Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 0.1 (Rationale Zahlen und Ungleichungen)

Zeige, daß für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

(Tip: Um zu zeigen, daß $x \leq y$ gilt, ist es oft einfacher zu zeigen, daß $0 \leq y - x$ gilt. Das ist so, weil man zeigen kann, daß eine Zahl $0 \leq z$ erfüllt, indem man eine Zahl $w \in \mathbb{R}$ vorgibt, so daß $z = w^2$ gilt.)

Aufgabe 0.2 (Approximation von Wurzeln mit Rationalen Zahlen)

In der Vorlesung wurde $\sqrt{2}$ approximiert. Jetzt soll man $2 + \sqrt{5}$ approximieren.

a) Zeige die Identität

$$2 + \sqrt{5} = 4 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}$$

b) Zeige, daß $2 < \sqrt{5} < 3$ und folgere aus dieser **groben** Ungleichung die **viel bessere**

$$4 + \frac{4}{17} \leq 2 + \sqrt{5} \leq 4 + \frac{5}{21}$$

Somit hat man ein Approximationsintervall für $2 + \sqrt{5}$ der Länge $\frac{5}{21} - \frac{4}{17} = \frac{1}{357}$.

c) Wiederhole diesen Prozeß, bis der Fehler kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

d) (Freiwillig) Schreibe ein Programm, das diesen Prozeß fortsetzt, bis der Fehlerterm kleiner als eine einzugebende Zahl ist.

Aufgabe 0.3 (Polynome und Ungleichungen)

a) Zeige, daß für alle $x, a \in \mathbb{Q}$ gilt

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Bemerke, daß dies eine Art *Binomische Formel* ist.

b) Beweise dann, daß für alle $0 \leq x, a$ gilt:

$$0 \leq x^3 - a^3 - 3a^2(x - a)$$

c) Was bedeutet diese Ungleichung für die Graphen der beiden Funktionen $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto a^3 + 3a^2(x - a)$. Bemerke, daß der Graph von $x \mapsto a^3 + 3a^2(x - a)$ eine Gerade ist, tangential zum Graph von $x \mapsto x^3$ bei $x = a$.

Aufgabe 0.4 (Axiomatischer Umgang mit Ungleichungen)

Ziel der Aufgabe ist, die Rechenregeln für Ungleichungen mit **rationalen Zahlen** auf die Rechenregeln für Ungleichungen mit **ganzen Zahlen** zurückzuführen.

Dazu müssen wir zuerst definieren, wann eine **rationale** Zahl positiv ist:
Definition: Man sagt, daß die rationale Zahl $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ positiv ist, wenn gilt: $0 < a \cdot b$.
Setzen Sie die folgende Behauptung für **ganze Zahlen** voraus und zeigen Sie damit:

a) Wenn $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ positive rationale Zahlen sind, so auch $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ sowie $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Als nächstes müssen wir definieren, wann eine rationale Zahl größer ist als eine andere:
Definition: Für $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ sagen wir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ wenn gilt: $0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$
Nun setzen Sie voraus, daß a) bewiesen ist und zeigen für $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$:

b) $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} < \frac{c}{d} + \frac{m}{n}$,
$\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$,
und falls zusätzlich $0 < \frac{m}{n}$ gilt, so auch $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} < \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$.

Bemerkung. Da ganze Zahlen a, b auch rationale Zahlen mit Nenner 1 sind, muß bei den beiden Definitionen überlegt werden, daß sie bei Anwendung auf rationale Zahlen mit Nenner 1 mit den vorausgesetzten Eigenschaften der ganzen Zahlen übereinstimmen. Das ist nicht Teil der Hausaufgabe.

Aufgabe 0.5 (Gleichungssysteme)

a) Löse über $\mathbb{Q}$ (also, suche Lösungen in $\mathbb{Q}$, wie auf der Schule gelernt) das Gleichungssystem

$$3x + 3y = 2$$

$$2x + 5y = 3$$

b) Bestimme die Multiplikationstafel für Rechnungen modulo 7, also zum Beispiel

$$(4 \bmod 7)(5 \bmod 7) \equiv 20 \bmod 7 \equiv (14 + 6) \bmod 7 \equiv 14 \bmod 7 + 6 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$$

c) Löse das Kongruenzensystem indem **dasselbe Verfahren** wie in a) mit der Multiplikationstabelle aus b) benutzt wird:

$$3x + 3y \equiv 2 \bmod 7$$

$$2x + 5y \equiv 3 \bmod 7$$

(Bemerke, daß es keine Rolle spielt, daß man modulo 7 rechnet. Man könnte genau dasselbe modulo 19 oder so was machen.)

d) Warum ist das Kongruenzensystem

$$3x + 4y \equiv 2 \bmod 7$$

$$2x + 5y \equiv 3 \bmod 7$$

nicht lösbar? (Lösung zu finden gibt "Minuspunkte").

Bemerkung. Kongruenzen haben eine große Rolle bei der Herstellung von Kalendern gespielt. Man kann sich zum Beispiel überlegen, in welchen Jahren in diesem Jahrhundert der 11. Oktober ein Montag war.

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 1.1 L (Linear abhängig, linear unabhängig)

Betrachte die Polynome $P_1(x) := x - 1,\ P_2(x) := x - 2,\ P_3(x) := x - 3$. Zeige, daß je zwei von diesen linear unabhängig, aber alle drei linear abhängig sind (Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$).

Aufgabe 1.2 L (Rechnen mit Kongruenzen)

Man weiß, daß man Kongruenzklassen modulo 7 addieren und multiplizieren kann. Ab jetzt sei F_7 die Menge aller Kongruenzklassen modulo 7, repräsentiert durch $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Zeige mit Hilfe der Multiplikationstabelle von Aufgabe 0.5, daß F_7 ein Körper ist.

b) Zeige möglichst einfach, daß F_4 (also die Kongruenzklassen modulo 4) kein Körper ist.

c) Sei ab jetzt $F_7[x]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in F_7. Man kann solche Polynome koeffizientenweise addieren, also

$$\begin{aligned}&(3x+5) \bmod 7 + (4x^2+4x+2) \bmod 7\\ \equiv\ & 4x^2 \bmod 7 + ((3+4)x) \bmod 7 + (5+2) \bmod 7 \equiv\ 4x^2 \bmod 7\end{aligned}$$

Man kann auch mit einem Element von F_7 multiplizieren, also

$$(4 \bmod 7)\cdot((3x+1) \bmod 7) \equiv (12x+4) \bmod 7 \equiv (5x+4) \bmod 7$$

Zeige, daß $F_7[x]$ mit diesen Rechenregeln zu einem F_7-Vektorraum wird. Schreiben Sie den Beweis so auf, daß nur benutzt wird, daß F_7 die Körperaxiome erfüllt.

d) Warum hat ein quadratisches Polynom $P \in F_7[x],\ P \neq 0$ höchstens zwei Nullstellen?

Aufgabe 1.3 L (auch A) (Lineare Abbildungen)

Sei $\mathbb{P}_n$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ von Grad kleiner oder gleich n.

a) Zeige, daß es für alle Polynome $P \in \mathbb{P}_n$ $(n > 2)$ ein eindeutig bestimmtes Polynom $Q \in \mathbb{P}_2$ gibt, so daß gilt

$$P(0) = Q(0),\ P(1) = Q(1),\ P(2) = Q(2)$$

b) Zeige, daß die durch $P \to Q$ definierte Abbildung von $\mathbb{P}_n$ nach $\mathbb{P}_2$ linear ist.

Aufgabe 1.4 A (Beispiele zu "viel kleiner")

Bestimmen Sie eine Zahl r so daß für $0 < |x| < r$ gilt: x^2 ist höchstens 3% von $|x|$. Wieviel Prozent von $|x|$ ist $|x|^3$ höchstens, und wieviel Prozent von $|x|^2$ ist $|x|^4$ höchstens (unter derselben Voraussetzung $0 < |x| < r$)? – Geben Sie zu jeder Prozentzahl p eine Zahl $r(p)$ an, so daß aus $0 < |x| < r(p)$ folgt: x^2 ist höchstens p% von $|x|$.

Aufgabe 1.5 A (Kreise und der Graph von $x \mapsto x^4$)

a) Sei (m, n) in der (x, y)-Ebene und sei $r > 0$, dann zeichne die Menge aller Punkte (x, y) so daß
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 \leq r^2$$

b) Betrachte den Graphen von $x \mapsto x^4$. Bestimme den Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ berührt. Zeige, daß für $x \leq 1$ die Punkte des Graphen **innerhalb** dieses Kreises liegen.

c) Bestimme ebenso den Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse, der diesen Graph im Punkt $(2, 16)$ berührt. Zeige, daß der Graph von $x \mapsto x^4$ **außerhalb** dieses Kreises liegt.

d) Können Sie einen Kreis finden, der den Graph im Punkte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ berührt, aber so, daß der Graph **außerhalb** des Kreises verläuft?

Aufgabe 1.6 A (Mit Polynomen rechnen)

Sei $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt. Bestimme ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$ (vom Grade ?), so daß gilt:

$$x^4 - a^4 - 4a^3(x - a) = (x - a)^2 \cdot P(x)$$

Abgabe: Die mit "A" gekennzeichneten Aufgaben werden von dem Analysis-Übungsleiter korrigiert, die mit "L" gekennzeichneten von dem für Lineare Algebra. " L (auch A)" wird wie "L" korrigiert, gehört aber auch zu den Analysiskenntnissen. (Erstens kann man bei manchen Beweisübungen den Unterschied ohnehin nicht machen, außerdem soll die Arbeit gleichmäßig unter den Übungsleitern verteilt werden.)

Korrektur: Die rechten Seiten der Gleichungssysteme der Aufgabe 0.5 sollten immer 2, 3 sein, nicht wie in Teil d) vertippt 1, 3. Der Fehler verändert das Verhalten des Gleichungssystems, es gibt dann mehr als eine Lösung.

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgaben mit **A** bzw. **L** werden von den **A**nalysis- bzw. **L**ineare Algebra Übungsleitern korrigiert. "(auch A)" bedeutet: klausurrelevant für Analysis.

Aufgabe 2.1 L (Lineare Abhängigkeit)

Sei wie immer $\mathbb{Q}_3[X]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und Grad kleiner oder gleich 3.

a) Zeige, daß es keine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]$ gibt so daß

$$L(1) = X, \quad L(X) = 1 \text{ und } L(1+X) = X^2$$

b) Zeige, daß es auch keine lineare Abbildung $\Lambda\colon \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]$ gibt, so daß

$$\Lambda(X^3+2X^2+5X+1) = X^2+3X, \ \Lambda(2X^3+5X^2+7X+2) = X^3, \ \Lambda(X^2-3X) = X^3-2X^2$$

Aufgabe 2.2 L (auch A) (Vollständige Induktion)

a) Sei für $n \in \mathbb{N}$ $S_1(n)$ die Summe aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, also z.B.

$$S_1(5) = 1+2+3+4+5 = 15.$$

Beweise durch vollständige Induktion, daß für alle n gilt

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Sei für $n \in \mathbb{N}$ $S_2(n)$ die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen zwischen 1 und n, also z.B.

$$S_2(5) = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 1+4+9+16+25 = 55.$$

Beweise durch vollständige Induktion, daß für alle n gilt

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n(n+0.5)(n+1)$$

Aufgabe 2.3 L (Lineare Abbildungen)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear (warum oder warum nicht)?

a) $F_1\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto 3x$
b) $F_2\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto 3x+2$
c) $F_3\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x^2$
d) $F_4\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \quad P(X) \mapsto P(X) + X^2 + 3X$
e) $F_5\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \quad P(X) \mapsto (3X+2)P(X)$
f) $F_6\colon \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X], \quad P(X) \mapsto P(X+1)$

Aufgabe 2.4 A (Polynomdivision)

a) Zeige, daß es **kein** $P_2(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, mit
$$X^5 + 3X^2 + 7 = (X-1)P_2(X).$$

b) Zeige, daß es **kein** $P_2(X) \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, mit
$$X^6 - X^5 + 3X^3 - 3X^2 + 7x - 7 = (X-1)^2 P_2(X).$$

c) Rechne $P_3(X) \in \mathbb{Q}[X]$ aus, so daß
$$X^7 - 3X^6 + 2X5 - 3X^3 + 10X^2 - 9X + 2 = (X^2 - 3X + 2)P_3(X).$$

Aufgabe 2.5 A (Ungleichungen und Monotonie)

a) Unter Benutzung der Rechenregeln für $<$, die in der Aufgabe 0.4 diskutiert wurden, zeige unter der Voraussetzung $0 \le a, b: \quad a < b$ gilt genau dann wenn $a^3 < b^3$ gilt.
b) Zeige, daß die Funktion $x \mapsto x^3$ monoton wachsend ist.
c) Zeige hingegen, daß die Funktion $x \mapsto x^4$ **nicht** monoton wachsend ist.

Aufgabe 2.6 A (Tangenten, nicht immer auf einer Seite)

Betrachte die Polynomfunktion
$$f(x) = x^3 - x.$$

a) Bestimme die Gleichung für die Tangente in $(a, a^3 - a)$.
b) Zeige, daß für alle $a \neq 0$ die Tangente den Graphen an einer anderen Stelle schneidet.

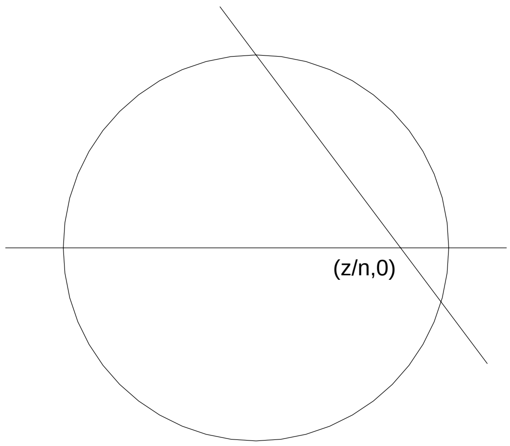
Aufgabe 2.7 A (Berührende Kreise können schneiden)

a) Lese wieder die Aufgabe 1.5 über Berührkreise des Graphen von $x \to x^4$ durch.
b) Setze $1/2 < a < 2$ voraus. Bestimme a so, daß es einen Kreis mit Mittelpunkt auf der y-Achse gibt, der den Graphen in (a, a^4) berührt, aber so dass rechts von a der Graph **ausserhalb** des Kreises, links von a der Graph ein Stück weit **innerhalb** des Kreises liegt.

