Script zu Mathematik II
Prof. Karcher
SS 2000

Lukas Pustina, Markus Riesenweber, Simon Schwarzer

8. September 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppen

Vorbild für ,,Gruppen" sind:
Bijektive Abbildung einer Menge M auf sich Bij(M)

- Neutrales Element
  $\exists\ e \in Bij(M)$ so dass $\forall\ g \in Bij(M)$ gilt: $e \circ g = g \circ e = g$
- Inverses Element:
  $\forall\ f \in Bij(M)\ \exists\ f^{-1} \in Bij(M)$ mit $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$
- Assoziativität:
  $f, g, h \in Bij(M) \Rightarrow (h \circ g) \circ h = h \circ (g \circ f)$

Zu Axiomen erhoben sind dies die **,,Axiome einer Gruppe"**.

$det : \underbrace{End(V)}_{\in L,M} \to K$
$det(L \circ M) = det(L) \cdot det(M)$

1.1 Strukturerhaltende Abbildungen; Homomorphismen

$\Phi : G \to H$ (G,H = Gruppen)
$\Phi(g_1 * g_2) = \Phi(g_1) * \Phi(g_2)$
Daher: $\Phi(e_G) = e_H$ Das Neutrale Element aus G wird auf das Neutrale Element der Gruppe H abgebildet.

1.2 Permutationen

Die Menge M sei endlich, z.B. M={1, ... ,n}. Bijektive Abbildungen $M \leftrightarrow M$ endlicher Mengen heißen **Permutation** (Vertauschung). Die Gruppe aller Permutationen von n-Elementen heißt **Symmetrische Gruppe** (auf n-Elementen) $\mathcal{S}_n$. Zur Definition der Determinanten wird ein Homomorphismus.
$sign : \mathcal{S}_n \to \{+1, -1\}$
$sign(\tau * \sigma) = sign(\tau) \cdot sign(\sigma)$
defniert.
Bezeichnung von Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & ... & \pi(n) \end{pmatrix} \pi \in \mathcal{S}_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Besonders gut geeignet für Komposition von Permutation.

Zyklenbeschreibung von Permutationen ist gut geeignet, individuelle Eigenschaften von Permutationen hervorzuheben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Die einfachsten Permutationen vertauschen zwei Elemente und lassen alle anderen fest (Transposition).
(1,2) oder (3,7) oder (n_1, n_2)

Satz:
Jede Permutation kann als Komposition von Transpositionen geschrieben werden (auf viele Weisen).

Aus Zykeldarstellung kann man Ablesen, wie eine Komposition aus Transposition hergestellt werden kann:
1. Für jeden Zykel einzeln.
2. Herstellung für einen Zykel, z.B.: (1,7,2,5)
$\rightarrow$
(1.7) $\rightsquigarrow$ 1 hat bereits das richtige Bild, die 7 nicht.
(1,2) $\rightsquigarrow$ 7 hat jetzt das richtige Bild, die 2 noch nicht.
etc.

Versuch:
„Definiere" als Vorzeichen einer Permutation...
$+1$, falls eine gerade Anzahl von Transpositionen benötigt wird,
-1, falls eine ungerade Anzahl von Transpositionen benötigt wird.

Behauptung:
Die Parität der Anzahl der Transpositionen kann durch folgende Formel berechnet werden:
$\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\sigma : \{1, ..., n\} \leftrightarrow \sigma : \{1, ..., n\}$

$$\prod_{j<k;j,k\in\{1,\ldots,n\}} \frac{k-j}{\sigma(k)-\sigma(j)} = \pm 1,$$

τ sei Transposition. Dieses Produkt hat für σ und für $\tau \circ \sigma$ verschiedene Vorzeichen.

Für jede Transposition ergibt sich -1

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & ... & n_1 & ... & n_2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n_2 & ... & n_1 & ... & n \end{array}$$

Wie viele Fehlstellen im Nenner?
$n_2 < n_1$: Jede übersprungene Zahl ist $> n_1$ und $< n_2$. Zu jeder übersprungenen Zahl gehören zwei Fehlstellungen.

Wie ändert sich das Produkt, wenn wir σ mit einer weiteren Transposition komponieren?

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & ... & n_1 & ... & n_2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n_1) & ... & \sigma(n_2) & ... & \sigma(n) \end{array}$$

τ soll die Zahlen n_1 und n_2 vertauschen.

$$\begin{array}{cccccc} ... & n_1 & ... & ... & n_2 & ... \\ & \downarrow & & & \downarrow & \\ ... & n_2 & ... & ... & n_1 & ... \end{array}$$

Für das Paar (n_1, n_2), egal in welcher Reihenfolge es vorkommt, findet ein Fehlstellenwechsel statt.
$\rightarrow$ Für jede übersprungene Zahl ändert sich beim Positionswechsel von n_2 die Fehlstellung.
$\rightarrow$ Für jede übersprungene Zahl ändert sich beim Positionswechsel von n_1 die Fehlstellung.
$\Rightarrow$ Für jede übersprungene Zahl haben wir eine gerade Anzahl von wechseln der Fehlstellung.

$\Longrightarrow$ τ sei Transposition. Dieses Produkt hat für σ und für $\tau \circ \sigma$ verschiedene Vorzeichen.

Im Definitionsversuch wissen wir noch nicht, ob durch den Versuch für jede Permutation ein wohlbestimmtes Vorzeichen definiert wird. Es wird nur eine Absicht ausgedrückt. Die Formel andererseits drückt keine Absicht aus, ist aber für jede Permutation eine wohldefinierte Zahl.
Jede endliche Gruppe G der Ordnung $n = |G|$ trifft (vielfältiger Weise) als Untergruppe einer Permutationsgruppe auf.
$a \in G \rightsquigarrow L_a \in Bij(G)$
$g \to L_a(g) := a * g$ invertierbar, denn $L_{a^{-1}} \circ L_a(g) = a^{-1}(a * g) = (a^{-1} * a) * g = g$

$L_{a*b}(g) = (a*b)*g = a*(b*g) = L_a \circ L_b(g)$
Die Abbildung $a \to L_a$ ist eine injektive Abbildung von G nach Bij(G)=$\mathcal{S}_n$ und ist **Homomorph**.

