$$

Schlußwort
In jeder Gruppe G (eben die Gruppe der invertierbaren End.) ist die Abb. K_g : $h \to g * h * g^2$ „Konjugation mit g" das wesentliche Werkzeug zum Vereinfachen.

22 Stammfunktionen, Riemannsummen und Integrale

22.1 Stammfunktionen

Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, falls gilt:

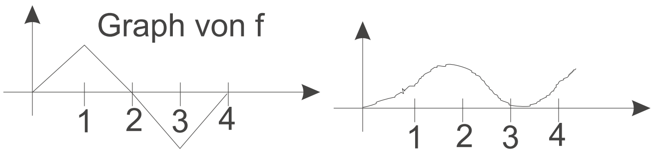
$$F' = f$$

Dies ist für Abbildungen $F : I(ntervall) \longrightarrow \mathcal{R}^d$

$$F' = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Dies läßt sich auch auf $\mathcal{C}$ übertragen. Z.B.:

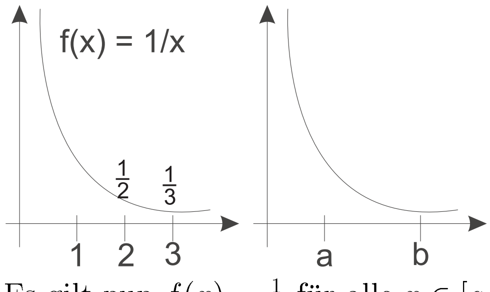
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \longrightarrow \quad F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k * \frac{z^{k+1}}{k+1}$$



22.2 Summen von Stammfunktionen

Ein Beispiel für Summen von Stammfunktionen ist $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$



Es gilt nun $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \leq & \quad \frac{1}{x} & \leq \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{b}\right) \leq & \quad \log'(x) & \leq \left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Nach dem Monotnoiesatz gilt nun (auch für $x = b$:

$$\frac{x-a}{b} \le \log(x) - \log(a) \le \frac{x-a}{a}$$

Betrachtet man dies speziel für $a = k, b = k+1$, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{k+1} \le \log k + q - \log k \le \frac{1}{k}$$

Summiert man dies nun auf, dann ergibt sich (Teleskopsumme):

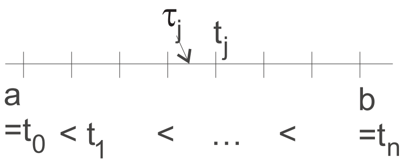
$$\sum_{k=1} n \frac{1}{k+1} \le \log n + 1 - \underbrace{\log 1}_{=0} \le \sum_{k=1} n \frac{1}{k}$$

Bemerke:
S_n wächst unbeschränkt, obwohl $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ eine Nullfolge ist.

22.3 Riemannsummen

22.3.1 Definition der Riemannsummen (von Funktionen f)

Definitionsbereich von f:

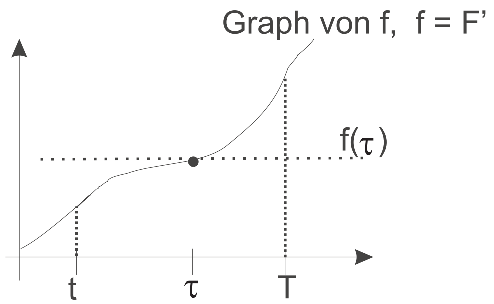


Es gilt: $f_{j-1} < t_j$. Dies nennt man die Einteilung $\mathcal{T}$ des Intervalls $[a, b]$. Die Zwischenstellen heißen τ. Es gilt $\tau_j \in [t_{j-1}, t_f]$. Man nennt nun die Riemannsumme:

$$RS_{\mathcal{T},\tau}(f)_a^b := RS(f) := \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) * (t_j - t_{j-1})$$

Wichtig bei der Betrachtung von Riemannsummen ist es wichtig, wie aus der 1. Notation ersichtlich, daß ein Intervall und die Feinheit (s.u.) mit angegeben wird.

22.3.2 Riemannsummen und Stammfunktionen



Es sei $x \in [t, T]$:
$f(x) = T'(x)$
$f(\tau) = T'(x)$

Es gilt:

$$F'(x) - T'(x) \leq C$$

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen Riemannsummen und Stammfunktionen für Dehnungsschranken diskutieren.

$$|f(y) - f(x) \leq L * |y - x| \qquad (1)$$
$$-L * (T - t) \leq F'(x) - T'(x) = f(x) - f(\tau) \leq L * (x - \tau) \leq L * (T - t)$$

Mit (1):

$$t \leq x, g'(x) \leq h'(x)$$
$$\Rightarrow g(x) - g(t) \leq h(x) - h(t)$$

folgt aus dem Monotoniesatz:

$$(-L * (T - t))(x - t) \leq F(x) - T(x) - \underbrace{f(\tau)(x - t)}_{T(x) - T(t)} \leq (L * (T - t))(x - t)$$