Vergleiche dieses Verhalten mit dem der Tangente in 0 *zum Graphen von* $x \mapsto x^3 - x$ *in der Aufgabe 2.6; wie dort die Tangente so schneidet hier der Kreis "berührend".*

Aufgabe 2.8 L (auch A) (Rationale Kreispunkte).

Gegeben sei der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ und eine Gerade, die den Punkt $(0,1)$ des Kreises mit dem **rationalen** Punkt $(z/n, 0)$ der x-Achse verbindet. Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt der Gerade mit dem Kreis und stellen Sie fest, daß seine beiden Koordinaten rational sind. (*Wie liefert jeder rationale Punkt auf dem Einheitskreis ein pythagoräisches Tripel*
$$a, b, c \in \mathbb{N},\ a^2 + b^2 = c^2?)$$



Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 3.1 L (auch A) (Polynome und Polynomfunktionen mod 7)

Sei $\mathrm{Abb}(F_7, F_7)$ der Vektorraum aller Abbildungen $F_7 \to F_7$ (*Vorlesung:* Die Menge aller Abbildungen von irgendeiner Menge M in einen Vektorraum V ist selbst ein Vektorraum). Jedes Polynom $P \in F_7[X]$ liefert eine Abbildung $F_7 \to F_7$, indem $x \in F_7$ nach $P(x) \in F_7$ abgebildet wird. So haben wir eine Abbildung

$$L\colon F_7[X] \to \mathrm{Abb}(F_7, F_7),\ L(P) := (x \mapsto P(x)) \text{ mit } x \in F_7$$

a) Zeige, daß L eine lineare Abbildung ist.
b) Zeige, daß L surjektiv ist (*Bemerke den Unterschied zum üblichen Fall rationaler Koeffizienten: Jeder "weiß", daß es andere Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gibt als die Polynome*).
c) Zeige, daß L injektiv ist, wenn man L auf den Untervektorraum aller Polynome in $F_7[X]$ mit Grad kleiner oder gleich 6 einschränkt. (Überladene Bezeichnung: $(F_7)_6[X]$.)
d) Rechne nach, daß in $F_7[X]$ gilt

$$X^7 - X = X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)(X-6)$$

und folgere daraus, daß $L(X^7 - X) = 0$ was auch ganz anders ist, als bei den Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3.2 L (Mehr über lineare Abhängigkeit)

Für $q \in \mathbb{Q}$ sei

$$W_q\colon \mathbb{Q}_2[X] \to \mathbb{Q},\quad P(X) \mapsto P(q) \text{ (andere Bezeichnung } W_q(P) := P(q) \text{)}$$

also, W_q ordnet einem Polynom seinen Wert an der Stelle q zu.
W_q ist ein Element von $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ und da $\mathbb{Q}$ ein Vektorraum ist, ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ auch ein Vektorraum.

a) Zeige: Je drei der Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear unabhängig.
b) Zeige: Alle vier Elemente $W_{-1}, W_0, W_1, W_2 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}_2[X], \mathbb{Q})$ sind linear abhängig.

Aufgabe 3.3 L (Berührung in zwei Punkten (später: Splines))

Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ und y_1, y_2, m_1, m_2 auch in $\mathbb{Q}$. Zeige, daß es ein eindeutiges Polynom $P \in \mathbb{Q}_3[X]$ gibt, so daß

$$P(a_1) = y_1,\ P'(a_1) = m_1,\ P(a_2) = y_2, \text{ und } P'(a_2) = m_2$$

Setzen Sie zunächst voraus, daß drei der vier Zahlen y_1, m_1, y_2, m_2 null und eine eins ist. Das gibt vier spezielle (zeige: linear unabhängige) Polynome, mit deren Hilfe das allgemeine Problem leicht lösbar ist. Eindeutigkeit wie in der Vorlesung mit Polynomfaktorisierung. *Dies ist interessant, falls y_1, y_2, m_1, m_2 Werte und Ableitungen bei a_1, a_2 einer "schwierig zu berechnenden" Funktion f sind und man zeigen kann daß $f - P$ in $[a_1, a_2]$ "klein" ist.*

Aufgabe 3.4 A (Ableitungsregeln bei gröberen Fehlern)

In der Vorlessung wurden Ableitungsregeln, insbesondere die Produktregel, bewiesen, d.h. für 2 Funktionen f, g, die an der Stelle a (mit quadratischem Fehler) differenzierbar sind, ist auch $f \cdot g$ so gut differenzierbar, und es gilt

$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

Wir setzen jetzt gröbere Fehler voraus, nämlich: Es gibt ein $c > 0$ (wahrscheinlich klein) und $K > 0$ (vielleicht groß), so daß für alle $x \in (a-c, a+c)$ gilt

$$|f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))| \leq K|x-a|^{3/2} \text{ bzw. } |g(x) - (g(a) + g'(a)(x-a))| \leq K|x-a|^{3/2}$$

Zeigen Sie (vgl. Vorlesung) die Produktregel unter dieser Voraussetzung – natürlich darf jetzt auch der Unterschied zwischen $f \cdot g$ und der Tangente bei a ein so grober $|\ |^{3/2}$-Fehler sein.

Aufgabe 3.5 A (Schmiegparabeln schneiden)

Sei $P(X) = X^n$ mit $n > 2$ und betrachte für $a > 0$ die "Schmieg"-Parabel an der Stelle a:

$$S(x) := P(a) + P'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}P''(a)(x-a)^2,$$

$$\text{beachte } \ S(a) = P(a),\ S'(a) = P'(a),\ S''(a) = P''(a).$$

Zeige: Jede Schmiegparabel schneidet den Graph von P berührend, $P(x) - S(x) = (x-a)^3 \cdot \ldots$.

Aufgabe 3.6 L (Komposition von zwei Linearen Abbildungen)

Betrachte folgende lineare Abbildungen

$$A\colon \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_2[X],\ A\colon P(X) \mapsto P'(X) \text{ oder } A(P) := P'$$

$$B\colon \mathbb{Q}_2[X] \to \mathbb{Q}_3[X],\ B\colon Q(X) \mapsto (X-1)Q(X)$$

a) Bestimme den Kern (wo?) und das Bild (auch wo?) von $A \circ B$.
b) Bestimme den Kern und das Bild von $B \circ A$.
c) Bestimme $V = \{P \in \mathbb{Q}_3[X] \mid (B \circ A)(P) = P\}$ und zeige, daß V ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}_3[X]$ ist.

Aufgabe 3.7 A (Binomialkoeffizienten und Induktion)

Wiederholen Sie die Begründung "durch Zählen auf zwei verschiedene Weisen" *(Kurzfassung im Internet-Protokoll)* der beiden Rekursionsformeln (Anfangswerte $\binom{n}{0} = 1$):

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \qquad \binom{n}{k} \cdot k = \binom{n}{k-1} \cdot (n+1-k).$$

Gib mit jeder dieser Rekursionsformeln einen Induktionsbeweis für: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Aufgabe 3.8 A (Nicht alle Funktionen sind differenzierbar)

a) Zeige, daß $f(x) = |x|$ an der Stelle 0 *nicht* differenzierbar ist.
b) Zeige, daß $g(x) = |x|^3$ [auch an der Stelle 0] erste und zweite Ableitungen hat (nämlich welche?), aber an der Stelle 0 *nicht* dreimal differenzierbar ist.

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 4.1 A (Nicht alle Funktionen sind rational)

Aus der Schule weiß man (glaubt man zu wissen), daß es Funktionen wie den Sinus und die Exponentialfunktion gibt. Man "weiss" vielleicht auch, daß die zweite Ableitung von $\sin(x)$ gleich $-\sin(x)$ ist und die erste Ableitung von e^x gleich e^x ist. Unabhängig von solchem Vorwissen:
Zeigen Sie, daß es **keine** rationalen Funktionen $f(x) = P(x)/Q(x)$, $g(x) = P_1(x)/Q_1(x)$ (außer $f = 0$ oder $g = 0$) gibt, so daß gilt

$$f''(x) = -f(x), \text{ bzw. } g'(x) = g(x).$$

Also sind die Exponentialfunktion und der Sinus (falls sie doch existieren sollten) keine rationalen Funktionen. (Tip: Die Grade der beteiligten Polynome vergleichen.)

Aufgabe 4.2 A (Geometrische Reihe und Induktion)

Die Summenformel der geometrischen Reihe ist Basiswissen: Für $x \neq 1$ gilt
$1 + x + \ldots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} x^k = (1 - x^n)/(1 - x)$.

a) Differenzieren Sie diese Formel und zitieren Sie die benutzten Regeln.
b) Beweisen Sie die in a) erhaltene Formel von neuem, jetzt durch Induktion.

Aufgabe 4.3 A (Halbkreise als Funktionsgraphen)

Seien $r > 0$ und $y_0, x_0 \in \mathbb{Q}$ gegeben. Betrachte die Funktion f mit Definitionsbereich $[x_0 - r, x_0 + r]$:

$$f(x) := y_0 - \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}$$

a) Wie lautet die Kreisgleichung, so daß der Graph von f in der Kreislinie enthalten ist?
b) Zeige, daß f an jeder Stelle des Intervalls $(x_0 - r, x_0 + r)$ zweimal differenzierbar ist, und berechne f' und f'' (benutzte "erste" Beispiele und Regeln zitieren).

Aufgabe 4.4 A (Parabel und Kreise)

Betrachte an Stellen $a \neq 0$ die quadratische Parabel $P(x) = x^2$.
Zeige: Die Parabel wird von jedem Halbkreis $h(x) = y_m - \sqrt{(r^2 - (x - x_m)^2)}$ berührend geschnitten, der $h(a) = P(a), h'(a) = P'(a), h''(a) = P''(a)$ erfüllt. (Was passiert bei $a = 0$?)

Aufgabe 4.5 L (auch A) (Lineare Unabhängigkeit)

a) Zeige, daß die fünf Polynome $(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$, $(X-1)(X-2)(X-3)(X-5)$, $(X-1)(X-2)(X-4)(X-5)$, $(X-1)(X-3)(X-4)(X-5)$, $(X-2)(X-3)(X-4)(X-5)$ linear unabhängig sind, und zwar **nicht** durch Lösen eines 5×5-Gleichungssystems!
b) Betrachte zu drei Polynomen $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{Q}[X]$ die zugehörigen Polynomfunktionen nur auf einem (kleinen) Intervall, etwa $f_1, f_2, f_3 : [0.2, 0.4] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Zeige (Nullstellen betrachten): Falls die Funktionen f_1, f_2, f_3 linear abhängig sind, so auch die Polynome P_1, P_2, P_3.

c) Zeige, daß die rationalen Funktionen $\frac{4711}{x-1}, \frac{6783}{x-2}, \frac{5/9}{x-3}$ linear unabhängig sind (Beantwortung mittels eines 3×3-Gleichungssystems gilt als Notlösung).

d) Bestimme $A, B, C \in \mathbb{Q}$ (und zeige mit c) die Eindeutigkeit dieser Lösung) so daß

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = A\frac{4711}{x-1} + B\frac{6783}{x-2} + C\frac{5/9}{x-3}$$

Aufgabe 4.6 L (Definitionen; keine Punkte, aber Voraussetzung für den Schein)

Handschriftliche Einzelabgabe in Schönschrift: Gib die Definitionen von KÖRPER, VEKTORRAUM, LINEARE ABBILDUNG, LINEAR ABHÄNGIG und LINEAR UNABHÄNGIG an.
(*Bemerkung: Am liebsten würde ich die Aufgabe stellen: "100 mal aufschreiben". Da das nicht geht, lege die Definitionen unter das Kopfkissen.*)

Aufgabe 4.7 L (Urbild, Bild und Durchschnitt, Vereinigung)

Seien X, Y Mengen und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Definiere das *Urbild* einer Teilmenge $A \subset Y$ durch $f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}$. Definiere das *Bild* einer Teilmenge $C \subset X$ durch $f(C) := \{y \in Y \mid \text{Es gibt } x \in C \text{ so daß } f(x) = y\}$. Definiere die *Differenz* zweier Teilmengen $A, B \subset Y$ durch $A - B := \{y \in Y | y \in A,\ y \notin B\}$.

a) "Urbilder vertragen sich mit den Mengenoperationen": Zeige daß für alle $A, B \subset Y$ gilt:
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),\ f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

b) "Bilder vertragen sich nicht mit den Mengenoperationen": Zeige (durch Beispiele) daß

$$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D),\ f(X - C) = Y - f(C)$$

nicht gilt.

Aufgabe 4.8 L (Span)

Sei V ein K-Vektorraum (K ist also ein Körper).

a) Zeige: Wenn $U, W \subset V$ Untervektorräume sind, so ist $U \cap W$ auch ein Untervektorraum.

b) Gib ein Beispiel von einem Vektorraum V und zwei Untervektorräumen U, W, so daß $U \cup W$ **kein** Untervektorraum ist.

c) Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$. Betrachte die Menge (genannt Spann von $v_1, \ldots, v_k$)

$$\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k) := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in K\},$$

also die Menge aller Linearkombinationen die man aus den v_1 bis v_k bekommen kann. Zeige, daß $\mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_k)$ ein Untervektorraum von V ist. Bemerke, daß es der **kleinste** Untervektorraum ist, der alle v_i enthält.

d) Seien jetzt $K = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{Q}[X]$. Was ist $\mathrm{Span}(X, X^2 - 5X, X^7)$?

Mathematatik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 5.1 L (Linear unabhängige Vektoren)

Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in einem K-Vektorraum V. Seien $w_1, \ldots, w_n \in Span(v_1, \ldots, v_n)$ (also $w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k$); auch die $w_1, \ldots, w_n$ seien linear unabhängig.

a) Sei $u \in V - Span(v_1, \ldots, v_k)$. Zeige, daß $v_1, \ldots, v_k, u$ auch linear unabhängig sind.

b) Zeige, daß es j_* gibt mit $a_{j_*1} \neq 0$; nach Umbenennen darf man annehmen $a_{11} \neq 0$. Berechne v_1 in Abhängigkeit von $w_1, v_2, \ldots, v_n$.

c) Zeige, daß die Vektoren $a_{11}w_2 - a_{21}w_1, \ldots, a_{11}w_n - a_{n1}w_1$ linear unabhängig sind.

d) Nutze dies zu einem kürzeren Induktionsbeweis als in der Vorlesung, der $v_1, \ldots, v_n$ als Linearkombination der $w_1, \ldots, w_n$ ergibt. (Dieser Beweis eignet sich nicht zur Spezialisierung auf Beispiele, während der der Vorlesung beim Lösen von Gleichungssystemen wiederholt wird.)