2 Wiederholungen aus dem WS

Der folgende Abschnitt bietet einen kleinen Überblick über die grundlegenen Themen des Wintersemester, um die einzelnen Bereiche tiefergehend zu wiederholen, empfiehlt sich wohl der Blick in das Script zur Mathematik I Vorlesung.

2.1 Schrankensatz

$$\left.\begin{array}{l} x, a \in [-R, R] \\ |f_n''| \leq \underbrace{B}_{\text{unab. von n}} \end{array}\right\} \overset{\text{Schrankensatz 2mal}}{\Longrightarrow} |f_n(x) - f_n(a) - f_n'(a)*(x-a)| \leq B*|x-a|^2$$

2.2 Archimedes Triumph

$$|f_\infty(x) - f_\infty(a) - f_\infty'(a)*(x-a)| \leq B*|x-a|^2$$

$\boxed{\text{Grenzwert der Ableitungen } f_n'(a) \text{ ist Ableitung } (f_\infty)'(a) \text{ der Grenzfunktion.}}$

2.3 Geometrische Majorisierung

Als Arbeitspferd kommt die geometrische Majorisierung hinzu:

$$\text{oder} \left\{\begin{array}{lcl} |x_{n+1} - x_n| & \leq & q*|x_n - x_{n-1}| \\ |x_{n+1} - x_n| & \leq & q^n * C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \leq q \leq 1 \\ \text{Cauchyflge also in } \mathcal{R}, \mathcal{R}^d \\ \text{konvergent.} \end{array}$$

Zwei wichtige Anwendungen

1. Kontrahierende Abb. $f_A \subset \mathcal{R}^d \to A$
   $|f(x) - f(y)| \leq q*|x-y|$

   $x_0 \in A$ bel. $x_{n+1} := f(x_n)$ konvergiert gegen $f(x^*) = x^*$ (Fixpunkt)

2. Potenzreihen $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$

$$\begin{array}{l} P_n(z_0) \text{ konvergiert} \\ |z| < z*|z_0| \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \{P_n(z)\} \text{ ist geometrisch majorisiert} \\ \{P_n'(z)\} \text{ ist geometrisch majorisiert} \end{array} \Rightarrow$$

2.4 Stetigkeit

$$F_A \subset \mathcal{R}^d \to \mathcal{R}^e$$

Stetig:

Unterschied Cauchyfolge und konvergente Folge
$f(x) = \frac{1}{x} : (0,1] \to [1,\infty)$ stetig
$\{\frac{1}{n}\}$ Cauchyfolge im Def.-Bereich <u>keine</u> konvergente Folge im Def.-Bereich;
Bildfolge $\{n\}$ keine Cauchyfolge

- **folgenstetig**:
  Jede in A konvergente Folge $\{a_n\}$ wird auf eine konvergente Folge $\{f(a_n)\}$ abgebildet.

- $\varepsilon - \delta -$**stetig**:
  Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_{\epsilon,a} > 0$ so dass $\forall\ x, a \in A$:

$$|x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

1. leicht: Summen, Produkte, Kompositionen
2. leicht: Fehlerkontrollen, Grenzfunktionen, Formulierung von „gleichmäßig"

Zum Verständins: Äquivalenz der beiden Definitionen
Hauptsatz: Falls A vollständig (abgeschlossen) und beschränkt so ist $f(A)$ ebenfalls beschränkt

2.5 Integralrechnung

$$f : [a,b] \to \mathcal{R}^d \text{ Kurven}$$

Einteilung: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, Zwischenstelle $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$
Riemannsummen:

$$\sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) * (t_j - t_{j-1}) \quad \underbrace{\approx}_{\text{Fehler wird durch die Feinheit der Einteilung kontrolliert.}} \quad F(b) - F(a)$$

$$f:\left\{\begin{array}{l}\text{stückweise linear durch Sehnen approximiert } f_n \\ \text{stückweise quadratische Stammfunktion } F_n, F_n' = f_n\end{array}\right\}\begin{array}{l} f_\infty = f \\ F_\infty = \lim F_n\end{array}$$

Schrankensatz + Archimedes: $F_\infty' = f$
Integrale als Grenzwerte der Riemansummen. Also $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$: Hauptsatz der Differenzial und Integral- Rechnung

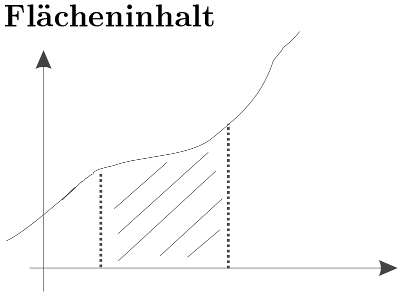
$$F(b) - F(a) = \int_a^b \underbrace{F'(x)}_{\text{stetig}} dx$$

Anwendung: Für Kurven wurde als Supremum von Sehnenlängen $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$ die Bogenlänge von f definiert.
Satz: Falls f' stetig $\Rightarrow$ Bogenlänge$(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$

,,Flächeninhalte" unter dem Graphen einer Funktion. Flächeninhalte krummlinig berandeter Figuren können mit unsernen bisherigen Mitteln <u>nicht definiert werden</u>.