Speziell:
für $T = t_j, t = t_{j-1}, \tau = \tau_j, x = t_j$ gilt:

$$-L*(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j-1}) \leq F(t_j)-F(t_{j-1})-f(T_j)(t_j-t_{j-1}) \leq L*(t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j-1})$$

22.3.3 Feinheit

Definition:
Die Feinheit $\delta_{\mathcal{T}}$ einer Einteilung, hat die Länge des größten Teilintervalls also:

$$\delta_{\mathcal{T}} := max\, \{|t_j - t_{j-1}|; j = 1 \ldots n\}$$

Es ergibt sich für unsere Ungleichung:

$$-L * (t_j - t_{j-1}) * \delta_{\mathcal{T}} \leq F(t_j) - F(t_{j-1}) - f(T_j)(t_j - t_{j-1}) \leq L * (t_j - t_{j-1}) * \delta_{\mathcal{T}}$$

Für die Riemannsumme ergibt sich damit:

$$\sum_{j=1}^{n}: \quad -L * (b - a) * *\delta_{\mathcal{T}} \leq F(b) - F(a) - RS(f) \leq L * (b - a) * *\delta_{\mathcal{T}}$$

Hierbei gilt:

$$RS(f)^{=} f(T_j)(t_j - t_{j-1})$$

D.h. alle Riemannsummen sind nur ,,wenige" von $F(b) - F(a)$ verschieden, falls $\mathcal{T}$ fein genug. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle Einteilungen $\mathcal{T}$ von $[a, b]$ mit Feinheit $\delta_{\mathcal{T}}$ gilt:

$$|F(b) - F(a) - RS(f)| \leq \epsilon$$

22.4 Ausdehnung auf $\mathcal{R}^d$

Wir wollen nun unsere neuen Erkenntnisse auf den $\mathcal{R}^d$ ausdehnen.

Es soll gelten $t \leq x$ aus:

$$\begin{array}{rr} & |g' - h'|_{\mathcal{R}^d} \leq S \\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Schrankensatz}} & |g(x) - h(x) - (g(t) - h(t))| \leq S * (x - t) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{c} \tau \in [t, T] \\ |f(y) - f(x)| \leq L * |y - x| \end{array}\right\} \Rightarrow |\underbrace{f(x) - f(\tau)}_{\substack{\text{Interpretation:} \\ \text{Ableitung}}}| \leq L * |x - I| \leq \underbrace{L * |T - t|}_{\text{const}}$$

$$= \left|F'(x) - (f(\tau) * x)'\right| \leq L * (T - t)$$

Aus dem Schrankensatz folgt nun:

$$|F(x) - F(t) - f(\tau)(x - t)| \leq (L * (T - t))\,(x - t)$$

Im Spezialfall $(T = t, t = t_{j-1}, \tau = \tau_j, x = t_j)(\forall j : t_j - t_{j-1} \leq \delta_\tau)$:

$$|F(t_j) - F(t_{j-1}) - f(\tau_j) * (t_j - t_{j-1})| \leq (L * (t_j - t_{j-1})) * \delta_\tau$$

22.5 Abschätzung von Stammfunktionen mit Riemannsummen

Wir wollen nun mit Hilfe der Riemannsummen die Werte von Stammfunktionen abschätzen!

$$\begin{aligned} |F(a) - F(b) - RS_\tau(f)| &\leq \sum_{j=1}^{n} |F(t_j) - F(t_{j-1}) - f(T_j)(t_j - t_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} L * (t_j - t_{j-1}) * \delta_\tau = L * (b - a) * \delta_\tau \end{aligned}$$

Bei gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß fr alle Einteilungen τ mit Feinheit $\delta_\tau \leq \delta$ gilt:

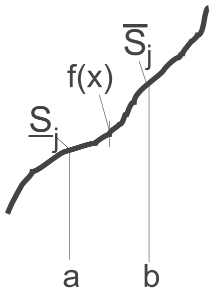
$$|F(b) - F(a) - RS_\tau(f)| \leq \epsilon$$

Bemerkung:
Es gibt kein anderes $v \in \mathcal{R}^d$ (also $\neq F(b) - F(a)$) mit $|v - RS_\tau(f)| \leq \epsilon$
Beweis: Wenn beides gilt, so folgt aus der Dreiecksungleichung $|F(a) - F(b) - v| \leq 2 * \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$. Nach dem Archiemdes-Argument gilt: $F(a) - F(b) = v$

22.6 Definition Integral - 1 dim

Es sei $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, $\quad \tau$ Einteilung, $\quad a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$.

$$\underline{S}_j \leq f(x) \leq \bar{S}_j \qquad \text{für } x \in [t_{j-1}, t_j]$$



Untersumme: $\sum_{j=1}^{n} \underline{S}_j (t_f - t_{j-1})$
Obersumme: $\sum_{j=1}^{n} \bar{S}_j (t_f - t_{j-1})$
Für die Untersumme gilt: sup(Untersumme) und für die Obersumme: sup(Obersumme).