Aufgabe 5.2 L (Basen von $\mathbb{Q}_3[X]$)

Begründe kurz, welche der folgenden Mengen eine Basis, ein erzeugenden System oder linear unabhängig in $\mathbb{Q}_3[X]$ sind (Man kann dies *wirklich* ohne Gleichungssysteme beantworten):

a) $\{1,\ \ X-1,\ \ X^2-5X,\ \ 17X^3+2737X^2-1001\}$

b) $\{X(X-1)(X-2),\ \ X(X-1)(X-3),\ \ 123456X(X-1)(X-5)\}$

c) $\{X(X-1)(X-2),\ \ X(X-1)(X-3),\ \ X(X-2)(X-3),\ \ (X-1)(X-2)(X-3)\}$

d) $\{X^3,\ \ X^3-X^2,\ \ X^3-5X^2+37X,\ \ X^3-400X^2+1,\ \ 1\}$

e) Die Menge $\mathbb{Q}_2[X]$.

f) Die Menge $\{1,\ X,\ X^2\}$ (Bermerke: Dies ist eine Basis, aber von $\mathbb{Q}_2[X]$).

g) Die Menge $\{1,\ X,\ 4567X^3+3456X^2+1876X+4711\}$.

Aufgabe 5.3 L (Induktion zur Binomischen Formel)

Zeige durch Induktion die wichtige binomische Formel (vgl. Aufgabe 3.7)

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

Aufgabe 5.4 L (Auch A) (Taylorpolynome)

a) Sei $a \in \mathbb{Q}$ fest vorgegeben. Seien $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$. Zeige, daß es **genau ein** Polynom $Q(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ (andere Bezeichnung: $Q \in \mathbb{Q}_n[X]$) gibt mit
$$Q(a) = c_0,\ Q'(a) = c_1, \ldots, Q^{(n)}(a) = c_n$$

b) Wiederhole, daß die Tangente $T(X)$ an der Stelle a zu einem Polynom $P(X)$ das (einzige) Polynom vom Grad ≤ 1 ist mit $T(a) = P(a),\ T'(a) = P'(a)$. – Dann folgere aus a), daß es für jedes Polynom $P(X)$ und jedes $a \in \mathbb{Q}$ ein eindeutiges Polynom $T_n(X) \in \mathbb{Q}_n[X]$ gibt mit
$$T_n(a) = P(a),\ T_n'(a) = P'(a), \ldots, T_n^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$$

Das Polynom $T_n(X)$ heißt *Taylorpolynom vom Grad n bei a zu P*. Speziell ist die Tangente $T(X)$ das Taylorpolynom $T_1(X)$ vom Grad 1.

Aufgabe 5.5 A (Polynome mit großen Argumenten)

Sei $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}_n[X]$ mit $a_n = 1$. Berechnen Sie aus den Koeffizienten ein $R \geq 1$, so daß Sie für alle $x \notin [-R, R]$ zeigen können

$$\begin{aligned} \left|\frac{P(x)}{x^n} - 1\right| &\leq \frac{\text{Konstante}}{|x|} \leq \frac{1}{3}, \\ \left|\frac{P(x)}{x^k}\right| &\leq 2|x|^{n-k}, \text{ falls } n < k \\ \left|\frac{P(x)}{x^k}\right| &\geq \frac{1}{2}|x|^{n-k}, \text{ falls } n > k \end{aligned}$$

Aufgabe 5.6 A (Basteln mit monotonen Funktionen)

Seien f, g monotone Funktionen (monoton heißt hier: entweder streng monoton fallend oder streng monoton steigend; [Sie finden bei anderer Gelegenheit auch "schwach" statt "streng"].)
Bemerkung: Es soll **ohne** *Differentialrechnung argumentiert werden!*

a) Zeige, daß $f \circ g$ monoton ist.

b) Gebe Beispiele von monotonen Funktionen f, g, so daß $f + g$ und fg **nicht monoton** sind.

c) Nehme an, daß es $a \in \mathbb{Q}$ gibt mit $f(a) = g(a) = 0$. Zeige, daß fg ein globales Maximum oder ein globales Minimum in a hat.

d) Für jedes $0 < a, x \in \mathbb{Q}$ sei $f(x) := x - a$, $h(x) := f(x)g(x) := \frac{1}{x} + x + 3x^2 - (\frac{1}{a} + a + 3a^2)$. Rechne $g(x)$ aus, verifiziere, daß g monoton ist und benutze c), um zu zeigen, daß die Funktion h im Falle $a = \frac{1}{2}$ ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ hat.

Aufgabe 5.7 A (Schranken mit und Gleichheit im Monotoniesatz)

Seien $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ und $a, L \in \mathbb{Q}$, so daß für alle $x \in [a, a + \frac{1}{8}]$ gilt: $P'(x) \leq L$.

a) Sei Q ein weiters Polynom, $y_0 \in \mathbb{Q}$ und $C > 0$ so daß $Q(y_0) < C$. Berechne $r > 0$ aus den **Koeffizienten** des Polynoms Q, so daß für alle $y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ gilt

$$Q(y) \leq \frac{Q(y_0) + C}{2} =: S_Q < C \quad \text{(d.h. } S_Q \text{ ist Schranke für } Q \text{ auf } [y_0 - r, y_0 + r])$$

b) Wir haben als Anwendung des Monotoniesatzes $P(x) \leq P(a) + L \cdot (x - a)$ für alle $x \in [a, a + \frac{1}{8}]$. Diskutieren Sie die Gleichheit, also:
Es gilt $P(a + \frac{1}{8}) = P(a) + \frac{L}{8}$ genau dann, wenn $P(X) = L \cdot X + P(a) - L \cdot a \in \mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 5.8 A (Definition und explizite Beispiele)

a) Gib die Definition für "differenzierbar mit quadratischem Fehler" an (vgl. Vorlesung oder Internet Protokoll) und zeige, daß $g(x) = |x|^3$ in $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ so oft Sie wollen differenzierbar ist, aber an der Stelle 0 nur zweimal (nicht dreimal) differenzierbar ist.

b) Lese Aufgabe 4.2 und schreibe das Archimedes Axiom auf.
Dann beweise für alle $0 \leq x < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung: $(n + 1)x^n \leq \frac{1}{1-x}$;
verbessere sie zu $x^n \leq \left(1 - \sqrt{x}\right)^{-2} \cdot (n + 1)^{-2}$.

c) Zeige mit b), daß es für jedes q, $0 < q < 1$, eine Konstante $K_q > 0$ gibt, so daß für alle $x \in [-q, q]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$\left|\frac{1}{1-x} - \sum_{j=0}^{n} x^j\right| \leq \frac{K_q}{n}$. Bestimme K_q (natürlich unabhängig von x, n).

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 6.1 L (Ableitungen)

Betrachte den Vektorraum $\mathbb{Q}_n[X]$. Dann sei $L\colon \mathbb{Q}_n[X] \to \mathbb{Q}_n[X]$ die lineare Abbildung "ableiten", also $L(P(X)) := P'(X)$ (andere Bezeichnung $L(P) := P'$).

a) Bestimme die Kerne von L, L^n und L^{n+1}.

b) Was ist das Bild (genauer: der Bilduntervektorraum) von L, L^n und L^{n+1}?

c) Bestimme die Matrix von L in der Basis $(1, X, \dots, X^n)$.

d) Bestimme die Matrix von L in der Basis $(1, 1+X, 1+X+\frac{1}{2}X^2, \dots, \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k)$.

Aufgabe 6.2 L(auch A) (Produktformeln fürs Differenzieren)

a) Seien f, g n-mal differenzierbar. Zeige für $k \leq n$ die Formel

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

(*Bemerkung: Induktion über k!!*).

b) Zeige für $f_1, \dots, f_n$ differenzierbar, daß

$$(f_1 \dots f_n)'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \dots f_{i-1}(x) f_i'(x) f_{i+1}(x) \dots f_n(x)$$

Aufgabe 6.3 A (Beste Approximationen)

Sei $P(X)$ ein Polynom und $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt.

a) Zeige, daß die Tangente an der Stelle a das einzige Polynom vom Grad 1 ist, so daß es $K, c > 0$ gibt, so daß für alle $x \in (a-c, a+c)$ gilt

$$|P(x) - T_1(x)| \leq K(x-a)^2$$

Also ist die Tangente das lineare Polynom, das $P(X)$ an der Stelle a **am besten approximiert**.

b) Sei $k \geq 1$ und $T_k(X)$ das Taylorpolynom vom Grad k wie in Aufgabe **5.4**. Zeige, daß es $K, c > 0$ gibt, so daß für alle $x \in (a-c, a+c)$ gilt

$$|P(x) - T_k(x)| \leq K(x-a)^{k+1}$$

c) Zeige, daß das Taylorpolynom vom Grad $k \geq 1$ an der Stelle a das einzige Polynom vom Grad k ist, so daß es $K, c > 0$ gibt, so daß für alle $x \in (a-c, a+c)$ gilt

$$|P(x) - T_k(x)| \leq K(x-a)^{k+1}$$

Also ist das Taylorpolynom vom Grad k ($T_k(X)$) **die beste Approximation k**-ten **Grades** an der Stelle a *(beachte: Wenn Sie das Taylorpolynom auf einem Intervall zur Approximation verwenden wollen, müssen die Konstanten K in a),b),c) bekannt sein).*

Aufgabe 6.4 A (Folgen)

a) Zeige mit der binomischen Formel: $n^{1/n} \le 1 + 2/\sqrt{n}$

b) Die Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und $\epsilon > 0$ seien gewählt. Bestimme $R' > 0$ so daß für alle $x \in [-R', R']$

$$|\frac{1}{(1-x)^2} - \sum_{i=1}^{k} i x^{i-1}| \le \epsilon$$

c) Mit Hilfe der Wachstumsrate f'/f wurde in der Vorlesung gezeigt: $(1+x/n)^n$ ist monoton wachsend in n. Zeige analog: $(1 + x/n + 0.5x^2/n^2)^n$ ist (für $x \ge 0$) monoton in n.

Aufgabe 6.5 A (Ableitung Rationaler Funktionen)

Sei $f(x) := (1 + ax + bx^2)/(1 - (1-a)x)$.

a) Differenziere f 2-mal und bestimme a, b so, daß $f(0) = f'(0) = f''(0),\ f'(1) = f(1)$.

b) Zeige, daß für die Lösung $a > 0, b$ im Intervall $0 \le x \le 1$ gilt: $f'(x)/f(x) \le 1$.

c) Vergleiche numerisch $f(x),\ f(x/2)^2$ und e^x auf $[0, 1]$ (Ohne Punkte).

Aufgabe 6.6 L (Lineare Abbildungen)

Sei V eine K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K V = 1 + \dim_K U$.

a) Zeige, daß es eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to K$, also $\phi \in \mathrm{Hom}(V, K)$, gibt mit $\phi \ne 0$ und $\phi(U) := \{\phi(u) | u \in U\} = 0$.

b) Was sind Kern und Bild von ϕ?

c) Sei $\psi\colon V \to K$ eine zweite lineare Abbildung wie in a). Zeige: dann gibt es $\lambda \in K$, so daß für alle $x \in V$ gilt: $\psi(x) = \lambda\phi(x)$.

Aufgabe 6.7 A (Polynomfunktionen)

Fasse $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ als Polynomfunktionen auf. Nimm an, daß für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$|P(x) - Q(x)| < 1$$

Zeige, daß es eine Konstante $\lambda \in (-1, 1)$ gibt, so daß $P(X) = Q(X) + \lambda$.

Aufgabe 6.8 L (Polynome in der Basis $\{1, (X-a), \ldots, (X-a)^n\}$)

Sei $a \in \mathbb{Q}$ fest gewählt.

a) Zeige mit den Methoden der Linearen Algebra, daß jedes Polynom $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Q}_n[X]$ sich als Linearkombination von $1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n$ schreiben läßt, daß es also Zahlen $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j (X-a)^j$$

b) Mit Induktion und unter Benutzung der Binomischen Formeln für $(a + X - a)^k$ gib einen **expliziten** Algorithmus an, der die Koeffizienten b_j berechnet.

c) Schließlich sei T_n das n-te Taylorpolynom von P an der Stelle a (vergleiche Aufgabe 5.4), dann haben die beiden Polynome T_n und P bezüglich der Basis $1, (X-a), \ldots, (X-a)^n$ die gleichen Koeffizienten.

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Wenn Sie Donnerstag in der Pause sagen, warum Sie mit einer Aufgabe nicht in Gang gekommen sind, dann kommentiere ich diese Aufgabe(n).

Aufgabe 7.1 L (Linearkombination von Spaltenvektoren)

a) Bestimme den Spann und dessen Dimension in $\mathbb{Q}^4$ der Spaltenvektoren folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Welche der Mengen von Spaltenvektoren aus a) sind eine Basis ihres Spanns?

c) Sei D eine endliche Teilmenge von $\mathbb{Q}[X]$. Zeige, daß D genau dann eine Basis von $\mathrm{span}(D)$ ist, wenn

$$\dim(\mathrm{span}(D)) = \text{Anzahl der Elemente von } D.$$

Aufgabe 7.2 L (Wiederholung)

Seien U, V, W K-Vektorräume, $F : U \to V$ und $L : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige:

a) $L \circ F$ ist linear. Schreibe die Definition von "linearer Abbildung" noch einmal auf.

b) F ist injektiv, genau dann wenn $Kern(F) = 0$ gilt.

c) $Kern(F) \subset Kern(L \circ F)$.

d) $Bild(L \circ F) = L(Bild(F))$.

e) Wenn $L \circ F$ injektiv ist, ist F injektiv. Gib ein Beispiel, an dem man sieht, daß $L \circ F$ injektiv sein kann, L aber nicht.

f) Wenn $L \circ F$ surjektiv ist, ist L surjektiv. Gib ein Beispiel, an dem man sieht, daß $L \circ F$ surjektiv sein kann, F aber nicht.