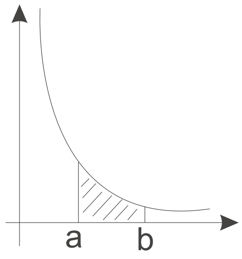
2.5.1 Integrale und Flächeninhalte

Flächeninhalt

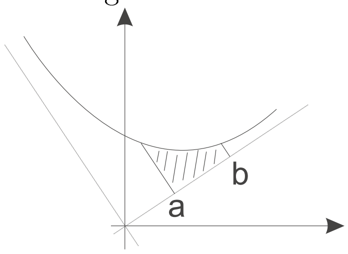


1. Jede Menge $\subset \mathcal{R}^d$, die Sie sich vorstellen können ,,hat" einen Flächeninhalt
2. $G_1 \subset G_2 \Rightarrow Fl(G_1) \leq Fl(G_2)$
3. $Fl(G) = Fl(Drehung(G))$
4. $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots,\ G := \cup G_n$
   $\Rightarrow Fl(G) = \lim n \to \infty Fl(G_n)$

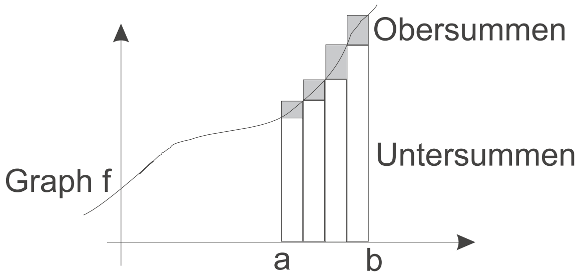
$x \to \frac{1}{x}$ $\log'(x = \frac{1}{x})$



$Fl = \log(b) - log(a)$
Drehung:



Die Definition des Flächeninhaltes ist schwierig.
Falls die Eigenschaften 1) und 2) geglaubt werden (plus Def.) dann liefert das Integral den Flächeninhalt unter dem Graphen.
$F' = f$
$|F(b) - F(a) - RS(f)| \leq L * |b - a| *$ Feinheit der Einteilung
Archimedes $\Rightarrow F(b) - F(a) = Fl$(unter Graph)



Riemannsumme mit $f(\tau_j) \leq f(x)$ für $\tau_j, x \in [t_{j-1}, t_j]$

$$\text{Untersumme } \leq Fl(\text{unter Graph}) \leq \text{ Obersumme}$$

Definition des Integrals; Obersummen $-$ Untersummen $=$ klein für genügend feine Einteilungen.

2.6 Zusammenfassung zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Stammfunktion: $F' = f$, $RS(f) := \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j) * (t_j - t_{j-1})$ für $f : [a,b] \to \mathcal{R}^d$

Definition: f besitzt das Riemann-Integral I (später $I = \int_a^b f(x)dx$) falls gilt: Zu jeder Fehlerkonstanten $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Einteilungen mit $max\|t_j - t_{j-1}\| \leq \delta$ gilt: $\|RS(f) - I\| \leq \epsilon$

In diesem Zusammenhang gelten folgende zwei Sätze:

Alle Funktionen $f : [a,b] \to \mathcal{R}^d$ die gleichmäßig durch stückweise lineare Fuktionen approximiert sind (Satz über die gleichmäßige Stetigkeit) besitzen Stammfunktionen $F : [a,b] \to \mathcal{R}^d$, $F' = f$ und diese werden z.B. als Grenzwert stückweise quadratischer Stammfunktionen der Approximation konstruiert.
Die Zahl $F(b) - F(a)$ ist wenig von RS verschieden. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle Einteilungen mit Feinheit $\leq \delta$ gilt $\|F(b) - F(a) - RS(f)\| \leq \epsilon$

Diese beiden Sätze werden oft als der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bezeichnet.

Aus der Definition und Satz 1 und 2 folgt:

$$\int_a^b (fx)dx = F(b) - F(a)$$

oder etwas anders: Falls $F : [a,b] \to \mathcal{R}^d$ eine stetige Ableitung $F' : [a,b] \to \mathcal{R}^d$ besitzt, so gilt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (fx)dx$$

(Funktionen können aus ihrer Ableitung rekonstruiert werden)

Nun läßt sich mit Hilfe einer "Kontinuierlichen Dreiecksungleichung" folgendes berechnen:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b f(x)dx$$

daraus ergibt sich:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(s)ds \quad x \in [a,b]$$

Unter der Voraussetzung:

$$\begin{aligned} |F'| &\leq L \\ \Rightarrow \quad & |F(x)-F(a)| = \left|\int_a^x F'(s)ds\right| \leq \int_a^x |F'(s)|ds \\ &\leq \int_a^x L * ds = L*(x-a) \end{aligned}$$

kann man nun zeigen:

$$\begin{aligned} |F''| &\leq B \\ \Rightarrow |F'(x)-F'(a)| &\leq B*(x-a) \\ \underbrace{\Rightarrow}_{\triangle-Ungl.} \quad |F'(a)| - B(x-a) &\leq |F'(x)| \leq |F'(a)| + B(x-a) \\ \Rightarrow |F(x)-F(a)-F'(a)(x-a)| &\leq \frac{B}{2}(x-a)^2 \end{aligned}$$

Dies läßt sich analog auch für die dritte Ableitung machen:

$$\begin{aligned} |F'''| &\leq S_3 \\ \Rightarrow |F'(x)-F'(a)-F''(a)(x-a)| &\leq \frac{B}{2}(x-a)^2 \\ \Rightarrow \left|F(x)-F(a)-F'(a)(x-a)-\frac{F''(a)(x-a)^2}{2}\right| &\leq \frac{S_3}{3!}(x-a)^3 \end{aligned}$$

2.7 Wiederholung zum Austauschsatz

Sei $A*x=b$ und die Matrix A und der Vektor b gegeben. So suchen wir x.
Es gilt also: $b \in \mathcal{K}^m$, $x \in \mathcal{K}^n$ und A eine $m \times n$ Matrix.
Gesucht ist ein Urbild x von b unter der linearen Abbildung $x \in \mathcal{K}^n \to A*x \in \mathcal{K}^m$
Oder: Gesucht sind die Koeffizienten einer Linearkombination, die b als Linearkombination der Spalten der Matrix A beschreibt. Das geht genau dann, wenn der Spaltenrang Matrix A derselbe ist wie der Spaltenrang der Matrix $(A, b$.

Wir wollen aber nun noch eine Zusatzvoraussetzug machen:
Die Spalten von A seinen linear unabhängig und $m = n$.
Unsere genauren Absichten sind das Gleichungssystem für viele rechte Seiten gelöst werden.