22.6.1 Riemannintegrierbar

Definition:
Falls gilt: $\underline{S} = \bar{S}$ heißt f Riemannintegrierbar!

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$$

22.7 Hauptsatz der Differential/Integralrechnung

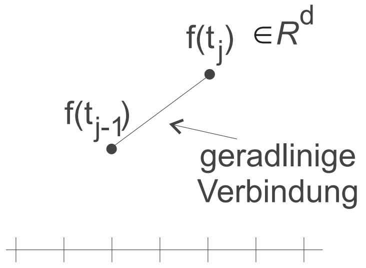
Satz: Dehnungsbeschränkte $f = F'$ sind Riemannintegrierbar und

$$\int_a^b f = F(a) = F(b)$$

Satz:
Jedes $f : [a, b] \to \mathcal{R}^d$ mit Dehnungsschranke (sogar jedes stetige f) besitzt eine Stamm funktion (Diese müssen durch Approximation konstruiert werden).

Beweis:
Zunächst wird f approximiert durch Funktionen, zu denen wir Stammfunktionen

kennen. Teile $[a,b]$ in n gleiche Teile, also $t_j = a + \frac{b-a}{n} * j$



$$\text{Sehnensteigung: } sa_n(x) := \frac{f(t_{j-1})(t_j - x) + f(t_j)(x - t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \forall x \in [t_{j-1}, t_j]$$

$$|sa'(x)| = |\frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}| \leq L$$

Behauptung:

$$x \in [a,b] \; |f(x) - sa_n(x)| \leq L * \frac{b-a}{n}$$

(Wenn dies stimmt hätten wir eine gute Approximation!)
$\frac{b-a}{n}$ ist eine Nullfolge unabhängig von n, d.h. f ist gleichmäßig (=unabh. von x) durch stückweise lineare Funktionen approximierbar.
Warum?
Wähle j so dass $x \in [t_{j-1}, t_j]$, der Abstand zum nährerem Endpunkt $\leq \frac{b-a}{2n}$ ist.
Weil f und sa_n Dehnungschranken L haben, hat $f - sa_n$ Dehnungschranke $\leq 2L$

$$f(x) - sa_n(x) = 0 \text{ für } x = t_{j-1} \text{ und } x = t_j$$

$$|f(x) - sa_n(x) - (f(t_{Rand}) - sa_n(t_{Rand}))| \leq 2L * |x - t_{Rand}| \leq L * \frac{b-a}{n}$$

In jedem der Intervalle haben wir quadratische Stammfunktionen:

$$SA(x) := C_j + \frac{-\frac{1}{2}f(t_{j-1} * (t_j - x)^2) + \frac{1}{2}f(t_j) * (x - t_{j-1})^2 \sharp^1}{t_j - t_{j-1}} \forall x \in [t_{j-1}, t_j]$$

$\sharp^1$ leitet man die Terme ab erhält man die $sa_n(x)$
Wähle C_1 so dass $SA_n(a) = 0$
Wähle $C_2, \ldots, C_n$ so dass die Stücke bei $t_1, \ldots, t_{n-1}$ zusammenpassen.
Behauptung:
Für jedes $x \in [a,b]$ ist $\{SA_n(x)\}$ Cauchyfolge, besitzt also einen Grenzwert.
Zz.: Dazu muß $|SA_{n+p}(x) - SA_n(x)| \leq$ Nullfolge
Monotoniesatz:
$(SA_{n+p} - SA_n)(a) = 0$

$$|(SA_{n+p} - SA_n)'(x)| = |sa_{n+p}(x) - f(x) - sa_n(x) + f(x)| \overset{\triangle-Ungl.}{\leq} 2L * \frac{b-a}{n}$$

$$\overset{Schrankensatz}{\Longrightarrow} |(SA_{n+p} - SA_n)(x) - \underbrace{(SA_{n+p} - SA_n)(a)}_{=0}| \leq 2L * \frac{b-a}{n} * \underbrace{|x-a|}_{\substack{\text{ersetzen} \\ \text{durch } |b-a|}}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $|SA_{n+p}(x) - SA_n(x)| \leq$ Nullfolge ist.
$\Rightarrow$ Beh. $\surd$

22.7.1 Hauptsatz für dehnungsbeschränkte Funktionen

Definiere:
$F(X) = \lim_{n\to\infty} SA_n(x)$
Behauptung:
$F'(x) = f(x)$
Beweis:
Betrachte:

$$\begin{array}{rcl} h & := & (SA_n(x) - SA_n(X_*) - SA'_n(x_*) * (x - x_*)) \\ & = & (SA_n(x) - SA_n(X_*) - sa_n(x_*) * (x - x_*)), h(x_*) \\ & \rightarrow & \\ |h'(x)| & = & |sa_n(x) - 0 - sa_n(x_*)| \leq L * |x - x_*| \end{array}$$