Sei ab jetzt $W = U$.

g) Wenn für alle $u \in U$ gilt: $(L \circ F)(u) = u$, dann ist F injektiv.

h) Wenn für alle $v \in V$ gilt: $(F \circ L)(v) = v$, dann ist F surjektiv.

Aufgabe 7.3 A (Nullfolgen)

Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Nullfolgen:

a) $a_n = \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (Mit $x > 0$ fest gewählt).

c) $a_n = \frac{1}{1-q} - \sum_{k=0}^{n} q^k$ (Mit $q \in (-1, 1)$ fest gewählt).

d) $a_n = (-1)^n$.

e) Sei $P(X) := 1 + X^2 + 2X^3$ und $a_n := P(\frac{1}{n}) - 1$.

e) Sei $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und $a_n := P(\frac{1}{n}) - P(0)$.

Aufgabe 7.4 L (auch A) (Fibonacci Zahlen)

Sei $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, dann definiere rekursiv für $n > 1$ $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ (Also $a_2 = 2, a_3 = 3$, $a_4 = 5, a_5 = 8, \ldots$). Mit der Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ betrachte die Folge $B_n := A^n$. Bezeichne mit $(B_n)_{i,j}$ die Matrixelemente von B_n. Zeige durch Induktion: Für alle n gilt: $a_n = (B_n)_{1,1}$.

Aufgabe 7.5 A (Komplexe Zahlen)

Wir haben schon gesehen, wie man aus $\mathbb{Q}^2$ einen Körper macht, so daß $P(X) = X^2 - 2$ zwei Nullstellen hat. Wichtiger ist, den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ so zu einem Körper K zu machen, daß $P(X) = X^2 + 1$ zwei Nullstellen hat: Da wir die Addition in $\mathbb{Q}^2$ schon haben, muß nur die Multiplikation definiert werden. Dazu soll das Element $(1, 0) \in \mathbb{Q}^2$ als neutrales Element 1_K bezeichnet werden, und als Multiplikation mit den Elementen $(q, 0) = q \cdot 1_K$ soll die Skalarmultiplikation in $\mathbb{Q}^2$ weiterverwendet werden, also $(q, 0) \cdot (u, v) := (q \cdot u, q \cdot v)$.
Damit sind die Vektorraumeigenschaften ausgenutzt, und es fehlt jetzt nur noch die Definition $(0, 1) \cdot (0, 1)$; dies Element soll Nullstelle von $X^2 + 1$ werden, und daher wird definiert:

$$(0,1) \cdot (0,1) := (-1,0) = -1_K, \quad \text{Abkürzung: } i := (0,1).$$

Oder ausführlicher: $(a \cdot 1_K + b \cdot i) \cdot (c \cdot 1_K + d \cdot i) = (ac - db) \cdot 1_K + (ad + bc) \cdot i$
Zeige alle auf die Multiplikation bezogenen **Körperaxiome**, nämlich:

a) 1_K ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation.
b) Die Multiplikation ist assoziativ (Begründung ohne Rechnung siehe Protokoll).
c) Das Distributivgesetz gilt. (Erst formulieren, dann zeigen)
d) $a/(a^2 + b^2) \cdot 1_K - b/(a^2 + b^2) \cdot i$ ist multiplikatives Inverses von $(a, b) = a \cdot 1_K + b \cdot i$.

Aufgabe 7.6 A (Ableitungen beschränken)

a) Sei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 3-mal differenzierbar, außerdem gelte $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Nimm an, daß für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $|f^{(3)}(x)| \le 10$. Dann zeige für alle $x \in \mathbb{Q}$
$$|f(x)| \le 10|x|^3$$
b) Betrachte das Taylorpolynom T_3 einer Funktion f bei a und ersetze den X^3-Koeffizienten $f^{(3)}(a)/3!$ durch eine obere Schranke $S \ge f^{(3)}(x)/3!$ im Intervall $[a - R, a + R]$. Dann erhält man ein Polynom, das in $[a, a + R]$ oberhalb von f liegt, in $[a - R, a]$ unterhalb.

Aufgabe 7.7 A (Variation von 3.3)

Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ und $y_1, y_2, y_3, m_1, m_2, m_3$ auch in $\mathbb{Q}$. Zeige, daß es ein eindeutiges Polynom $P \in \mathbb{Q}_5[X]$ gibt, so daß

$$P(a_1) = y_1,\ P'(a_1) = m_1,\ P(a_2) = y_2,\ P'(a_2) = m_2,\ P(a_3) = y_3, \text{ und } P'(a_3) = m_3$$

(Tip: *Setze zunächst voraus, daß 5 der 6 Zahlen $y_1, m_1, y_2, m_2, y_3, m_3$ null und eine eins ist. Das gibt 6 spezielle Polynome, mit deren Hilfe das allgemeine Problem leicht lösbar ist. Es ist dieselbe Strategie wie in: 1.3, 3.2, 3.3, 5.4, usw...)*

Aufgabe 7.8 L (Lineare Unabhängigkeit)

Sei V eine K-Vektorraum und seien $u, v \in V$. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\dim(Span(\{u, v\})) = 2$
b) Es gibt eine lineare Abbildung $\phi : Span(\{u, v\}) \to \mathbb{Q}^2$ mit $\phi(u) = (1, 0)$ und $\phi(v) = (0, 1)$.
c) u, v sind linear unabhängig.
Tip: *Zeige a) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a), so spart man sich z.B. c) $\Rightarrow$ a) zu beweisen.*

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 8.1 L (Zählen in F_7)

Betrachte $V = (F_7)^2$ als Vektorraum über F_7.

a) Wie viele Vektoren gibt es in V? Wie viele Untervektorräume?

b) Wie viele Paare linear unabhängiger Vektoren (v, w) gibt es? ((v, w) und (w, v) doppelt zählen, also "geordnete" Paare zählen, auch in c).)

c) Wie viele Basen gibt es in V? Wie viele Elemente hat $\mathrm{Hom}_{F_7}(V, V)$?

d) Wie viele injektive und wie viele surjektive Elemente gibt es in $\mathrm{Hom}_{F_7}(V, V)$?

e) Welche Teilmengen von V kommen als Lösungsmengen $\{x \in V; A \cdot x = 0\}$ vor?

Aufgabe 8.2 A (Leibniz Reihen)

a) Schreibe die Definitionen von "Nullfolge" und von "konvergente Folge" auf.

b) Zeige für $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$, daß die Folge (wegen der Summe auch *Reihe*, hier Leibniz-Reihe, genannt)

$$a_n := \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{j^\alpha}\right) \qquad \text{konvergiert.}$$

c) Was passiert für $\alpha = 0$?

Aufgabe 8.3 A (Die Wurzelfunktion)

a) Schreibe die Definition von "Intervallschachtelung" und das Vollständigkeitsaxiom auf.

b) Sei $g_1(x) := \frac{1+x}{2}$ $(x > 0)$, dann betrachte folgende rekursiv definierte Funktionenfolgen:

$$f_j(x) := \frac{x}{g_j(x)}\,, \quad g_{j+1}(x) := \frac{g_j(x) + f_j(x)}{2}\,,\ j = 1, 2, \ldots$$

(also, $f_1(x) = \frac{2x}{1+x}$, $g_2(x) = \frac{4x+(1+x)^2}{4(1+x)}, \ldots$). — Zeige, daß für jedes feste $x > 0$ durch $\{\ [f_k(x), g_k(x)]\ \}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung gegeben ist.

c) Zeige, daß für alle k und $x > 0$ gilt

$$f_k(x)^2 \leq x \leq g_k(x)^2.$$

Also hat man eine Intervallschachtelung für die Wurzelfunktion.

Aufgabe 8.4 A (Kettenregel)

a) Seien $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 3-mal differenzierbar und gelte $(g \circ f)(x) = x$, $(f \circ g)(y) = y$ (ich finde es übersichtlicher, die Punkte im Definitionsbereich von f und von g verschieden zu bezeichnen). Gib $(g', g'', g''')(y)$, in Abhängigkeit von $(f, f', f'', f''')(x), x = g(y)$ an.

b) Seien $f(x) = x^4$ und $g(y) = \sqrt{\sqrt{y}}$; berechne g', g'' einerseits mit der Kettenregel, andererseits nach a). (Die Ableitung: wurzel$' = 0.5/$wurzel ist bekannt?)

c) Zeige für alle differenzierbaren Funktionen $f_1, \ldots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ durch vollständige Induktion:

$$(f_n \circ \ldots \circ f_1)'(x) = f_n'((f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1)(x)) \cdot f_{n_1}'((f_{n-2} \circ \ldots \circ f_1)(x)) \cdots f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$$

Aufgabe 8.5 A (2. Ableitung beschränken)

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B > 0$ und $a < b$ $(a \neq b)$ mit $f(a) = f(b) = 0$ und $-B \leq f''(x) \leq B$ für alle $x \in [a,b]$. Zeige dann, daß für alle $x \in [a,b]$ gilt

$$-\frac{B}{2}(x-a)(b-x) \leq f(x) \leq \frac{B}{2}(x-a)(b-x)$$

(Tip: Vergleiche mit Aufgabe 7.6, mit dem ersten Tip zu 0.1 und mit der Vorlesung)

Aufgabe 8.6 L (Rang von Matrizen)

Betrachte folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme den Rang von A, B, AB, BA.
b) Was ist die Dimension der Lösungsräume der Gleichungen $(x \in \mathbb{Q}^3)$

$$Ax = 0,\ Bx = 0,\ ABx = 0,\ BAx = 0\ ?$$

Aufgabe 8.7 L (Auswertungsabbildungen)

Sei V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}_5[X]$. Für $a \in \mathbb{Q}$ sei $w_a \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$ die Auswertungsabbildung

$$w_a : V \to \mathbb{Q},\ w_a(P) := P(a), \quad \text{andere Bezeichnung: } w_a(P(X)) := P(a)$$

a) Bestimme die Dimension des Lösungsraums $(\subset V)$ der Gleichung $w_a(P(X)) = 0$.
b) Wie viele $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$ (paarweise unterschiedlich) kann man finden, so daß die Auswertungsabbildungen $w_{a_1}, \ldots, w_{a_k}$ linear unabhängig in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$ sind?

Aufgabe 8.8 L (auch A) (Binomische Formeln)

Aus 8.6 ist bekannt, daß im allgemeinen $AB \neq BA$ gilt.
a) Berechne (Klammern auflösen): $(A+B)^3$, $(\mathrm{id}+B)^3$

Im folgenden sei $AB = BA$, in Worten: die Matrizen kommutieren.

b) Zeige, daß für alle $k > 0$ bekannte Formeln für **kommutierende** Matrizen gelten:

$$A^0 := 1, \quad (A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}, \quad A^k - B^k = (A-B) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B^j$$

c) Berechne C^5 mit Hilfe von b) für

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 9.1 L (Äquivalenzrelationen)

Sei X eine Menge. Oft will man irgendwelche Elemente **nicht** unterscheiden, also will man sie als **äquivalent** ansehen. Die Bezeichnung dafür, daß $x, y \in X$ äquivalent sind, ist $x \simeq y$.

Es ist klar, daß man folgende Eigenschaften von $\simeq$ haben will:

1) Wenn x äquivalent zu y ist, ist y äquivalent zu x, also "$x \simeq y \Rightarrow y \simeq x$". Wenn $\simeq$ dies erfüllt, heißt $\simeq$ **symmetrisch**.
2) x soll auf jeden Fall äquivalent zu sich selbst sein, also "$x \simeq x$". Wenn $\simeq$ dies erfüllt, heißt $\simeq$ **reflexiv**.
3) Wenn x äquivalent zu y und y äquivalent zu z sind, soll x äquivalent zu z sein, also "$x \simeq y$ und $y \simeq z \Rightarrow x \simeq z$". Wenn $\simeq$ dies erfüllt, heißt $\simeq$ **transitiv**.

Wenn $\simeq$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt $\simeq$ **Äquivalenzrelation**.
Zeige, daß folgende $\simeq$ Äquivalenzrelationen definieren:

a) Sei X eine Menge, dann $x \simeq y$ $(x, y \in X)$ genau dann wenn $x = y$.
b) Sei V ein K-Vektorraum, und $W \subset V$ ein Untervektorraum, dann $x \simeq y$ $(x, y \in V)$ genau dann wenn $x - y \in W$.
c) Sei X eine Menge und $f\colon X \to \mathbb{Q}$ eine beliebige Abbildung, dann $x \simeq y$ $(x, y \in X)$ genau dann wenn $f(x) = f(y)$.
d) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $a \simeq b$ genau dann wenn $a - b$ teilbar durch 7 ist.
e) In dem Vektorraum $X := \mathrm{Abb}((-1,1), \mathbb{R})$ setze $f \simeq g$ $(f, g \in X)$ genau dann, wenn es $K > 0$ gibt, so daß für alle $x \in (-1,1)$ gilt: $\quad |f(x) - g(x)| \le Kx^2$.

Aufgabe 9.2 L (Endomorphismen)

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$, setze $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$.

a) Benutze die Basis von V, um eine Basis von $\mathrm{End}(V)$ anzugeben; Matrizen dazu?
b) Man kann auf $\mathrm{End}(V)$ eine "Multiplikation" definieren, nämlich $(AB)(x) := A(B(x))$ für $x \in V$ aund $A, B \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, daß diese Multiplikation assoziativ und distributiv ist. Zeige, daß die Identität, also $I(x) = x$, das multiplikative neutrale Element ist.
c) Wähle $V = \mathbb{Q}_1[X]$ und gib ein $A \in \mathrm{End}(V)$, $A \neq 0$, so an, daß A **keine** Inverse hat.

Aufgabe 9.3 L(auch A) (Schmiegparabeln schneiden II)

Sei $P(X) = X^n$ mit $n > 2k > 0$ und betrachte für $a > 0$ das Taylorpolynom $T_{2k}(X)$ an der Stelle a. Zeige: $T_{2k}(X)$ schneidet den Graph von P berührend.
Bemerkung: *Durch Zitieren der Aufgaben 6.8 und 5.7a bzw. 1.4 ist eine zweizeilige Lösung möglich. Längere Lösungen als 10 Zeilen werden nicht bewertet.*

Aufgabe 9.4 A (Zwischenwertsatz)

a) Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dehnungsbeschränkt mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, zeige daß es $t \in [a, b]$ mit $f(t) = 0$ gibt. (Tip: *Vergleiche Vorlesung: Existenz von Umkehrfunktionen*)
b) Folgere, daß $f([a, b]) \supset [f(a), f(b)]$.