Falls $m = n$, dann läßt sich folgendes sagen:

Im Vektorraum $\mathcal{K}^n$ haben wir die Standartbasis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad \cdots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n$$

Die Matrix hinzuschreiben bedeutet die Spaltenvektoren als Linearkombination der Standartbasis zu kennen.
Angenommen wir können $A * x_1 = e_1$, $A * x_2 = e_2$, $\cdots$, $A * x_n = e_n$ lösen und $b = \sum b_k * e_k$ ist gegeben.

Vergleiche Austauschsatz:
Gegeben: $v_1, \cdots, v_n$ linearunabhängig
Gesucht: $w_j = \sum_{k_1}^{n} a_{k_j} v_k$

Dann ist es leicht: $A*x = b$ zu lösen, nämlich $x = \sum_{k=1}^{n} b_k * x_k$. Falls die Standartbasis als Linearkombination der Spalten von A geschrieben werden kann, dann haben wir das Gleichungssystem allgemein gelöst.

2.7.1 Beweis des Austauschsatzes

1. **Induktions Anfang**
   $n = 1$, $w_1 = \lambda * v_1$
   w_1 linear unabhängig, daraus folgt: $v_1 \neq 0$
   $\Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{x_1} w_1$

2. **Induktions Voraussetzung** Immer wenn $(n-1)$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \cdots, v_n$ gegeben sind und die Linearkombinationen $w_j = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k_j} * v_k$ mit $j = 1, \cdots, n-1$, $w_1, \cdots, w_{n-1}$ linear unabhängig, dann kann man die Linearkombinatin "'umkehren"', also die v_k als Linearkombination der w_j schreiben.

3. **Induktions Schritt** Nun sein $\underline{\underline{n}}$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \cdots, v_n$ und $w_j = \sum_{k=1}^{n} a_{k_j} v_k$ linear unabhängig gegeben.
   Dann gibt es min. einen Index j^*, so dass $a_{1j^*} = 0$ ist, d.h. dass v_1 in der Linearkombination für w_j^* nicht trivial vorkommt. Als Begründung kann man nennen, das falls es nicht so wäre $w_1, \cdots, w_n$ Linearkombination von $\{v_2, \cdots, v_n\}$ wären. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur linearen Unabängigkeit von $w_1, \cdots, w_n$

$$\begin{aligned} w_{j^*} &= a_{1j^*} v_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{kj^*} v_k \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{1}{a_{1j^*}} w_{j^*} - \frac{1}{a_{1j^*}} * \sum_{k=2}^{n} a_{kj^*} v_k \end{aligned}$$

Dies läßt sich nun in die übrigen Linearkombinationen einsetzen.

$$w_j = a_{1j}v_1 + \sum_{k=2}^{n} a_{kj}v_k \quad j \neq j^*$$

$$w_j - \frac{a_{1j}}{a_{1j^*}} * w_{j^*} = -\frac{a_{1j}}{a_{1j^*}} * \sum_{k=2}^{n} a_{kj^*}v_k + \sum_{k=2}^{n} a_{kj}v_k$$

Die $(n-1)$ Vektoren $\tilde{w}_j$ sind also als Linearkombination, der $n-1$ Vektoren $v_2, \cdots, v_n$ geschrieben.

Voraussetzung: $w_1, w_2, ..., w_n$ sei linear unabhängig
Behauptung: $\tilde{w}_2, ...\tilde{w}_n$ sei linear unabhängig und $\tilde{w}_j := w_j + a_j w_1$ mit $a_j \in K$

Angenommen: $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j * \tilde{w}_j}_{\text{nichttr. Linkomb}} = 0$, dann ist mindestens ein $a_j \neq 0$ und

$$0 = \sum_{j=2}^{n} a_j(w_j + a_j w_1) = \underbrace{\underbrace{\sum_{j=2}^{n}}_{\text{mind. ein}_{a_j \neq}} + \left(\sum_{j=2}^{n} a_j\right) a_1 w_1}_{\text{nichttr. Linkomb} \Rightarrow \text{Widerspr. z. Vor.}}$$

$A * x = b$ soll oft gelöst werden

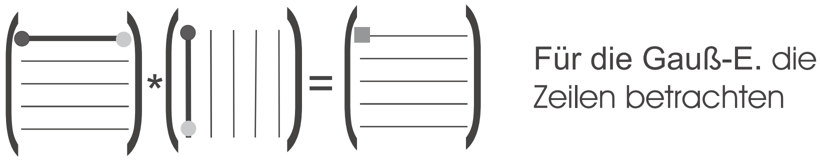
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \sum_{k}^{n} b_k * e_k \quad \text{mit} \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A * x = e_1, \quad A * x = e_2, \quad \ldots, \quad A * x = e_m$ lösen

Lösungen:

$A * x_{i1} = e_1, \quad A * x_{i2} = e_2, \quad \ldots, \quad A * x_{im} = e_m$ mit $x_{ik} = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{mk} \end{pmatrix}$

$$A * (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A * X = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$



Lösung: $X = A^{-1}$
Gauß Elimination besteht aus Zeilenumformung.
Zum Schluß:

$$\begin{pmatrix} id \end{pmatrix} * X = \begin{pmatrix} \text{Resultat der Zeilenumf. der linken Seite an-} \\ \text{gewandt auf die Einhaitsmatrix = Lösung} \\ \text{des Gleichungssystems} \end{pmatrix}$$

2.8 Eigenwerte und Eigenvektoren:

Sei $A \in End(V), \quad A * v = \lambda * v, \quad \wedge \lambda \in K, \quad v \neq 0$

$\Rightarrow$
λ heißt Eigenwert von A
v heißt Eigenvektor zu λ
Wenn neben
$A * v = \lambda * v$
$A * w = \lambda * w$ gilt, dann folgt daraus:
$A(v + w) = \lambda(v + w) \quad \wedge \quad A(k * v) = \lambda(k * v)$

Eigenvektor zu λ vereinigt mit 0 bilden UVR

Zunächst betrachtet für symmetrische A:

Sei $< A * v, w >=< v, A * w > \quad \forall v, w \in V$
Eine Matrix (A) für A bei Verwendung einer Orthonormalbasis (ON-Basis) ist symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen.