Jetzt haben wir $L * |x - x_*|$ als Schranke für h' & $h(x_*) = 0$

$$|h(x) - h(x_*)| \leq L * |x - x_*|^2 \Rightarrow |h(x)| \leq L * |x - x_*|^2$$

Also

$$|SA_n(x) - \underbrace{SA_n(x_*) - sa_n(x_*) * (x - x_*)}_{\text{Tangente von } SA_n}| \leq \underbrace{L * |x - x_*|}_{\substack{\text{unabhängig von n. In} \\ \text{n gleichmäßige Fehler-} \\ \text{abschätzungen}}}$$

$$\text{Archimedes: } |F(x) - F(x_*) - f(x_*) * (x - x_*)| \leq L * |x - x_*|^2$$

d.h. $F'(x_*) = f(x_*)$
$\Rightarrow$ Der Hauptsatz der Integral und Differentialrechung gilt für alle dehnungsbeschränkten Funktionen!

22.7.2 Stammfunktionen von stetigen Funktionen

Können wir diese Konstruktion von Stammfunktionen von dehnungsbeschräkten f auf stetige f ausdehnen?
Das Hauptproblem ist die stückweise lineare Approximation stetiger Funktionen.
Stetige $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}^d$ haben zwei Charakterisierungen:

1. f bildet jede konvergente Folge auf eine konv. Folge ab.
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_{x_*} > 0$ so dass:
   $|x - x_*| \leq \delta_{x_*} \Rightarrow |f(x) - f(x_*)| \leq \varepsilon$

1. $\Rightarrow$ 2. indirekter Beweis, der nicht so abgeändert werden kann, dass δ_{x_*} unabhängig von x_* ist.
Satz: (Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit)
Weil $[a, b]$ abgeschlossen (=vollständig) und beschränkt ist, kann man tatsächlich δ unabhängig von x_* wählen (d.h. gleichmäßig in x_*)

22.8 Integral für stetige Funktionen

Wie wir gesehen haben sind die Riemannsummen bis auf kleine Fehler durch Stammfunktionen berechenbar. Weiterhin gilt:

$$f = F' \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Deshalb ist es wichtig Stammfunktionen konstruieren zu können. Hierfur haben wir bereits den Satz für dehnungbeschränkte Funktionen benutzt um $f : [a, b] \to \mathcal{R}^d$ durch stückweise lineare Funktionen zu approximieren (Sehnenapproximation).
Um diese Konstruktion auf stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathcal{R}^d$ auszudehnen, benötigen wir den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit (auf abgeschlossenen und beschränkten Mengen).

Daraus ergibt sich die Behauptung:
Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $x, y \in [a, b]$ und $|x - y| \leq \delta$. Daraus folgt: $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ δ ist unabhängig von x wahlbar!
Dies gilt es nun zu beweisen!

22.8.1 Beweis

Beweis indirekt, durch halbieren mit Fallunterscheidung!

Angenommen zu einem solchen $\epsilon > 0$ kann man kein δ mehr finden, so dass der Satz gilt.
D.h. insbesondere: Zu jedem $\delta > 0$ finden wir Ausreißer $x_n, y_n \in [a, b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \delta$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_*$
Es ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$[a_1, b_1] := [a, b] \quad test = \frac{a_{n^*} + b_{n^*}}{2} \quad [a_{n^*}, test][test, b_{n^*}]$$

Für eine der beiden Teilintervalle gilt:
für alle noch so kleinen δ_n $(n > n^*)$ (z.B. $\delta_2 = \frac{1}{1^2}$) finden sich Ausreißer:

$n > n^*$: $x_n \in Teilintervall, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| \leq \delta_n$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_*$.
Das geignete Teilintervall bennen wir $[a_2, b_2]$.

usw.

$x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2]$ werden im folgenden nicht mehr geändert.
Induktionsschritt: Angenommen wir hätten dies bis $x_{n^*} \in [a_{n^*}, b_{n^*}]$ durchgeführt. Deshalb gibt es ein halb so großes Intervall $x_{n^*+1} \in [a_{n^*+1}, b_{n^*+1}]$. Aus $x_{n^*} \in [a_{n^*}, b_{n^*}]$ (Intervallschachtelung) folgt:
x_n konvergiert gegen $x_* \in [a,b]$.
Die Stetikeit von f bei x_* liefert nun einen Widersrpuch:
Zu $\epsilon = \frac{1}{3} * \epsilon_*$ (Beispiel) gibt es $\delta > 0$, so daß für alle $y \in [a,b]$ gilt $|x_* - y| \leq \delta$
Daraus folgt $|f(x_*) - f(y)| < \epsilon$.

$x_* \in [a_n \underbrace{-\delta_n} *, b_n \underbrace{+\delta_n} *]$

Daraus folgt: wähle $n \geq n(\delta)$, so groß, so daß $[a_n, b_n] < [x_* - \delta, x_* + \delta]$.
Danach liegen die Ausreißer x_n jedenfalls schon in $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ und nach der kleinen Korrektur (*) aud die y_n.
$\left.\begin{array}{l} |x_* - x_n| \leq \delta \\ |x_* - y_n| \leq \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \epsilon_* < |f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(y_*)| + |f(x_n) - f(y_n)| \leq \frac{2}{3} * \epsilon_*$
Dies ist ein Widerspruch!