Aufgabe 9.5 A (Konvergenz von Sehnensteigungen)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei a mit quadratischem Fehler differenzierbar und sei $\{h_n\}$ eine positive Nullfolge, $h_n > 0$. Zeige, daß die Sehnensteigungen

$$m_n := \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}$$

gegen die Ableitung $f'(a)$ konvergieren. (Happy?)

Aufgabe 9.6 L (Gauß-Eliminationsverfahren)

Invertiere folgende 3×3-Matrix unter Benutzung des Gauß-Eliminationsverfahrens:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4+a & 10 \\ 5 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie sich unter a Meßfehler vor, und vermeiden Sie deshalb, durch a zu teilen. Für welche a versagt Ihr Verfahren? Berechnen Sie den Rang der Matrix für solche a.

Aufgabe 9.7 A (Ein Taylorfeind: $f^{(k)}(0) = 0$, alle $k \in \mathbb{N}$)

Sei $f(x) := exp(-x^{-2}) > 0$, $x \neq 0$, und $f(0) := 0$.

a) Zeige unter Benutzung der in der Vorlessung besprochenen Ungleichung $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$:

$$0 \leq f(x) \leq n^n x^{2n}$$

b) Berechne $f'(x), f''(x)$, für $x \neq 0$ mit Differentiationsregeln, für $x = 0$ mit a) u. Definition.

c) Zeige, daß es für alle $k \in \mathbb{N}$ eine rationale Funktion $R_k(x) = P_k(x) \cdot x^{-3k}$, $P_k \in \mathbb{Q}[X]$ gibt, so daß für alle $x \neq 0$ gilt $f^{(k)}(x) = R_k(x) f(x)$.

d) Zeige mit a) und c), daß es für alle $k \in \mathbb{N}$ Konstanten K_k gibt so daß:
Für alle $0 \neq x \in [-1, 1]$ folgt: $|f^{(k)}(x)| \leq K_k \cdot x^2$, also $f^{(k+1)}(0) = 0$.

Aufgabe 9.8 A (Komplexe Zahlen II)

In der Aufgabe 7.5 wurde aus $\mathbb{Q}^2$ ein Körper gemacht. Wenn man genau dasselbe mit $\mathbb{R}^2$ macht, bekommt man einen anderen Körper, nämlich die Komplexen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{C}$. Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, dann definiert man das **komplexe Konjugierte** $\bar{z} := a - bi$ und die **Norm** $|z| := \sqrt{z\bar{z}}$.

a) Zeige daß die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$ $\mathbb{R}$-linear ist.

b) Zeige, daß für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$. Folgere, die wichtige Gleichung: $|zw| = |z|\,|w|$.

c) Zeige, daß für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $|z + w| \leq |z| + |w|$
(Mache eine schöne Zeichnung dazu, Dreiecksungleichung!).

Jetzt wollen wir sehen, daß man mit komplexen Zahlen dasselbe wie mit reellen machen kann.

d) *Geometrische Reihe:* Sei $z \in \mathbb{C}$, zeige, daß dann

$$(1 - z) \cdot \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 - z^{n+1}.$$

e) *Polynome:* Seien $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ und $a \in \mathbb{C}$; definiere wie immer $P'(X) := \sum_j a_j j X^{j-1}$. Berechne zu jedem reellen $r > 0$ ein K, so daß in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z - a| < r\}$ gilt:

$$|P(z) - P(a) - P'(a)(z - a)| \leq K|z - a|^2.$$

Mathematatik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 7.8 (Lineare Unabhängigkeit)

Bitte zuerst die Aufgabe lesen!!

a) $\Rightarrow$ *c)* Nach Definition von *Span* erzeugen u und v den $Span(u,v)$, also bilden sie ein Erzeugendensystem. Man kann eine Teilmenge dieses Erzeugendensystems auswählen, das eine Basis bildet. Da $\dim(Span(u,v)) = 2$, muß diese Basis 2 Elemente enthalten, also muß (u,v) selbst die Basis sein, insbesondere linear unabhängig, so wie wir beweisen wollten.

c) $\Rightarrow$ *b)* Da u, v linear unabhängig sind, kann man eine Basis von $Span(u,v)$ finden, die u, v enthält, sagen wir die Basis $u, v, w_1, \ldots, w_r$ (Wenn wir *a)* hätten, würden wir wissen, daß $r = 0$). Dann wissen wir, daß es eine lineare Abbildung (hier gab es wieder mal ein Tipfehler: $\mathbb{Q}^2$ muß K^2 heißen!!!)

$$\phi\colon Span(u,v) \to K^2$$

so daß $\phi(u) = (1,0), \phi(v) = (0,1)$ und $\phi(w_i) = 0$ für alle i.

b) $\Rightarrow$ *a)* Da man $Span(u,v)$ mit 2 Elementen erzeugen kann, gilt $dim(Span(u,v)) \leq 2$. Anderseits hat man einen Homomorphismus $\phi\colon Span(u,v) \to K^2$, so daß $(1,0),(0,1) \in Bild(\phi)$. Da $((1,0),(0,1))$ eine Basis von K^2 bildet hat man $Bild(\phi) = K^2$. Also ist ϕ surjektiv. Wegen der *Dimensionsformel* hat man $dim(Span(u,v)) \geq 2$, also haben wir $dim(Span(u,v)) = 2$.

Aufgabe 6.8 (Polynome in der Basis $\{1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\}$)

a) Wie man durch Differenzieren und Auswerten an der Stelle a sieht, sind die Elemente $1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n$ linear unabhängig, also hat man in einem $n+1$ dimensionalen Vektorraum $n+1$ linear unabhängige Elemente, also bilden sie eine Basis. Insbesondere erzeugen sie den ganzen Vektorraum.

b) Man hat wegen der Binomische Formel

$$X^k = ((X-a)+a)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i}(X-a)^i$$

Also kann man die gesuchten Koeffizienten explizit für die Polynome der Form X^k $(0 \leq k \leq n)$ ausrechnen. Da die Polynome $\{X^k\}$ eine Basis bilden, kann man die gesuchten neuen Koeffizienten für alle Polynome berechnen.

Bemerkung: Um mit Summenzeichen zu üben, ist es eine gute Aufgabe, die explizite Formel vollständig aufzuschreiben.

c) Sei $P(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j (X-a)^j$, dann hat man für alle $0 \leq k \leq n$, $P^{(k)}(a) = k! \cdot b_k$. Der k. Koeffizient des Taylorpolynoms T_n ist genau $\frac{P^{(k)}(a)}{k!} = b_k$, also haben beide Polynome genau dieselben Koeffizienten bezüglich der Basis $1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n$.

Was zeigt diese Aufgabe? Schreibe ein Polynom in der Basis $1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n$, dann hast Du so viel Information an der Stelle a, wie normalerweise (also wenn das Polynom *in der Basis* $1, X, X^2, \ldots, X^n$ *geschrieben ist) an der Stelle* 0*. Oft wird alles viel leichter wenn man die richtige Basis wählt!!*

Aufgabe 6.3 (Beste Approximationen)

Hier sind wir an etwas interessiert was an der Stelle a passiert, also wenden wir unser vorhergehendes Credo an und arbeiten in der Basis $1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n$ von $\mathbb{Q}_n[X]$.

a) Aus der Vorlesung weiß man, daß die Tangente diese Eigenschaft hat, also bleibt nur die Eindeutigkeit zu beweisen. Sei $L(X)$ ein zweites Lineares Polynom, so daß wir $K, c > 0$ haben, so daß für alle $x \in (a-c, a+c)$ gilt (warum ist dasselbe K, c für T_1, L erlaubt?):

$$|P(x) - L(x)| \leq K(x-a)^2 \text{ und } |P(x) - T_1(x)| \leq K(x-a)^2$$

Erstens folgt für $x = a$: $L(a) = P(a)$ und (wie bekannt) $T_1(a) = P(a)$. Um auch die Steigungen zu vergleichen folgere mit der Dreiecksungleichung für alle $x \in (a-c, a+c)$:

$$|(T_1 - L)(x)| = |(T_1 - P + P - L)x)| \leq |T_1(x) - P(x)| + |P(x) - L(x)| \leq 2K(x-a)^2$$

Wir schreiben $T_1(X)$ und $L(X)$ in der Basis $\{1, X-a\}$ von $\mathbb{R}_1[X]$:

$$T_1(X) = P(a) + P'(a) \cdot (X-a), \; L(X) = P(a) + \beta \cdot (X-a)$$

Dann haben wir für alle $x \in (a-c, a+c)$

$$|T_1(x) - L(x)| = |P'(a)(x-a) - \beta(x-a)| = |P'(a) - \beta| \cdot |x-a|$$

Also nach Annahme

$$|P'(x) - \beta| \cdot |x-a| \leq 2K(x-a)^2$$

Dies ist aber nur möglich wenn $|P'(x) - \beta| = 0$ (Vergleiche mit der Aufgabe 1.4). Also sind die Koefficienten von $T_1(X)$ und von $L(X)$ in der Basis $1, X-a$ gleich, also sind beide Polynome gleich und die Eindeutigkeit ist gezeigt.

b) Arbeite weiter in der Basis $(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n$. Sei $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i (X-a)^i$, dann ist (vergleiche mit der Aufgabe 6.8) $T_k(x) = \sum_{i=0}^k a_i (X-a)^i$. Wenn $k \geq n$ ist, haben wir $P(X) = T_k(X)$ und wir brauchen nichts zu zeigen, also dürfen wir annehmen $k < n$. Wir wollen eigentlich zeigen, daß es c, K gibt; Polynome sind so einfach, daß wir **irgendein** festes $c > 0$ **wählen** und nun zeigen, daß wir dazu ein K_c finden, so daß c, K_c die gewünschte Eigenschaft besitzt. Sei $x \in (a-c, a+c)$, dann gilt

$$|P(x) - T_k(x)| = |\sum_{i=k+1}^{n} a_i (x-a)^i| = |\sum_{i=0}^{n-k-1} a_{k+1+i} (x-a)^i| \cdot |x-a|^{k+1}$$

Wegen der Dreiecksungleichung bekommen wir *(ganz häufige Abschätzung)*:

$$|\sum_{i=0}^{n-k-1} a_{k+1+i} (x-a)^i| \leq \sum_{i=0}^{n-k-1} |a_{k+1+i}| \cdot |(x-a)^i| \leq \sum_{i=0}^{n-k-1} |a_{k+1+i}| \; c^i$$

Wir definieren $K_c = \sum_{i=0}^{n-k-1} |a_{k+1+i}|\ c^i$ (wieder mal haben wir **explizit** aus den Koeffizienten die Schranken berechnet!!!). Dann haben wir die gewünschte Ungleichung:

$$|P(x) - T_k(x)| = |\sum_{i=0}^{n-k-1} a_{k+1+i}(x-a)^i| \cdot |x-a|^{k+1} \leq K_c|x-a|^{k+1}$$

c) Man verfolgt genau dasselbe Muster wie im Teil a). Es ist eine gute Aufgabe. Hat man Schwierigkeiten die Aufgabe allgemein zu lösen, soll man sie für $k = 2$ machen.

Aufgabe 5.7 A (Schranken und Gleichheit im Monotoniesatz)

Teil a), $|P(y) - P(y_0)| \leq K \cdot |y - y_0|$, mit derselben Rechnung wie in 6.3b).
Teil b) Wir haben als Anwendung des Monotoniesatzes $P(x) \leq P(a) + L \cdot (x - a)$ für alle $x \in [a, a + \frac{1}{8}]$. (**Das solltet Ihr selber machen können.**)

Jetzt diskutieren wir die Gleichheit, also:
Nehmen wir an, daß $P(a + \frac{1}{8}) = P(a) + \frac{L}{8}$ gilt. Wieder sagt der Monotoniesatz, daß für $x \in [a, a + \frac{1}{8}]$ gilt

$$P(a + \frac{1}{8}) - P(x) \leq L((a + \frac{1}{8}) - x) \text{ oder } P(x) \geq P(a + \frac{1}{8}) + L(x - (a + \frac{1}{8}))$$

Bemerkung: Der Monotoniesatz sagt in der Formulierung der Vorlesung: Fahren zwei Autos zur selben Zeit von irgendwo ab, so kommt das schnellere in der gleichen Zeit weiter. Hier haben wir folgende Aussage: Wenn zwei Autos zur selben Zeit irgendwo ankommen dann muß das langsamere näher am Zielort losgefahren sein.
Nach Annahme ist $P(a + \frac{1}{8}) = P(a) + \frac{L}{8}$, also $P(a + \frac{1}{8}) + L(x - (a + \frac{1}{8})) = P(a) + L \cdot (x - a)$. Aus den beiden Ungleichungen

$$P(a) + L \cdot (x - a) \geq P(x) \geq P(a + \frac{1}{8}) + L(x - (a + \frac{1}{8})) = P(a) + L \cdot (x - a)$$

folgt die Gleichheit der Polynomfunktionen $P(x) = P(a) + L \cdot (x - a)$ und daher der Polynome.

Aufgabe 8.5 (2. Ableitung beschränken) Standard Argumentation!!

Betrachte nach Tip 0.1 die beiden Differenzfunktionen

$$h_1(x) := f(x) + \frac{B}{2}(x - a)(x - b), \quad h_2(x) := \frac{B}{2}(x - a)(x - b) - f(x).$$

Für beide gilt wegen der Voraussetzungen über f: $h_j(a) = 0 = h_j(b)$ und $h_j'' \geq 0$. Die beiden Ungleichungen der Behauptung besagen $h_1 \leq 0,\ h_2 \leq 0$. (Ich schreibe jetzt nur noch h.)
Wegen $h'' \geq 0$ sagt der Monotoniesatz h' ist wachsend. Sei $c \in [a, b]$.

Wir machen die Fallunterscheidung: $h'(c) \geq 0$ **oder** $h'(c) \leq 0$.