Satz: Symmetrische Endomorphismen besitzen eine ON-Basis aus Eigenvektoren. In dieser Basis ist (A) diagonal.

Kernstücke der Argumentation:
Unterraum $U \subset V$ heißt A-invariant, wenn gilt: $A * U \subset U$.
Behauptung: A ist symmetrisch, wenn gilt: $A * U \subset U \Rightarrow A * U^{\perp} \subset U^{\perp}$.
Aufgrund des vorangegangenen Satzet genügt es zum Diagonalisieren, wenn man zu jedem symmetrischen Endomorphismus wenigstens einen Eigenvektor finden kann.

z.B.:
$A * v = \lambda * v$
$A - invarianterURU = K * v = span(v)$
also auch $A * U^{\perp} \to U^{\perp}$
$A \mid_{U^{\perp}}$ ist ein symmetrischer Endomorphismus auf einem (n-1)-dim VR.
Sei nun $A : \mathcal{R}^d \quad , \quad <,>$ symmetrisch und $x \mapsto < A * x, x >$ stetig und $x \in \{x \in \mathcal{R}^d, |x| = 1\}$ = Einheitssphäre (abgeschlossen in $\mathcal{R}^d$ und beschränkt)
Eine Extremstelle x^* für $x \mapsto < A * x, x$ ist immer ein Eigenvektor.

Außer dem symmetrischen Endomorphismus gehören zu Skalarprodukten, auch die orthogonalen Endomorphismen: $< L * v, L * w >=< v, w >$

- orthogonal = Skalarprodukterhaltend = längentreu = isometrisch

- Symmetrische Endomorphismen von V bilden VR.
  Orthogonale Abbildungen bilden keine VR.

- Komposition $L_1 \circ L_2$ orthogonaler Abbildungen ist offensichtlich orthogonal.
  $< L_1 \circ (L_2 * v), L_1 \circ (L_2 * w) >=< L_2 * v, L_2 * w >=< v, w >$
  Orthogonale Abbildungen sind (unter Komposition) eine Gruppe.
  Kompositionen sind nicht immer symmetrisch.

Wie findet man Eigenvektoren?
Sei $A * v = \lambda * v \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda * id) * v = 0, \quad v \neq 0$
D.h. der Rang $(a - \lambda * id) < n$
In dim 2 (ohne Theorie):

$$rang \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} < 2 \Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22-\lambda}) - a_{12} * a21 = 0 = P_A(\lambda)$$

$BEnd(V)\ dimV = 2$ Nach Wahl einer Basis hat B eine Matrix $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, mit
$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ Bild von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und
$\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$ Bild von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vorgerechnet: $|b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}|$ = Flächeninhalt des Parallelogramms.

Beispiele:

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine 90° Drehung

   $P_A(\lambda) = (0-\lambda)(0-\lambda) - (-1)1 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow$ keine reelle Nullstelle.
   Über dem Körper $\mathcal{C}$ sind die Lösungen $\lambda = \pm i$
   Rang$(A \pm i * id) < 2$

   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = i * \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 1. Basisvektor ist Eigenvektor zum Eigenwert 1.
   $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 * 0 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda$ ist der einzige Eigenwert.
   $(A - id) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rang $= 1 \Rightarrow dim(Kern(a - id)) = 2 - 1 = 1 < 2$
   $\Rightarrow$ Wir finden keine von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ unabhängigen Eigenvektoren, also keine Eigenbasis.

Frage: Wie kann man das Volumen des "Spates" bestimmen, der in $\mathcal{R}^d$ von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannt wird?
Spat $(v_1, \ldots, v_n) = \{v \in \mathcal{R}^d; v = \sum_{j=1}^n x_j v_j, 0 \leq x_j \leq 1\}$

Gewisse Grundkenntnisse über Permutationen nötig:
Permutationen $\mathcal{S}_n$ werden als <u>Abbildungen</u>* von {1,...,n} auf sich betrachtet.

$$\text{Eine übliche Notation} \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & ... & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Permutationen bilden unter Komposition eine Gruppe und
$sign : \mathcal{S}_n \to \{+1, -1\} \quad \sigma \to sign(\sigma)$ ist ein Homomorphismus.
$sign$(Transposition) $= -1$

3 Normen auf Vektorräumen

Normen (=Längen) auf Vektorräumen, die Sprache für höhere Dimensionen

Axiome für eine Norm auf V ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ Vektorraum)

1. $0 \leq |v|$, $|v| = 0 \Rightarrow v = 0$ "positiv"
2. $r \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $|r * v| = |r| * |v|$ "homogen"
3. $|v + w| \leq |v| + |w|$ "Dreiecksungleichung"

Beispiel: Polynom-Vektorraum

$$||P|| := \max_{x \in [a,b]} |P(x)| \; 0 \leq ||P||$$

$$||r * P|| = |r| * ||P||$$

$$\begin{aligned} ||P + Q|| &= \max_{x \in [a,b]} |P(x) + Q(X)| \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} (|P(x)| + |Q(X)|) \\ &< ||P(x)|| + ||Q(X)||) \end{aligned}$$

3.1 Pythagoras-Normen

Skalarprodukt gegeben: $|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$
$V = \mathbb{R}^n$, $\langle , \rangle$ Standart-Skalarprodukt

$$x = \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \qquad |x| = \sqrt{\sum x_j^2}$$

$$\langle P, Q \rangle := \int_a^b P(X) * Q(x) dx = \langle Q, P \rangle \text{bilinear, symmetrisch}$$

$$0 \leq \langle P, P \rangle \; , \; \langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0$$