22.9 Gemeinsamkeiten von Summen und Integralen

1. **Linearität**
   Summen
   $$\sum_{k=1}^{n(\infty)} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha * \sum_{k=1}^{n(\infty)} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n(\infty)} b_k$$
   Integrale
   $$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha * \int_a^b f + \beta * \int_a^b g$$

2. **Positiv**
   Summen
   $$0 \leq a_k \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n(\infty)} a_k$$
   Integrale
   $$0 \leq f \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f$$
   Diese Behauptungen gelten insbesondere für Riemannsummen, also -bis auf beliebig kleine Fehler-(Archimedes) auch für Integrale

3. **Summen von Differenzen**
   Summen

$$a_k = b_{k+1} - b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n(\infty)} a_k = b_{n+1} - b_1$$

   Integrale

$$\text{Hauptsatz: } f = F'$$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. **Assoziativ**
   Summen

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) + \left(\sum_{n}^{k=m+1} a_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   Integrale

$$\text{Intervalladdition } \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

5. **Dreiecksungleichung**
   Summen

$$|\sum_{k=1}^{n(\infty)} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n(\infty)} |a_k|$$

   Integrale

$$\text{Kontinuierliche Dreiecksungleichung}^\sharp$$
$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Beweis $\sharp$
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle Einteilungen $\mathcal{T} : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ mit Feinheit $\delta_{\mathcal{T}} := max_{j=1}^{n}\{|t_j - t_{j-1}|\}$
Riemannsumme für f

$$|\int_a^b f - \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) * (t_j - t_{j-1})| \leq \varepsilon$$

Riemannsumme für $|f|$

$$|\int_a^b |f| - \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j)| * (t_j - t_{j-1})| \leq \varepsilon$$

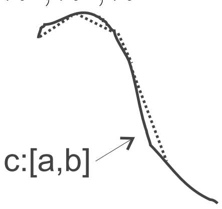
$$|\sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})| \overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |f(\tau_j)(t_j - t_{j-1})|$$

$$\overset{\triangle-\text{Ungl.}}{\Rightarrow} \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| + \underbrace{\cancel{2}\,\cancel{\varepsilon}}_{\text{Archimedes}}$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$ also ist $|\int_a^b f| > \int_a^b |f|$ unmöglich.

22.10 Die Bogenlänge

Die Bogenlänge von parametrisierten Kurven
$\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3, \mathcal{R}^d$



„Kurven“ wird so benutzt, dass immer stetig mit gemeint ist.
„Parametrisierung“ stetige Abbildung
Sei $\tau : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Einteilung von $[a, b]$, die dazu gehörige Sehnenlänge von $c : [a, b] \to \mathcal{R}^d$ ist: $Sehnenlänge_\tau(c) := \sum\limits_{j=1}^{n} |c(t_j) - c(t_{j-1})|$.
Wegen der Dreiecksungleichung wachsen Sehnenlängen bei Hinzunahme von Teilpunkten.
Definition:
Bogenlänge(c) := kleinste obere Schranke der Sehnenlänge von $c = \sup_\tau \sum_{j=1}^n |c(t_j) - c(t_{j-1})|$
Satz:
Jede dehnungbeschränkte Kurve besitzt eine Länge:

$$|c(x) - c(y)| \leq L * |x - y| \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |c(t_j) - c(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} L * (t_j - t_{j-1}) = L * |b - a|$$

Alle Sehnenlängen sind $\leq L * (b - a)$, also ist sup Sehnenlänge $\leq L * (b - a)$

22.11 Berechnung von Bogenlänge mit Stammfunktionen

$c'(t) = v(t)$ „Geschwindigkeiten der Parametrisierung“
Voraussetzung:
c sei eine differenzierbare Kurve mit stetiger (hier: dehnungsbeschränkt) Geschwindigkeit $t \to v(t)$
Teil 1:

Beschränkung der Sehnenlänge durch die Geschwindigkeit

$$\sum_{j=1}^{n} |c(t_j) - c(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n} |\int_{t_{j-1}}^{t_j} c'(t)dt| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |c'(t)|dt$$

$$= \int_a^b |c'(t)|dt \text{ unabhängig von der Einteilung}$$

$$Länge(c) = \int_a^b \underbrace{|c'(t)|}_{\text{Geschwindigkeit}} dt$$

Behauptung:

$$Länge(c) = \int_a^b |c'(t)|dt$$

$x_0 < x$ $L(x) = Länge(c|_{[a,x]})$
$F(x) := \int_a^x |c'(t)|dt$ F ist Stammfunktion von $|c'|$

$$|c(x) - x(x_0)| \leq L(x) - L(x_0) = Länge(c|_{[x_0,x]}) \leq \int_{x_0}^{x} |c'(x)|dt = F(x) - F(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} : |c'(x_0)| \leq \lim \frac{L(x) - L(x_0)}{x - x_0} = |c'(x_0)| = F'(x_0)$$