Da h' wächst gilt im ersten Fall $h' \geq 0$ in $[c, b]$, im zweiten Fall $h' \leq 0$ in $[a, c]$. Im ersten Fall ist (Monotoniesatz!) h wachsend in $[c, b]$, also $h(c) \leq h(b) = 0$; im zweiten Fall ist h fallend in $[a, c]$, also $0 = h(a) \geq h(c)$, wie behauptet.
Bemerkung: Vergleiche mit Aufgaben 5.7, 7.6 a), besonders den Nutzen des Differenzen-Tips.

Aufgabe 5.5 A (Polynome mit großen Argumenten)

Sei $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Q}_n[X]$ mit $a_n = 1$. Zunächst Teil a).
Man hat ($x \neq 0$):

$$\left|\frac{P(x)}{x^n} - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{i+1-n}\right| \leq \frac{1}{|x|}\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\;|x^{i+1-n}|$$

Setze $K := \sum_{j=0}^{n} |a_j|$, dann gilt für alle $x \notin [-1,1]$ (oder $|x| > 1$):

$$\left|\frac{P(x)}{x^n} - 1\right| \leq \frac{K}{|x|}.$$

Außerhalb größerer Intervalle $[-R,R]$, ($R > 1$), ist natürlich $1/|x| \leq 1/R$; wählt man z.B. $R_0 := \max\{1, 10K\}$, so hat man für alle $x \notin [-R_0, R_0]$ (d.h. $|x| > R_0$)

$$\left|\frac{P(x)}{x^n} - 1\right| \leq \frac{1}{10} \text{ oder, Dreiecksungleichung! } 0.9 \leq \left|\frac{P(x)}{x^n}\right| \leq 1.1.$$

Und hieraus folgen die zwei weiteren Teile durch Multiplizieren mit Potenzen von $|x|$.

Aufgabe 3.3 L (Berührung in zwei Punkten (später: Splines))

Wir definieren ein lineare Abbildung

$$L\colon \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}^4,\; L(P) := (P(a_1), P'(a_1), P(a_2), P'(a_2))$$

Wir wollen zeigen, daß es ein eindeutiges P gibt mit: $L(P) = (y_1, m_1, y_2, m_2)$. –
Bemerkung. *In Anwendungen ist wichtig* $L(P) = (f(a), f'(a), f(b), f'(b))$, *weil dann ein kompliziertes* f, *falls z.B.* $f^{(4)} \leq C$ *bekannt ist, durch* P *gut approximiert wird.*
Beide Vektorräume haben dieselbe Dimension, nämlich 4. Also sagt der Dimensionssatz: *Ist* L *surjektiv, dann ist* $\dim(Bild(L)) = \dim\mathbb{Q}^4 = 4$, *also* $\dim(Kern(L)) = \dim(\mathbb{Q}_3[X]) - \dim(Bild(L)) = 4 - 4 = 0$, *also* $Kern(L) = \{0\}$, *also ist* L *injektiv (vgl. Aufg. 7.2). Also,* **wenn wir die Existenz zeigen, haben wir die Eindeutigkeit auch gezeigt!!!**
Sei $e_1, \ldots, e_4$ die Standard Basis von $\mathbb{Q}^4$; L ist sicher dann surjektiv, wenn $e_1, e_2, e_3, e_4 \in Bild(L)$. — Wir werden nur 2 Polynome P_1, P_2 suchen so daß $L(P_1) = e_1$ und $L(P_2) = e_2$. Die anderen findet man nach dem gleichen Muster.
Das Polynom P_2 zu finden ist ganz leicht, es hat eine einfache und eine doppelte Nullstelle:

$$P_2(X) := \frac{1}{(a_1 - a_2)^2}(X - a_1)(X - a_2)^2,\; P_2'(a_1) = 1, \text{ also } L(P_2) = e_2.$$

Die Suche nach P_1 beginnen wir mit einer doppelten Nullstelle bei a_2: $Q_1(X) := (X - a_2)^2$.
Das ist ein guter Anfang, denn $L(Q_1) = ((a_1 - a_2)^2, 2(a_1 - a_2), 0, 0)$, läßt sich als Linearkombination von $e_1, e_2 = L(P_2)$ darstellen.

$$L(Q_1) = (a_1 - a_2)^2 \cdot e_1 + 2(a_1 - a_2) \cdot e_2 = (a_1 - a_2)^2 \cdot e_1 + 2(a_1 - a_2) \cdot L(P_1).$$

Löst man nach e_1 auf, so bekommt man

$$e_1 = \frac{1}{(a_1-a_2)^2}(L(Q_1) - 2(a_1-a_2)L(P_2)) = L(\frac{1}{(a_1-a_2)^2}(Q_1 - 2(a_1-a_2)\cdot P_2)).$$

Also nehmen wir einfach $P_1 := (a_1-a_2)^{-2}(Q_1 - 2(a_1-a_2)P_2)$ und haben zwei Polynome P_1, P_2, so daß $L(P_i) = e_i$. — Dasselbe kann man für e_3, e_4 machen.
Also gilt:$e_1, e_2, e_3, e_4 \in Bild(L)$ und wir sind damit fertig.

Aufgabe 3.4 A (Ableitungsregeln bei gröberen Fehlern)

Typische Argumentation für Beweise von Produktregeln. Seien f, g, so daß es $c_f, c_g > 0$ und $K_f, K_g > 0$ gibt, so daß für alle $x \in (a-c_f, a+c_f)$ bzw. alle $x \in (a-c_g, a+c_g)$ gilt

$$|f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))| \le K_f|x-a|^{3/2} \text{ bzw. } |g(x)-(g(a)+g'(a)(x-a))| \le K_g|x-a|^{3/2}.$$

Dann soll gezeigt werden, daß auch das Produkt $(f\cdot g)(x)$ von der erwarteten Tangente bis auf einen derartigen Fehler approximiert wird. Die Anfangsidee ist, es mit dem kleineren der beiden Intervalle zu versuchen, also $c := min(c_f, c_g)$ zu setzen und für alle $x \in [a-c, a+c]$ zu schreiben: *Funktion plus Fehler gleich Tangente*, also: $f(x) + h_1(x) = (f(a) + f'(a)(x-a))$ und $g(x) + h_2(x) = (g(a) + g'(a)(x-a))$. (Es ist natürlich egal, aber wir schreiben den Fehler $h_j(x)$ auf die linke Seite, weil der Ausdruck für die Tangente länger ist.)
Nun sollen diese beiden Gleichungen multipliziert und alle Fehler mit einer neuen Konstanten K geschrieben werden als $\le K\cdot|x-a|^{3/2}$. Dazu werden Schranken für $f(x), g(x)$ benötigt, die wir mit der Dreiecksungleichung aus den Voraussetzungen gewinnen:

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f'(a)|\cdot c + K_f\cdot c^{3/2} =: S_f, \quad |g(x)| \le |g(a)| + |g'(a)|\cdot c + K_g\cdot c^{3/2} =: S_g.$$

Auf der linken Seite schreiben wir zunächst: *Produkt minus Hauptterm*, also:

$$|(f(x)+h_1(x))(g(x)+h_2(x)) \; - \; f(x)g(x)| \le (S_fK_g + S_gK_f + K_fK_gc^{3/2})|x-a|^{3/2}.$$

Das Produkt der Tangenten sortieren wir als *Linearen Hauptterm plus quadratischen Fehler:*

$$\big(f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))\cdot(x-a)\big) \quad + \quad (f'(a)g'(a))(x-a)^2.$$

Dies setzen wir in der vorherigen Zeile für das Produkt $(f+h_1)(g+h_2)$ ein und schlagen den quadratischen Fehler mit der Dreiecksungleichung zu den übrigen Fehlern; dann definieren wir die benötigte Konstante: $K := (S_fK_g + S_gK_f + K_fK_gc^{3/2}) + |f'(a)g'(a)|c^{1/2}$, die die Fehler zum gewünschten Schlußergebnis zusammenfaßt (für alle $x \in [a-c, a+c]$ gilt):

$$|f(x)g(x) - (f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))\cdot(x-a))| \le K\cdot|x-a|^{3/2}.$$

Aufgabe 8.3 A (Die Wurzelfunktion)

Zu Beginn des Semesters hatten wir zu einer festen positiven Zahl $x > 0$ Approximationen für $\sqrt{x}$ bestimmt: Aus $b \ge \sqrt{x}$ folgt $a := x/b \le \sqrt{x}$. (Dies wird gleich mit $b = b_k$ benutzt.) Natürlich ist dann $a\cdot b = x$ und nach Aufgabe 0.1 ist $2AB \le A^2 + B^2$ (nämlich wegen $0 \le (A-B)^2$), also $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sqrt{b} \le (a+b)/2$. Daher konnten wir eine Intervallschachtelung definieren durch $b_2 := (a+b)/2 \ge \sqrt{x}$, $a_2 := x/b_2 \le \sqrt{x}$ und $b_{k+1} := (a_k+b_k)/2 \ge \sqrt{x}$, $a_{k+1} := x/b_{k+1} \le \sqrt{x}$, $k = 3, 4, \ldots \in \mathbb{N}$. Weil b_{k+1} Mittelpunkt von $[a_k, b_k]$ ist, und weil auch $a_{k+1} \in [a_k, b_k]$ ist, so ist jedes folgende Intervall Teilintervall von und kürzer als die Hälfte des vorhergehenden Intervalls: *Das ist die Intervallschachtelungseigenschaft und diese konvergiert gegen $\sqrt{x}$, weil nach Konstruktion $\sqrt{x} \in [a_k, b_k]$.*
Die gestellte Aufgabe unterscheidet sich von dieser Vorführung nur dadurch, daß erstens $b = b(x) := (1+x)/2 \ge \sqrt{x}$ gewählt wurde und zweitens die daraus berechneten Endpunkte der Intervallschachtelung ebenfalls als Funktionen von x betrachtet wurden.

Geometrische Reihe: Mischung aus 4.2, 5.8, 6.4 und 7.3

In der Aufgabe 4.2 habt Ihr für $x \neq 1$ und alle n die folgenden Gleichheiten bewiesen; diese sind für $x \in (-1,1)$ besonders wichtig, für $0 \leq x < 1$ kamen in 5.8b noch die Ungleichungen hinzu:

$$(n+1)x^n \leq \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

Ab jetzt werden wir mit $0 < q < 1$ und mit $x \in [-q, q]$ arbeiten.
Aufgabe 5.8 c) Man hat:

$$|\frac{1}{1-x} - \sum_{j=0}^{n} x^j| = |\frac{x^{n+1}}{1-x}| \leq \frac{1}{1-q} \cdot q^{n+1} \quad (\text{ und mit 5.8b}) \ \leq \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{n+2}$$

Setzt man daher $K_q := (1-q)^{-2}$, so ist die in 5.8 c) gewünschte Ungleichung bewiesen. — In der Aufgabe 7.3 c) war gefragt, ob die Folge $(\frac{1}{1-q} - \sum_{k=0}^{n} q^k)_n$ eine Nullfolge ist. Es sollte jetzt keine Schwierigkeit geben diese Aufgabe zu lösen.
Aufgaben 6.4 b) Zu der Differenz $D_n(x) := (1-x)^{-2} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k$ treten in der Analysis zwei Fragen auf: Ist $\{D_n(x)\}_n$ bei festem x eine Nullfolge? Kann man $|D_n(x)| \leq \epsilon$ bei festem n durch Wahl von q (mit $x \in [-q, q]$) erreichen? Mit der zweiten zitierten Formel aus 4.2 können wir diese Differenz ausrechnen und dann abschätzen:

$$|D_n(x)| = |\frac{1}{(1-x)^2} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k| = |\frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}| \leq \frac{(n+1)q^n}{(1-q)^2}.$$

Dies ist sogar $\leq \epsilon q^{n-1} \leq \epsilon$, wenn erstens $q \leq 1/2$ und zweitens $q \leq \epsilon/(4n+4)$ gewählt wird. — Für die Nullfolgenabschätzung quadriere die Ungleichung aus 4.2 (mit $\sqrt{q}$ statt q), um die zweite Ungleichung aus 5.8b zu erhalten, nämlich:

$$(n+1)^2 \cdot (\sqrt{q})^{2n} \leq \Big(\frac{1}{1-\sqrt{q}}\Big)^2 \quad \text{oder} \quad (n+1)q^n \leq \Big(\frac{1}{1-\sqrt{q}}\Big)^2 \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Setzt man jetzt $K_q := (1-q)^{-2} \cdot (1-\sqrt{q})^{-2}$, so ist $|D_n(x)| \leq K_q/(n+1)$, wie gewünscht.

BEMERKUNG. *Diese Aufgabe wird noch eine große Rolle spielen, weil es* **sehr selten** *ist, daß für eine Funktionenfolge $G_n(x) := (1-x)^{-1} - \sum_{k=0}^{n} x^k$, die eine* **Nullfolge** *ist, auch die Folge der* **differenzierten** *Funktionen $D_n(x) = G_n'(x)$ eine* **Nullfolge** *ist (hier für $x \in [-q, q]$). Das das bei der geometrischen Reihe klappt, spielt bei der Behandlung der Potenzreihen eine ganz wesentliche Rolle. — Die Dreiecksungleichung und die geometrische Reihe sind die wichtigsten elementaren Handwerkszeuge, habe ich das oft genug gesagt?!.*

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 11.1 L (Skalarprodukte)

Für $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ sei $< P, Q > := 2P(0)Q(0) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4)$.

a) Zeige, daß $< \ , \ >$ ein Skalarprodukt ist.
b) Wende das Orthonormalisierungsverfahren an auf die Basis $(1, X, X^2)$.
c) Gib eine weitere Orthonormalbasis an (ohne viel zu rechnen!).
d) Wähle eine skalarprodukterhaltende (=orthogonale=isometrische) Abbildung
$$\phi : (\mathbb{R}_2[X], < \ , \ >) \to (\mathbb{R}^3, \text{standard Skalarprodukt})$$

Aufgabe 11.2 L (Skalarprodukt auf $\mathrm{End}(V)$)

Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 3, $< \ , \ >$ ein Skalarprodukt auf V und (e_1, e_2, e_3) eine Orthonormalbasis. Definiere für $L, M \in \mathrm{End}(V)$
$$<< L, M >> := < Le_1, Me_1 > + < Le_2, Me_2 > + < Le_3, Me_3 >$$

a) Zeige, daß $<< \ , \ >>$ ein Skalarprodukt ist.
b) Zeige, daß die Standardbasis von $\mathrm{End}(V)$ (bezüglich der Basis (e_1, e_2, e_3) von V) eine Orthonormalbasis von $<< \ , \ >>$ ist.