3.2 Abstände

$d(v,w) := |v-w|$

Axiome für Abstände

- $0 \leq d(v,w), \qquad d(v,w) = 0 \Rightarrow v = w$
- $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$
- $|u-w| \leq |u-v| + |v-w|$

$$d(v+u, w+u) = d(v,w) \text{ transitiv-invariant}$$

3.3 Übertragung der 1-dim Vokabeln

- **Beschränkt**
  Eine Menge $A \subset V$ heißt beschränkt, falls es eine Konstante S gibt mit $\forall\, v \in A \Rightarrow |v| \leq S$.
- **Dehnungsbeschränkt**
  Eine Abbildung $F : A \subset V \to W$ heißt dehnungsbeschränkt, falls $a, b \in A \Rightarrow |F(a) - F(b)|_W \leq L * |a-b|_V$.
- **Nullfolge**
  $\{v_n\} \subset V$ heißt Nullfolge, falls es eine Nullfoge $\{r_n\} \subset \mathbb{R}$ gibt mit $|v_n| \leq r_n$, d.h. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε, so dass $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |r_n| \leq \varepsilon$.
- **Konvergenz**
  $\{v_n\}$ konvergiert gegen $v \leftrightarrow \{v_n - v\}$ ist Nullfolge.
- **Cauchyfolge**
  $\{v_n\}$ heißt C.F. $\Leftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε, so dass $m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |v_n - v_m| \leq \varepsilon$.
- **Vollständigkeit**
  $A \subset V$ heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge $\{a_n\} \subset A$ einen Grenzwert $a_\infty \in A$ hat.
  Beispiel:
  $\mathbb{R}^d$ mit Phythagoras-Norm ist vollständig (weil $\mathbb{R}$ vollständig ist).
- **Stetig**
  $F : A \subset V \to W$

1. **folgenstetig** an der Stelle a_∞:
   Für jede in A konvergente Folge $a_n \subset A$ ist $F(a_n)$ gegen $F(a_\infty)$ konvergent.
   Warnung:
   $\frac{1}{x}$ $(0,\infty) \to (0,\infty)$ ist stetig, $\{\frac{1}{n}\}$ ist Cauchy in $(0,\infty)$ aber $\frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ ist nicht konvergent.
2. $\varepsilon - \delta -$**stetig** an der Stelle $a \in A$:
   Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass $b \in A : |a-b| \leq \delta \Rightarrow |F(a) - F(b)| \leq \varepsilon$

3.4 Hauptsätze

1. Diese beiden (stetig) Definitionen sind äquivalent.
2. $A \subset V$ sei vollständig und beschränkt $F : A \to W$ sei stetig
   Behauptung: $F(A)$ ist beschränkt
3. $A \subset V$ sei vollständig und beschränkt $F : A \to W$ sei stetig
   Behauptung: F ist gleichmäßig stetig

Definition (gleichmäßig stetig):
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$ so dass $a, b \in A \Rightarrow |a-b| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(a)-F(b)| \leq \varepsilon$. ($\delta$ hängt nur von ε ab und nicht mehr von a).

Ziel: Diese Begriffe scheinen von der Wahl der Norm abzuhängen. Tatsächlich ist das nicht der Fall. Denn je zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent.

Zwei Normen $\|\|_1$ und $\|\|_2$ heißen **äquivalent**, falls es eine Zahl C gibt, so dass $\frac{1}{C} * \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C * \|v\|_1$ $\|v\|_1 \leq S \Rightarrow \|v\|_2 \leq C * S$ **Dehnungsbeschränkt**: $\|F(a) - F(b)\|_1 \leq L * \|a-b\|_1$

$$\frac{1}{C}|F(a) - F(b)|_2 \quad \leq \quad |F(a) - F(b)|_1 \leq L * |a-b|_1 \quad \leq \quad L * C * |a-b|_2$$

$\{v_n\} \subset V$ heißt Nullfolge, falls es eine Nullfoge $\{r_n\} \subset \mathbb{R}$ gibt mit $|v_n|_1 \leq r_n \Rightarrow |v_n|_2 \leq C * r_n$.

äquivalent
$a \sim a$
$a \sim b \Rightarrow b \sim a$
$a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

1. Teilresultat: Sei $|v|_p$ eine Pythagoras-Norm und $|v|$ eine beliebige Norm.
Behauptung: Es gibt C so dass $|v| \leq C * |v|_p$ (Je zwei Pythagoras-Normen sind äquivalent).
d.h. Es gibt $\langle , \rangle$ so dass $|v|_p = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
Zu $\langle , \rangle$ gibt es ON-Basen $\{e_1, \ldots e_n\}$ und für $x = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$ gilt $|x|_p = \sqrt{\sum x_j^2}$

$v = \sum x_j * e_j$

$$\begin{aligned}
|v| = |\sum x_j * e_j| &\leq \sum |x_j * e_j| \\
&= \sum |x_j|_{\mathbb{R}} * |e_j| \\
&\overset{\text{Schwarz}}{\leq} \sqrt{\left(\sum x_j^2\right) * \left(\sum e_j^2\right)} \\
&= |v|_p * \sqrt{\underbrace{\sum_j |e_j|^2}_{=C}}
\end{aligned}$$

$|| : V \to \mathbb{R}$
$||_p : V \to \mathbb{R}$
$|| \leq C * ||_p$
Definiere die Grundbegriffe mit dieser Norm: Behauptung: $||$ ist eine dehnungsbeschränkte Funkrtion.

$$||v| - |w||_{\mathbb{R}} \overset{\text{Axiom}}{\leq} |v - w| \overset{\text{Vor.}}{\leq} C * |v - w|_p$$

3.5 Zwei nicht äquivalente Normen

Nehmen wir den endlichen Vektroraum der Polynome mit der Basis $1, X, X^2, \cdots, X^n$. Dann definieren wir folgende Normen:

$$|P|_1 := \max |P(X)|, x \in [0, 1] \qquad |P|_2 := \sqrt{\int_0^1 P^2(x) dx}$$

Es ist nun sofort ersichtlich, daß gilt:

$$|P|_2 \leq \sqrt{\int_0^1 {|P|_1}^2(x) dx} = |P|_1 \qquad < P, Q >= \int_0^1 P(x) * Q(x) dx$$

Es ergibt sich:

$$|X^n|_1 = 1 \qquad |X_n|_2 = \sqrt{\int_0^1 X^{2n}(x) dx} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

In diesem Fall ist $\{X\}$ eine $||_2$-Nullfolge.

3.6 Normen im endlichen Vektorraum

Satz: Je zwei Normen auf einem endlichen Vektorraum sind äquivalent.