Daher ist $x \to L(x)$ bei x_0 differenzierbar mit Ableitung $L'(x_0) = |c'(x_0)|$
Also $L' = F'$ und $L(a) = 0 = F(a) \overset{\text{Monot.}}{\Rightarrow} L(x) = F(x)$ für alle $x \in [a, b]$

23 Zum Abschluß des Semesters

23.1 Endgültige Differenzierbarkeitsdefinition

$f : [a, b] \to \mathcal{R}^d$ bei x_0 betrachten

1. Es gibt ein $v \in \mathcal{R}^d$ so dass gilt

$$f(x) - f(x_0) - v * (x - x_0) = \varphi_{x_0} * |x - x_0|$$

$$\varphi_{x_0}(x) \text{ist eine bei } x = x_0 \text{ stetige Funktion mit } \varphi_{x_0}(x_0) = 0$$

d.h.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_{x_0,\varepsilon} > 0$ so dass wahr ist:

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\varphi_{x_0}(x) - 0| \leq \varepsilon$$

2. f heißt bei x_0 differenzierbar mit Ableitung $v = f'(x_0)$ falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) - v(x - x_0)| \leq \varepsilon * |x - x_0|$$

Für Funktionen f die mit quadratischem Fehler differenzierbar sind, ist $|\varphi_{x_0}(x)| = K * |x - x_0|$
$|\varphi_{x_0}(x) * |x - x_0|| = K * |x - x_0|^2$

Voraussetzung:

$$f : [a, b] \to \mathcal{R} \text{ und } f'(x_0) > 0$$

Behauptung:
Es gibt $\delta > 0$ so dass für $x \in (x_0, x_0 + \delta]$ ist $f(x) > f(x_0)$
Folgerung: An Extremstellen $x_* \in (a, b)$, $f(x_*) \geq f(x)$ gilt $f'(x_*) = 0$
Sei $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{10} > 0$ existiert ein $\delta = \delta_{10\%}$ so dass

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\varphi_{x_0}(x)| \leq \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{10}$$

Daher ist der Fehler $\varphi_{x_0}(x) * |x - x_0|$ höchstens 10% von $f'(x_0) * (x - x_0)$

$$\Rightarrow x \in (x_0, x_0 + \delta] \Rightarrow \underbrace{0,9 f'(x_0)}_{\text{pos.}}(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)$$

23.2 Produktregel

$f : [\alpha, \omega] \to \mathcal{R}^d$ bei 0 betrachten

$$f(x) - f(0) - v * (x - 0) = \varphi_0(x)|x - 0|$$

$$g(x) - g(a) - g'(a)(x - a) = \psi_a(x) * (x - a)$$

$f(x) = f(a) + f'(a) * (x - a) * \varphi_a(x) * |x - a|$
$g(x) = \underbrace{g(a) + g'(a) * (x - a)}_{\text{Tangente bei a}} * \psi_a(x) * |x - a|$

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) \quad = \quad & [f(a) + f'(a) * (x - a)] * [g(a) + g'(a) * (x - a)] + \\ & [f(a) + f'(a) * (x - a)] * \psi_a(x) * |x - a| + \\ & [g(a) + g'(a) * (x - a)] * \varphi_a(x) * |x - a| + \\ & \varphi_a(x) * \psi_a(x) * |x - a|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} |f(x)g(x) - f(a)g(a) + (f(a)g'(a) + f'(a)g(a)) * (x - a)| \\ \leq \\ |f'(a)g'(a)|(x - a)^2 + \\ \{(|f(a)| + |f'(a)|(\omega - \alpha)) * |\psi_a(x)| + \\ (|g(a)| + |g'(a)|(\omega - \alpha)) * |\varphi_a(x)| + \\ |\varphi_a(x)| * |\psi_a(x)| * |\omega - \alpha|\} * |x - a| \end{gathered}$$

$\Rightarrow$ Produktregel $\surd$

23.2.1 Definition der Differenzierbarkeit

$f : [\alpha, \omega] \to \mathcal{R}^d$ („Kurven") , $v = f'(a)$ genau dann:
$f(x) - \underbrace{[f(a) + f'(a) * (x-a)]}_{\text{Tangente}} =: \varphi_a(x) * |x-a|$
und $\varphi_a(x)$ ist stetig von a mit dem Wert $\varphi_a(a) = 0$
Die Fehler $\varphi_a(x) * |x-a|$ sind „gröbere Fehler" als die quadratischen $K * |x-a|^2$
Diese Definition schließt keinerlei Gleichmäßigkeit ein.
$\varphi_a(x)$ stetig bei a mit $\varphi_a(a) = 0 \Leftrightarrow$ Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $\delta = \delta(0, \epsilon) > 0$ so dass $|x-a| \leq \delta(a, \epsilon) \Rightarrow |\varphi_a(x) - 0| \leq \epsilon$ (Die Abhängigkeit des a ist durch die Definition in keiner Weise kontrolliert.)