Aufgabe 11.3 L (Polynomquotienten)

Sei K ein Körper. Betrachte die Menge der Paare (P, Q) mit $P \in K[X]$ und $Q \in K[X] - \{0\}$. Wir schreiben $(P_1, Q_1) \simeq (P_2, Q_2)$ genau dann wenn $P_1Q_2 - P_2Q_1 = 0$ gilt.

a) Zeige, daß $\simeq$ eine Äquivalenzrelation ist. (Formuliere vorher, was zu zeigen ist.)

Die Klasse von (P, Q) wird durch P/Q oder durch $\frac{P}{Q}$ bezeichnet. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird durch $K(X)$ (Runde Klammern!!!) bezeichnet. Zunächst wollen wir aus $K(X)$ einen Körper machen. Dafür brauchen wir mindestens Addition und Multiplikation und so wie es in der Vorlessung gesagt wurde, kann man sie nun repräsentantenweise definieren, also
$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} := \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \quad \frac{P_1}{Q_1}\frac{P_2}{Q_2} := \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

b) Zeige, daß die Multiplikation und die Addition wohldefiniert sind, also, daß die angegebenen Definitionen **nicht** von der Wahl der Repräsentanten abhängen.
c) Zeige, daß mit diesen Operationen $K(X)$ zu einem Körper wird.

Bemerkung: In der Vorlessung wurde a) gezeigt und die ähnliche Konstruktion von $\mathbb{Q}$ erwähnt.

Aufgabe 11.4 A (Produktformel für Taylorpolynome)

Für $P \in \mathbb{R}[X]$ und $k \in \mathbb{N}$ sei $T_k(P)$ das Taylorpolynom vom Grad k an der Stelle $a \in \mathbb{R}$.

a) Zeige, daß $T_k \colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}_k[X]$ eine lineare Abbildung ist.
b) Lies zweimal und zeige, daß für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt: $(T_k \circ T_n)(P) = T_{\min\{k,n\}}(P)$
c) Aus der Aufgabe 6.3 b) weiß man, daß es $K > 0$ so gibt, daß für alle $x \in [a-1, a+1]$ gilt: $|P(x) - (T_k(P))(x)| \leq K|x-a|^{k+1}$. Folgere daraus für $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, daß es $C > 0$ gibt so daß für alle $x \in [a-1, a+1]$ gilt:
$$|P(x)Q(x) - (T_k(P))(x)(T_k(Q))(x)| \leq C|x-a|^{k+1}$$

d) Schreibe $(T_k(P))(X)(T_k(Q))(X) =: \sum_{i=0}^{2k} a_i(X-a)^i$ und zeige unter Benutzung von c) und der Eindeutigkeitsaussage der Aufgabe 6.3 c), daß $T_k(PQ) = \sum_{i=0}^{k} a_i(X-a)^i$ ist.

Aufgabe 11.5 A (Vollständigkeit und Halbieren mit Fallunterscheidung: Satz von Heine-Borel)

a) Gib die Definition von "Cauchyfolge" an. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt und unendlich. Zeige, daß es eine Cauchyfolge in A aus paarweise verschiedenen Elementen gibt.

In der Vorlesung hat man zu jeder Cauchyfolge $\{c_n\}_n$ eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n]\}_n$ konstruiert, so daß für alle n $[a_n, b_n]$ **unendlich** viele Glieder der Folge $\{c_n\}_n$ enthält. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt, daß es ein r gibt mit $r \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Beende den Beweis aus der Vorlesung, d.h. zeige, daß $\lim_n c_n = r$.

Aufgabe 11.6 A (Komplexe Ableitung)

a) Seien $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a|, |z| \le R$, zeige, daß $|z^3 - a^3 - 3a^2(z-a)| \le 3R|z-a|^2$ gilt.

b) Sei $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ mit Ableitung $P'(X) \in \mathbb{C}[X]$. Zeige mit dem Schrankensatz, daß für alle $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| \le 1$ gilt: $|P(z) - P(a) - P'(a)(z-a)| \le K|z-a|^2$, wobei K eine Schranke für $|P''(z)|$ ist, falls z in dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C}; |z-a| \le 1\}$ um a liegt.

Aufgabe 11.7 A (Geometrische Majorisierung)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $|a_n| \le 1$. Zeige für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 \le |z| \le q < 1$, daß

$$\left| P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \le \frac{1}{1-q}, \quad \left| P'_n(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k k z^{k-1} \right| \le \frac{1}{(1-q)^2}, \quad |P_n(z) - P_{n-1}(z)| \le q^n$$

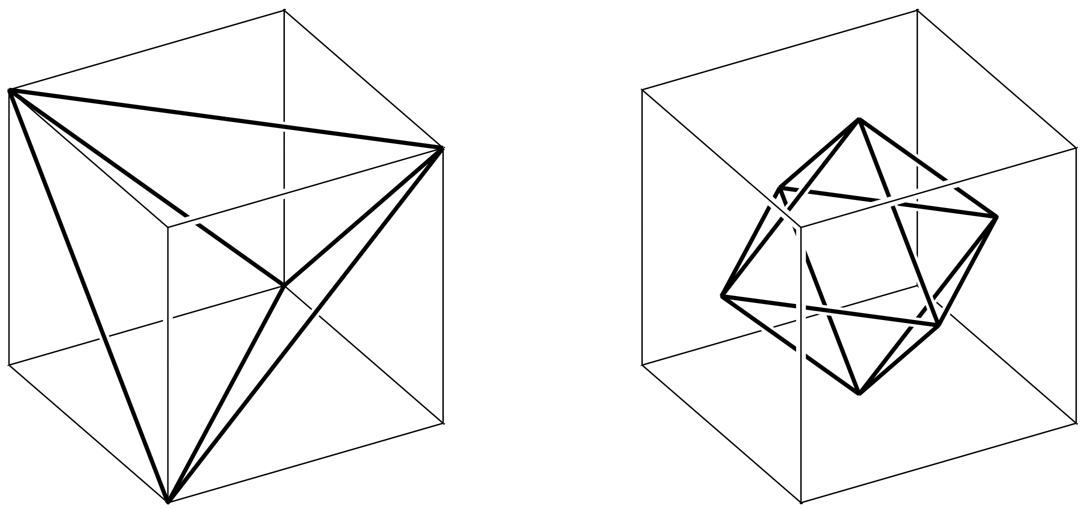
Tip: Vergleiche mit dem Weihnachtsblatt.

Aufgabe 11.8 L (Auch A) (Euklidische Geometrie)

a) Berechne die Länge der Raumdiagonale des Einheitwürfels.

b) Berechne den Winkel zwischen zwei Flächendiagonalen in einer Würfelecke.

c) Berechne den Winkel zwischen zwei Seitendreiecken des Tetraeders (linkes Bild) und den Winkel zwischen zwei Seitendreiecken (mit gemeinsamer Kante) des Oktaeders (rechts).



Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 12.1 L (Skalarprodukte II)

a) Welche der folgenden "Produkte" sind Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum der Matrizen $M_n(\mathbb{R})$? Für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ definiere:
$< A, B >_1 := \sum_i A_{i,i} B_{i,i}$, $< A, B >_2 := \sum_i A_{i,i} \sum_j B_{i,j}$, $< A, B >_3 := \sum_{i,j} A_{i,j} B_{i,j}$,
$< A, B >_4 := \sum_{i,j} A_{i,j} B_{j,i}$ und $< A, B >_5 := \sum_{i,j} |A_{i,j}|\,|B_{i,j}|$.
Welche der Skalarproduktaxiome sind jeweils nicht erfüllt?

b) Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $|v|^2 := \langle v, v\rangle$. Zeige, für alle $v, w \in V$ die *Parallelogramidentität*: $|v + w|^2 + |v - w|^2 = 2|v|^2 + 2|w|^2$
und die *Polarisierungsidentität:* $4\cdot < v, w >= |v + w|^2 - |v - w|^2$.

Ausblick: Gilt die Parallelogramidentität für eine Norm $|v|$, so definiert die Polarisierungsformel ein Skalarprodukt.

Aufgabe 12.2 L (Isometrien oder orthogonale Abbildungen)

a) Sei $< , >$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Welche Matrizen $A \in M_2(\mathbb{R})$ erfüllen $< Ax, Ay >=< x, y >$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$? (Bedingungen $(a_{11})^2 + (a_{21})^2 = \ldots$ usw.)

b) Sei $\phi \in [0, 2\pi)$. Bestimme eine Matrix $A_{z,\phi} \in M_3(\mathbb{R})$, die bezüglich der Standard-Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$ eine Drehung vom Winkel ϕ um die z-Achse in $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

c) Sei $\theta \in [0, \pi)$. Suche jetzt $A_{y,\theta} \in M_3(\mathbb{R})$, die (bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^3$) eine Drehung vom Winkel θ um die y-Achse in $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

d) Wende $A_{z,\phi} \cdot A_{y,\theta}$ auf den Spaltenvektor $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ an. (Sie erhalten jeden Punkt der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2$, beschrieben in "geographischen Koordinaten", Greenwich: $\phi = 0$.)

Aufgabe 12.3 L (Auch A) (Exponentialreihe und Matrizen)

a) Sei $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \sim M_3(\mathbb{R})$; berechne ein $C > 0$ mit : $|Lx| \le C|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Folgere, daß für alle $x \in \mathbb{R}^3$ und alle $k \ge 1$ gilt: $|L^k x| \le C^k |x|$.

c) Folgere, daß für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die Folge $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} L^k x)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^3$ ist, also konvergiert.

Aufgabe 12.4 L (Auch A) (Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{C}$)

Wahrscheinlich habt ihr inzwischen gemerkt, daß es nützlich ist, Polynome als Produkte von Linearfaktoren zu schreiben. Dafür muß man Nullstellen haben. Leider gibt es Polynome in $\mathbb{R}[X]$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$. Diese Aufgabe soll zeigen, daß über $\mathbb{C}$ die Situation leichter ist.

a) Aus den Aufgaben 5.5 und 9.4 folgere, daß jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{R}_3[X] \setminus \mathbb{R}_2[X]$ (also in $\mathbb{R}_3[X]$ aber nicht in $\mathbb{R}_2[X]$) mindestens eine reelle Nullstelle hat.

b) Zeige, daß jedes Polynom aus $\mathbb{C}_2[X]$ in Linearfaktoren zerfällt.

c) Folgere, daß jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$ sich als Produkt von linearen Polynomen mit **komplexen** Koeffizienten schreiben lässt.

Es gilt sogar, daß jedes Polynom $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, darauf müssen wir noch etwas warten...

Aufgabe 12.5 A (Monotoniesatz)

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar. Seien $C > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \geq x_0$ gilt: $\frac{f'}{f}(x) - C > \frac{g'}{g}(x) > 0$. Zeige (ein Resultat analog zu Aufgabe 5.5), daß

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \text{ (zu jedem } \epsilon > 0 \text{ gibt es } R_\epsilon \text{ so daß } x \geq R_\epsilon \Rightarrow \ldots)$$

Aufgabe 12.6 A (Komplexe Exponentialfunktion)

a) In der Vorlesung wurde die Formel $e^{x+a} = e^x e^a$ für alle $x, a \in \mathbb{R}$ gezeigt. Beweise dies für alle $x, a \in \mathbb{C}$. (Tip: Verändere den Beweis der Vorlesung leicht, Schrankensatz!!!)

b) In der Vorlesung hat man die Reihen für die Exponentialfunktion, für den Sinus und für den Cosinus gesehen. Schreibe sie auf und zeige damit für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e^{i\alpha} = \exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad \text{(Euler, de Moivre)}$$

c) Folgere aus a) und b), daß für alle $z \in \mathbb{C}$ $\quad e^{z+2\pi i} = e^z \quad$ gilt.

d) Aus a) und b) folgere ebenso die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

Aufgabe 12.7 A (Geometrische Majorisierung II)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $|a_n| \leq 1$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ setze $P_n(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

a) Sei $0 < q < 1$, wiederhole (Weihnachtsblatt): $D_n(q) := (1-q)^{-2} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)q^k \ \geq 0$.

b) Zeige für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|, |w| \leq q$ und **für alle** n:

$$|P_n(z) - a_0| \leq \frac{q}{(1-q)}, \quad |P_n(z) - P_n(w)| \leq \frac{|z-w|}{(1-q)^2} \qquad \textit{Tip: Schrankensatz.}$$

Aufgabe 12.8 A (Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten)

Mit der komplexen Exponentialfunktion definiere für $-1 < x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{C}$:

$$f_\alpha(x) := (1+x)^\alpha := \exp(\alpha \cdot \log(1+x)), \quad \text{nächste Woche auch } \ x \in \mathbb{C}, -1 \leq \mathrm{real}(x).$$

a) Berechne $f'_\alpha(0), \ldots, f^k_\alpha(0)$ und bezeichne deshalb den k-ten Taylorkoeffizienten von f_α bei 0 mit $f^k_\alpha(0)/k! =: \binom{\alpha}{k}$, speziell $\binom{\alpha}{0} = 1$. Zeige durch Induktion, daß $\alpha \mapsto P_k(\alpha) := \binom{\alpha}{k}$ eine **Polynom**funktion vom Grad $\leq k$ ist mit $P_{k+1}(X) = P_k(X) \cdot (X-k)/(k+1)$, $P_{k+1}(X+1) \cdot (X-k) = P_{k+1}(X) \cdot (X+1)$, $\qquad \binom{X+1}{n} = \binom{X}{n} + \binom{X}{n-1}$.

b) Seien $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ fest. Zeige durch Induktion für alle $k \in \mathbb{N}$ die Formel

$$P_{a,n}(k) := \binom{a+k}{n} - \sum_{i=0}^n \binom{a}{n-i}\binom{k}{i} = 0$$

c) Folgere, daß das Polynom $P_{a,n}(X) \in \mathbb{C}[X]$ null ist, also

$$\text{Für alle } a, b \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ gilt:} \qquad \binom{a+b}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{a}{n-i}\binom{b}{i}.$$

Wichtig: Anmeldung für die Analysisklausur (am Mo 14.2.) beim Analysis-Übungsleiter erforderlich, schriftlich mit Matrikelnummer …

Mathematatik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Aufgabe 13.1 L (Symmetrische Endomorphismen)

Sei der Endomorphismus L von $\mathbb{R}^2$ gegeben (bezüglich der Standard-Basis) durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme λ_1, λ_2 so daß der Rang von $A - \lambda_1 \mathrm{Id}$ und $A - \lambda_2 \mathrm{Id}$ kleiner als 2 ist.

b) Zeige, daß es eine ON-Basis (f_1, f_2) von $\mathbb{R}^2$ (mit standard Skalarprodukt) gibt, so daß

$$Lf_i = \lambda_i f_i, \quad i = 1, 2$$

c) Bestimme die Matrix von L bezüglich der Basis (f_1, f_2).