Dies müssen wir nun näher untersuchen!
Sei $||_v$ eine beliebige Norm und $||_p$ eine pythagoras Norm, dann gilt:

$$|v|_v \leq c * |v|_p \quad \text{z.B. mit } c = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} {|e_k|_v}^2}$$

, wobei $\{e_1, \cdots, e_d\}$ eine ON-Basis zu $||_p$ ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie man allgemein ein solches c finden kann, so daß gilt: $c * |v|_p \leq |v|_v$.
Sei $s := \{v \in V \mid |v|_p = 1\}$. Dies entspricht der Einheitspähre (beschränkt, vollständig).
Falls die Funktion $v \mapsto |v|_v$ ein Minimum m auf S hat, so kann $c = m$ gewählt werden! (Beachte: $|v|_v ist \neq 0$ auf S)

3.7 Beschränktheitssatz

Satz:
Sei $F: A \mapsto W$ stetig, A vollständig und beschränkt, dann ist $F(A)$ beschränkt.

Anwendung: $A = S$ und $F(v) := \frac{1}{|v|_v}$

Falls $h := n \mapsto \mathbb{R} \setminus 0$ stetig ist, so ist auch $\frac{1}{n}$ stetig.

3.8 Warum ist $v \mapsto |v|_v$ „stetig"?

Grundbegriffe: „beschränkt", „dehnungsbeschränkt", „Nullfolge", „konvergente Folge", „Cauchy-Folge", „stetig"	Warum in $\mathbb{R}^d$ definiere unter Bezugnahme auf eine gewählte Norm? Wir einigen uns auf $||_p$

Die Funktion $v \mapsto |v|_v$ ist sogar dehnungsbeschränkt:
D.h. $f : V \mapsto \mathbb{R}$ ist dehnungsbeschränkt genau dann wenn, $|f(v) - f(w)|_{\mathbb{R}} \leq L * |v - w|_{\mathbb{R}}$.
Es ergibt sich:

$$||v|_v - |w|_v|_{\mathbb{R}} \leq |v - w|_v \leq c * |v - w|_p$$

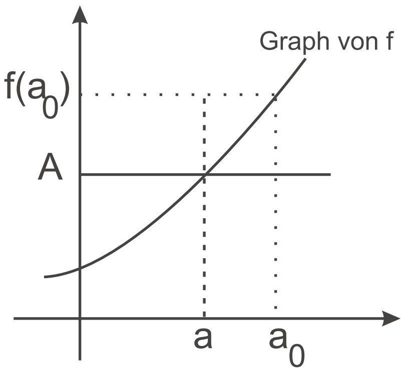
Daher gibt es eine Schranke M, so daß $v \in S \ \frac{1}{|v|_v} \leq M \Rightarrow \frac{1}{M} \leq |v|_v$ ergibt.

$$\left.\begin{array}{l} |v|_v - |w|_v \leq \\ |w|_v - |v|_v \leq \end{array}\right. |v-w|_v \quad \triangle\text{-Ungl.} \quad \begin{array}{l} |v|_v \leq |w|_v + |v+w|_v \\ |w|_v \leq |v|_v + |w-v|_v \end{array}$$

Wir haben nun gesehen, daß man eine Norm in eine andere, bequemere ,,transformieren" kann. Dazu wollen wir uns noch ein Beispiel ansehen:
Gegeben $V, ||_v$ und $A \in W = End(V)$

$$||A|| := \max\{|A * v|, v \in V, |v|_v = 1\}$$

4 Newtonverfahren



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) - A}{f'(x_n)}$$
$$\Leftrightarrow N(x) := x - \frac{f(x) - A}{f'(x)}$$

Für Fixpunkt $x^* = N(x^*)$ gilt:

$$f(x^*) - A = 0$$

Behauptung
Die Newtonfunktion ist in der Nähe von x^* kontrahierend

Beweis (Schrankensatz)

$$N'(x) = \underbrace{1 - \frac{f'(x)}{f'(x)}}_{=0} - \frac{f(x) - A}{(f'(x))^2} * f''(x)$$

$$N'(x^*) = 0 \quad \text{D.h. zu } \epsilon = \frac{1}{2} \text{ existiert } \delta > 0 \text{ so daß}$$
$$|x - x^*| \leq \delta \Rightarrow |N'(x) - N'(x^*)| \leq \frac{1}{2}$$

Deshalb ist N auf dieser Kugel kontrahierend.

Es ergibt sich beim Newtonverfahren jedoch ein Problem. Man kennt die Konvergenzkegel nicht, so daß man auf Funktionen stößt, bei denen dieses Verfahren nicht konvergiert.

Wir wollen nun das Verfahren noch einmal auf die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ausführen.
Es sei A gegeben und $f(a) = A$ gesucht.

$$N(z) = z - \frac{f(z) - A}{f'(z)} \; quad \quad z^* = N(z^*) \Leftrightarrow f(z^*) = AN'(z) = \frac{f(z) - A}{f'(a)^2} * f''(z) \qquad N'(z^*) = 0$$

Falls N' stetig ist, so gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein $\delta^* > 0$, so daß

$$(z - z^*) \leq \delta \Rightarrow \left| N'(z) - \underbrace{N'(z^*)}_{=0} \right| \leq \frac{1}{2}$$

d.h. N ist kontrahierend!