Wir können zu geg. $\epsilon > 0$ keine Unterteilung $\alpha = t_0 < \ldots < t_n = b$ finden, so dass für $a, x \in [t_{j-1}, t_j]$ die Ungleichung $|\varphi_a(x) - 0| \leq \epsilon$ gilt.

23.3 Produktregeln sind alle gleich

$g(x) = [g(a) + g'(a) * (x-a)] + \Psi_a(x) * |x-a| \;\; \Psi_a(a) = 0, \Psi_a()$ stetig bei $x = a$

$$h(x) := \langle f(x), g(x) \rangle = f(x) \Diamond g(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) \Diamond g(x) &= [f(a) + f'(a) * (x-a)] \Diamond [g(a) + g'(a) * (x-a)]^\sharp \\ &\neq [f(a) + f'(a) * (x-a)] \Diamond \Psi_a(x) * |x-a| \\ &\quad + \varphi_a(x) * |x-a| \Diamond [g(a) + g'(a) * (x-a)] \Diamond \varphi_a(x) * \Psi_a(x) * |x-a|^2 \end{aligned}$$

$$f(x) \Diamond g(x) - \underbrace{(f(a) \Diamond g(a) + (f'(a) \Diamond g(a) + f(a) \Diamond g'(a))\,(x-a))}_{\text{Aus } \sharp}$$

$$= \{ \text{ Summer stetiger Funktionen mit Wert 0 bei a} \} * |x-a|$$

genauer:

$$\begin{aligned} \{\underbrace{f'(a) \Diamond g'(a)}_{\text{Rest aus } \sharp} * |x-a| \quad &+ \quad [f(a) + f'(a)(x-a)] \Diamond \Psi_a(x) \\ &+ \quad \varphi_a(x) \Diamond [g(a) + g'(a) * (x-a)] \\ &+ \quad \varphi_a(x) \Diamond \Psi_a(x) * |x-a| \qquad \} * |x-a| \end{aligned}$$

23.4 Schrankensatz

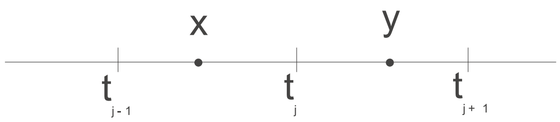
Voraussetzung
f ist differenzierbar an jeder Stelle $a \in [\alpha, \omega]$
$|f'(a)| \leq L$ für alle $a \in [\alpha, \omega]$

Behauptung

$$x, y \in [\alpha, \omega] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L * |x - y|$$

2 Vorbemerkungen

1. Falls man zu einer Einteilung $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \omega$ weiß: $x, y \in [t_{j-1}, t_j] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Dann sagt die Dreiecksungleichung $x, y \in [\alpha, \omega] \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L * |x - y|$



$$\text{Vor.:} \left\{ \begin{array}{lcl} |f(y) - f(t_j)| & \leq & L * (y - t_j) \\ |f(t_j) - f(x)| & \leq & L * (t_j - x) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rlll} & |f(y) - f(x)| & \leq & f(y) - f(t_j) + f(t_j) - f(x) \\ \Rightarrow & |f(y) - f(x)| & \leq & |f(y) - f(t_j)| + |f(t_j) - f(x)| \quad \leq \quad L * (y - x) \end{array}$$

2. Die Diff.-Definition lifert an jeder Stelle a die Behauptung beinahe: ,,beinahe“: Wähle $\epsilon > 0$ und finde dazu δ so dass $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |\varphi_a(x)| \leq \epsilon$ $|f(x) - f(a) - f'(a) * (x - a)| \leq \epsilon * |x - a|$

   $$\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\Rightarrow} |f(x) - f(a)| \leq (|f\prime(a) + \epsilon|) * |x - a| \leq (L + \underbrace{\epsilon}_{\text{,,beinahe“}}) * |x - a|$$

   Über die Länge der von a abhängigen Intervalle liefert die Diff.-Definition keine Kontrolle: $\rightsquigarrow$ Indirekter Beweis

Indirekter Beweis
Angenommen es gäbe $x, y \in [\alpha, \omega]$ mit $|f(x) - f(y)| > L * |x - y|$ oder
$\underbrace{|f(x) - f(y)| \geq (L + \epsilon) * |x - y|}$
soll zum Widerspruch
geführt werden

Induktions-Anfang:
$a_1 = min(x, y)$
$b_1 = max(x, y)$
$[a_1, b_1] \qquad |f(b_1) - f(a_1)| \geq (L + \varepsilon) * (b_1 - a_1)$
$test = \frac{a_1 + b_1}{2}$ Jetzt haben wir die beiden Intervalle $[a_1, test]$ und $[test, b_1]$ inmin. einem dieser Intervalle gilt