Aufgabe 13.2 L (Kürzeste Verbindung)

Seien $V \subset \mathbb{R}^3$ (mit standard Skalarprodukt) ein 2-dimensionaler Unterraum und $w \in \mathbb{R}^3 \setminus V$:

a) Zeige, daß es $x \in V$ gibt mit $w - x$ orthogonal zu V (Tip: Wähle (v_1, v_2) als ON-Basis von V, dann wende das Orthonormalisierungsverfahren auf (v_1, v_2, w) an.)

b) Zeige, daß für alle $y \in V \setminus \{x\}$ gilt: $|w - y| > |w - x|$ (also ist x der zu w nächste Punkt in V). *Tip:* Pythagoras.

Aufgabe 13.3 L (Gleichungssysteme und Matrix-Inverse)

Seien folgende Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & -20/65 & 48/65 \\ 4/5 & 15/65 & -36/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Rechne nach, daß die Spalten von A eine ON-Basis bilden (die Zeilen auch?).

b) Sei $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ die standard Basis. Bestimme v_1, v_2, v_3 und $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ so, daß die Gleichungssysteme $Av_i = e_i$ und $Bw_i = e_i$, $i = 1, 2, 3$, gelöst sind .

c) Bestimme A^{-1} und B^{-1}.

Tip und Bemerkung Wenn Ihr Arbeitsaufwand für A und B gleich ist, haben Sie eine große Hilfe übersehen.

Aufgabe 13.4 L (Auch A) (Exponentialabbildung und Matrizen II)

Für $t \in \mathbb{R}$ sei L_t der Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$, der bezüglich der Standard Basis von folgender Matrix repräsentiert wird:

$$(L_t) := \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Aufgabe 12.3 wurde gezeigt, daß die Folge (in $\mathbb{R}^2$) $T_{t,n}(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(L_t)^k \cdot x$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ konvergiert. Bestimme jetzt (für das gegebene L_t) den Grenzwert von $T_{t,n}$ in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. (Berechne zum Anfangen A^2, A^3, A^4, A^5).

Aufgabe 13.5 A (Taylorpolynome und Potenzreihen)

Gegeben sei die Potenzreihe $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $|a_i| \leq 1$. Der Beweis der Vorlesung oder Aufgabe 12.7 zeigen daß f (bei $a, |a| < 1$) beliebig oft differenzierbar ist.

a) Bestimme die Taylorpolynome $T_k(f)$ zum Entwicklungspunkt $a = 0$.

b) Sei $0 < q < 1$. Zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq |z| \leq q$ und alle k gilt

$$|f(z) - T_k(z)| \leq \frac{q^{k+1}}{1-q}$$

Also wird f von den Taylorpolynomen **gleichmäßig** (für z mit $|z| \leq q$) **approximiert**.

c) Zeige, daß die Funktion f auf $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ stetig ist.

Aufgabe 13.6 A (Komplexer Logarithmus)

In dieser Aufgabe sollte man die ganze Zeit Aufgabe 12.6 neben sich liegen haben.

a) Zeige, daß die Exponentialabbildung den Streifen $A := \{x + iy \in \mathbb{C} |\ y \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ **bijektiv** auf die rechte Halbebene $B := \{x + iy \in \mathbb{C} | x > 0\}$ abbildet. Was ist das Bild der drei horizontalen Geraden $\{x + iy \in A |\ y = -\pi/4\}$, $\{x + iy \in A |\ y = 0\}$ und $\{x + iy \in A |\ y = \pi/4\}$? Was ist das Bild der beiden vertikalen Segmente $\{x + iy \in A |\ x = 0\}$, $\{x + iy \in A |\ x = 1\}$ und $\{x + iy \in A |\ x = 3\}$.

b) Da $\exp : A \to B$ bijektiv ist, gibt es eine Inverse $\log : B \to A$. Glaube die Kettenregel für die Komposition von komplexen Funktionen und rechne damit $\log'(z)$ sowie die Taylorpolynome $T_k(\log)$ an der Stelle $a = 1$ für alle k aus.

Aufgabe 13.7 A (Wiederholung von Cauchy-Folgen)

a) Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Aus der Vorlesung (mit dem Vollständigkeitsaxiom) weiß man, daß es einen Limes für die Folge $(a_i)_i$ gibt. Benutze das Archimedes Axiom, um zu beweisen, daß es (wie erwartet) **nur einen** Limes gibt.

b) Zeige, daß jede Cauchy-Folge beschränkt ist. *(Wichtiger Hilfssatz, wichtiges Argument)*

c) Seien $(a_i)_i$ und $(b_i)_i$ Cauchy-Folgen. Zeige mit b), daß $(a_i \cdot b_i)_i$ eine Cauchy-Folge ist. (*Bemerkung*: Die Aufgabe ist leicht, es wird aber viel Wert auf die Formulierung gelegt).

Aufgabe 13.8 A (Iterationsverfahren)

Sei $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit $P(-1) < 0$ und $P(1) > 0$. Wir wollen Nullstellen von P mit Fehlerschranken finden; Teil a) ist Wiederholung.

a) Nach dem Zwischenwertsatz gibt es $x \in [-1, 1]$ mit $P(x) = 0$. Dem Beweis des Zwischenwertsatzes folgend gib einen Algorithmus an, der eine Cauchy-Folge $(a_n)_n$ konstruiert, die gegen eine Nullstelle von P konvergiert (Bemerkung: Dieser Algorithmus läßt sich leicht im Computer programmieren, er ist aber nicht sehr effizient).

b) Gegeben $\epsilon > 0$ bestimme n_ϵ aus den Koeffizienten von $P(X)$, so daß für alle $n > n_\epsilon$ gilt: $|P(a_n)| < \epsilon$.

Das war's mit den Übungsaufgaben für's WS!!!

Mathematik I

Dozent: Hermann Karcher, Assistent: Juan Souto Clement

Die Klausuraufgaben werden (wie verabredet) nicht aus diesem Blatt gewählt. Hier wiederholen wir jedoch ältere Argumente und empfehlen daher, die Aufgaben zu machen. – Bis zum Beginn des SS sollten Sie die Teile, in denen $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^d$ zu ersetzen ist, beantworten können.

Aufgabe 14.1 A (Ableitungen f' sind nicht immer stetig)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion definiert durch

$$f(x) := x^2 \sin(1/x) \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(0) := 0$$

a) Zeige, daß f in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und daß f' bei $a = 0$ **nicht** stetig ist.

b) Berechne für $x \neq 0$ so viele Ableitungen wie Du willst. Wenn man z.B. $f^{(5)}(x)$ ausgerechnet hat, kann man ziemlich sicher sein, daß man Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel wie ein Weltmeister beherrscht.

Aufgabe 14.2 L (auch A) (Kontraktions-Lemma)

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dehnungsbeschränkt mit Dehnungsschranke $L < 1$, also $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$. Zeige, daß es ein eindeutiges $x_* \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x_*) = x_*$, also einen Fixpunkt *(Tip: Zeige, daß die Folge* $0, f(0), f^2(0) := f \circ f(0), f^3(0) := f \circ f^2(0), \ldots f^n(0) := f \circ f^{n-1}(0)$ *eine Cauchy-Folge bildet und daß deren Limes ein Fixpunkt ist.)*

b) Gib ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ und so daß es keinen Fixpunkt gibt. (*Tip:* Finde einen genügend flachen Funktionsgraphen, der die Winkelhalbierende $x_1 = x_2$ nicht schneidet.)

c) Nimm jetzt an, daß es $0 < l$ gibt mit:

$$l \cdot |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige daß f bijektiv ist.

d) Sei f wie in c), aber auch differenzierbar. Zeige, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $l \leq |f'(x)| \leq L$. *(Tip: Vergleiche mit der Aufgabe ??? oder benutze direkt die Definition)*

e) Was ändert sich in a)-c), wenn $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{R}^d$ ersetzt wird?

Aufgabe 14.3 A (Cauchyfolgen)

In welchen Beispielen handelt es sich um Cauchy-Folgen? "Ja", "nein" ist keine Antwort, (kurze) *Begründung* angeben!!! und bei Konvergenz eine gute Abschätzung für den Abstand zum Grenzwert. Welche der Grenzwerte kennst Du wieder? (Nur D_n ist etwas schwierig)

a) $(a_n)_n$ mit $a_n := \big(z/(1 + |z|)\big)^n$ mit $z \in \mathbb{C}$.

b) $(b_n)_n$ mit $b_n := (z - 1)^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $|z - 1| > 1$; und was ist mit $B_n := 1/b_n$?

c) $(c_n)_n$ mit $c_n := z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ und $|z| = 1$.

d) $(d_n)_n$ mit $d_n := \sum_{k=2}^{n} (-1)^k / \log(k)$ und $D_n := \sum_{k=2}^{n} 1/\log(k)$.

e) $(e_n)_n$ mit $e_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k / k!$.

f) $(f_n)_n$ mit $f_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ *(Tip:* Wenn Du $\frac{1}{k(k+1)}$ geschickt als Differenz schreibst, findest Du auch $\lim_n f_n$.)

g) Voraussetzung: $z_k \in \mathbb{C}$ und $|z_k| \leq \frac{1}{k(k+1)}$. Untersuche $g_n := \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Aufgabe 14.4 L (auch A) (Potenzreihen)

a) Seien $(a_i)_i$ und $r > 0$ so daß es $i_r > 0$ gibt so daß für all $i > i_r$ gilt: $|a_i r^i| < 10$. Zeige, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ die Potenzreihe $\sum_i a_i z^i$ konvergiert

(Tip: Wenn dies hier zu schwer ist, versuche zum Beispiel $r = 2$. Ähnlich hierzu, aber etwas einfacher, sind die Aufgaben Geometrische Majorisierung I+II).

b) Sei $(b_i)_i$ eine Folge mit $|b_i| \leq 10$ für alle i, gib eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, mit $f^{(i)}(0) = b_i$.

c) Sei $g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ konvergent in einem Ball um 0 und so daß es eine Nullfolge $(z_n)_n$, $z_n \neq z_m$, gibt mit $g(z_n) = 0$ **für alle** n. Zeige dann, daß $g(z) = 0$ ist für alle z in dem Ball.

(Tip: Mach einen indirekten Beweis. Nimm an, daß $g(z) \neq 0$ für irgendein z in dem Ball, dann gibt es $i \in \mathbb{N}$ mit $i! c_i = g^{(i)}(0) \neq 0, \ldots$)

d) Bemerke, daß der Sinus durch eine Reihe gegeben ist und unendlich viele Nullstellen hat. Es ist aber nicht identisch Null. Aufgabe: Lies die Aussage in c) wieder.

e) In Aufgabenteilen a),b) und c) habt ihr wahrscheinlich $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$ angenommen. Das habt ihr allerdings nirgendwo benutzt, also könnt ihr jetzt die drei ersten Teile dieser Aufgabe mit $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}^3$ (oder vorher mit $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}^3$ und $z \in \mathbb{R}$ anstatt $z \in \mathbb{C}$) lösen, es ist nicht schwerer und man wiederholt dabei wichtige Argumente.

Aufgabe 14.5 A (Iterationsverfahren II)

Sei $x_0 \in [2.5, 3.5]$. Zeige, daß die Folge $(x_n)_n$ gegeben durch $x_{n+1} := x_n + \sin(x_n)$ eine Cauchy-Folge ist. Zeige, daß der Limes eine Nullstelle der Sinusfunktion ist. Folgere, daß der Limes genau π ist. – Die erste Nullstelle von cos heißt $\pi/2$. (Das zweite Taylorpolynom von $\sin' = \cos$ bei π ist $T_2(x) = -1 + (x-\pi)^2/2$; aus dem Monotoniesatz folgt $\cos(x) \leq T_2(x)$. Wie folgt daraus mit dem Monotoniesatz, daß sin in $[\pi - \sqrt{2}, \pi + \sqrt{2}]$ höchstens eine Nullstelle hat?) – *Probiere drei Schritte des Verfahrens aus - gut?*

Aufgabe 14.6 L (auch A) (Gymnastik mit Polynomen)

Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung ("Kurve") gegeben durch $c(t) = (P(t), Q(t))$ mit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

a) Zeige, daß c stetig ist *(Tip: Das ist nicht schwieriger als die Aufgabe: Zeige daß Polynome stetig sind!!! Die Schritte sind auch fast dieselben.)*

b) Zeige, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $c'(t) = (P'(t), Q'(t))$ *(Tip: Selber Tip wie in a).)*

c) Sei $0 < L \in \mathbb{R}$ gegeben. Außerdem gelte $t \in \mathbb{R} \Rightarrow |c'(t)| = |(P'(t), Q'(t))| \leq L$. Folgere

$$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |c(x) - c(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

(Tip: Das ist offensichtlich wieder ein Schrankensatz. Imitiere den Beweis!!!)

d) Zeige, daß die Kurve c den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ nur endlich oft schneidet (oder konstant ist). *Tip:* Setzt man die Kurve c in die Kreisgleichung ein, so erhält man ein Polynom in t (vom Grade?).

e) Zeichne ein Bild der Menge aller Punkte $(t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ für t nahe 0. Dies Bild hat eine ziemlich scharfe Spitze, deswegen sieht es im Gegensatz zu c) nicht sehr differenzierbar aus. Der Haken an diesem "Argument" ist, daß man immer langsamer geht, wenn man sich der Spitze nähert – was ist $c'(0)$? Also, wenn man in der Spitze ist, steht man einfach da. Deswegen kann man — wie $x \mapsto x^2$ auch — ohne hektischen Sprung in die andere Richtung laufen. Das erklärt, wieso $c(t) = (t^2, t^3)$ differenzierbar ist, aber trotzdem eine Spitze zu sehen ist.