$\lvert f(test) - f(a_1)\rvert \geq (L + \varepsilon)\lvert test - a_1\rvert$	oder	$\lvert f(b_1) - f(test)\rvert \geq (L + \varepsilon)\lvert b_1 - test\rvert$
In diesem Fall setze:		In diesem Fall setze:
$a_2 := a_1$		$a_2 := test$
$b_2 := test$		$b_2 := b_1$

Induktions-Voraussetzung:
Für $k = 1, \ldots, n$ haben wir $[a_k, b_k]$ halb so lang wie $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ und

$$|f(b_k) - f(a_k)| \geq (L + \varepsilon)|b_k - a_k|$$

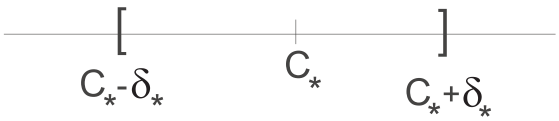
Induktions-Schritt:
Jetzt haben wir die $test = \frac{a_k + b_k}{2}$ und die beiden Intervalle: $[a_k, test]$ und $[test, b_k]$
In min. einem Teilintervall gilt wieder

$$|f(test) - f(a_k)| \geq (L + \varepsilon)|test - a_k| \text{ oder } |f(b_k) - f(test)| \geq (L + \varepsilon)|b_k - test|$$

Wähle das richtige als $[a_{k+1}, b_{k+1}]$
Damit haben wir eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}$
Mit dem Vollständigkeitsaxiom folgt: Es gibt $c_* \in [a_n, b_n] \forall\ n \in \mathcal{N}$
Die Differenzierbarkeits-Definition an der Stelle c_* führt zum Widerspruch mit $|f(b_k) - f(a_k)| \geq (L + \varepsilon)|b_k - a_k|$

$$f(x) - f(a) - f'(x) * (x - c_*) = \varphi_*(x)|x - c_*| \quad \begin{matrix} \varphi_*(c_*) = 0 \\ \varphi_* \text{ stetig bei } c_* \end{matrix}$$

Zu $\varepsilon_* := \frac{\varepsilon}{2}$ gibt es $\delta_* > 0$ so dass $|x - c_*| \leq \delta_* \Rightarrow |\varphi_*(x) - 0| \leq \varepsilon_*$



Wähle n_* so groß, dass $n \geq n_* \Rightarrow [a_1, b_1] \subset [c_* - \delta_*, c_* + \delta_*]$. Weil $\{[a_n, b_n]\}$ gegen c_* konvergente Intervallschachtelung ist.
Zu $\varepsilon_* := \frac{\varepsilon}{2}$ gibt es $\delta_* > 0$ so dass $|x - c_*| \leq \delta_* \Rightarrow |\varphi_*(x) - 0| \leq \varepsilon_*$ gilt also für $x = a_n$ und $x = b_n$ falls $c \geq n_*$

$$|f(a_n) - f(c_*)| \leq \Big(|f'(c_*)| + \varepsilon_*\Big) * |a_n - c_*|$$

$$|f(b_n) - f(c_*)| \leq \Big(|f'(c_*)| + \varepsilon_*\Big) * |b_n - c_*|$$

$$|f(b_n) - f(a_n)| \leq (\underbrace{|f'(c_*)|}_{L} + \underbrace{\varepsilon_*}_{\frac{\varepsilon}{2}}) * (b_n - a_n)$$

23.4.1 Endgültige Beweis der Kettenregel

Der letzte offene Punkt: Endgültige Beweis der Kettenregel
Vorausetzung:
$F \circ f$
$f : [\alpha, \beta] \to \mathcal{C} \qquad f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \varphi_a(x) * |x - a|$
$F\mathcal{C} \to \mathcal{C} \qquad F(z) - F(c) - F'(c)(z - c) = \phi_c(z) * |z - c|$

$f(a) = c$
Zz.:

$$|(F \circ f)(x) - (F \circ f)(x) - ? * (x-a)| = (\text{Stetig mit Wert 0 bei a}) * |x-a|$$

$$F(z) = F(c) + F'(c) * (z-c) + \phi_c(z) * |z-c|$$
$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a) * (x-a) + \varphi_a(x) * |x-a|}_{\text{Einsetzen!}}$$

$$\Rightarrow F(f(x)) = F(f(a)) + F'(f(a)) * (f(x) - f(a)) + \phi_c(f(x)) * |f(x) - f(a)|$$

Zu kontrollieren ist: $f(x)$ ist so nah bei $f(a)$ wie in der Differenzierbarkeits-Eigenschaft von F nötig.

$$|f(x) - f(a)| = f'(a)(x-a) + \varphi_a(x) * |x-a|$$

$$\Rightarrow |F(f(x)) - F(f(a)) + F'(f(a)) * (f'(a) * (x-a))| =$$
$$\phi_c(f(x)) * \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{\substack{\text{soll} \leq L * |x-a| \\ \text{s. 2. Bem.}}} + |F'(f(a))| * |\varphi_a(x)| * |x-a|$$