Wie verhalten sich nun komplexe Funktionen $h : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ in der Nähe von Nullstellen der Ableitung h'?
Wir nehmen als Prototyp unserer Untersuchung $z \mapsto z^2$ in der Nähe von 0:

$$h(z) = h(a) + \underbrace{h'(a)}_{=0}(z - a) + \underbrace{\frac{h''(a)}{2}}_{\neq 0}(z - a)^2 + \text{kleiner Fehler, z.B. } c * (z - a)$$

4.1 Beipiel: $sin(x)$

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x \quad = \quad \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{Aus den Werten die Ableitung berechnen}$$

4.2 Beispiel: Iterationsverfahren für π

- $$N(x) = x - \frac{\sin x - 0}{\cos x}$$

- $$N(x) = x - \frac{\sin x - 0}{\cos(\pi) - 1} = x + \sin x \quad \text{keine Nullstelle des Nenners}$$

5 Determinaten

Zielformulierung:

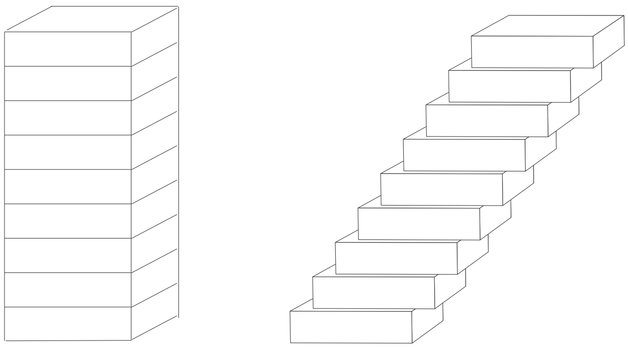
1. Wie muß man λ wählen, damit die Vektoren $(A - \lambda id) * \{e_1, ..., e_d\}$ linear unabhängig sind? [$rang(A - \lambda id) < n \quad ; \quad Ker(A - \lambda id) \quad$ nicht trivial, $v \in Ker(A - \lambda id) \quad Av = \lambda v \rightarrow$ Eigenvektoren]

2. Warum wird das Volumen der Spaltenvektoren von $(A - \lambda id) = 0$?

Das Volumen des Spates der Spaltenvektoren A
$f(a_1, ..., a_n) =?$
Welche Eigenschaft muß f haben?
$f(a_1, ..., r * a_j, ..., a_n) = r * f(a_1, ..., a_n)$ zumindest für $r \geq 0$
Wegen der in$n = 1, 2$ schon bekannten Situation suchen wir f so, dass dies für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt (auch $r < 0$)
Prinzip von CAVALIERI läßt erwarten, daß

$$f(a_1, ..., a_{n-1}, a_n + \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} x_j a_j) = f(a_1, ..., a_n) = 0$$

falls a_n Linearkombination vom $(a_1, ..., a_{n-1})$ ist
Ist das eine gute Idee in Bezug auf die Ziele?



$f(a_1, ..., a_{n-1}, a_n + b_n) = f(a_1, ..., a_{n-1}, a_n) + f(a_1, ..., a_{n-1}, b_n)$

Wir suchen also eine Funktion so, daß...

$$f : (a_1, ..., a_n) \rightarrow f(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}$$

$a_j \rightarrow f(a_1, ..., a_j, ..., a_n)$ Diese partiellen Abbildungen sind linear.

$$\begin{aligned} f(a_1, ..., a_n) &= f(a_1, (a_2 + a_1), ..., a_n) \\ &= f(a_1 - (a_2 + a_1), (a_2 + a_1), ..., a_n) \\ &= f(-a_2, a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(a_1, a_2, ..., a_n) = -f(a_2, a_1, ..., a_n)$

Beim Vertauschen von irgend zwei Argumenten ändert sich das Vorzeichen!

5.1 Für 3x3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren $a_j = \sum^3 k = 1 a_{kj} e_k$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

$$f(\sum a_{k1} e_k, \sum a_{k2} e_k, \sum a_{k3} e_k) = \underbrace{\sum^3 k1 = 1 \sum^3 k2 = 1 \sum^3 k3 = 1}_{27 \text{ Summanden}} * a_{k1} a_{k2} a_{k3} f(e_{k1}, e_{k2}, e_{k3})$$

Falls wir die Funktion auf allen Kombinationen der Basisvektoren kennen, dann kennen wir sie wegen der Linearität auf bel. Vektoren.

Einige der 27 Summanden wären z.B:
$f(e_1, e_1, e_1) = 0$
$f(e_1, e_1, e_2) = 0$
$f(e_1, e_1, e_3) = 0$
etc... und
$f(e_1, e_2, e_3) = 1$ Das Volumen des Eigenwürfels
$\Rightarrow$: Die Wahl des Proportionalitätsfaktors ist damit ausgeschöpft
Im Allgemeinen gilt: $f(v, w, ...) = -f(w, v, ...) \Rightarrow f((v, v), ...) = 0$
Wir wollen die Summanden =0 weglassen. Was für Tripel (k_1, k_2, k_3) können Werte $\neq 0$ liefern ?

Alle drei paarweise verschieden, d.h. (k_1, k_2, k_3) ist eine Permutation von $(1, 2, 3)$.

$\sum^3 k1 = 1 \sum^3 k2 = 1 \sum^3 k3 = 1$(Summanden evtl. $\neq 0$) $= \sum_{\pi \in \mathcal{S}} a_{\pi(1)1} a_{\pi(2)2} a_{\pi(3)3} *$ $\underbrace{f(e_{\pi(1)} e_{\pi(2)} e_{\pi(3)})}_{sign(\pi) f(e_1, e_2, e_3) = 1}$

$\Rightarrow$ Übrig bleiben noch sechs Summanden!

$f(e_1, e_2, e_3) = 1$ Proportionalitätsfaktor
$f(e_2, e_1, e_3) = -1$ durch Vertauschen von zwei Elementen
$f(e_1, e_3, e_2) = -1$ durch Vertauschen von zwei Elementen
$f(e_3, e_2, e_1) = -1$ durch Vertauschen von zwei Elementen
$f(e_2, e_3, e_1) = 1$ durch zweimaliges Vertauschen von zwei Elementen
$f(e_3, e_1, e_3) = 1$ durch zweimaliges Vertauschen von zwei Elementen

$$det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$(a_{11} - \lambda a_{22} - \lambda a_{33} - \lambda)(+1) + (a_{31} a_{12} a_{13})(+1) + (a_{21} a_{32} a_{12})(+1)$$

oder

$$det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$(a_{31} a_{22} - \lambda a_{13})(-1) + (a_{32} a_{23} a_{11} - \lambda)(-1) + (a_{21} a_{12} a_{33} - \lambda)(-1)$$

Diese Formel liefert für $n = 3$ eine Funktion mit allen Wunschvorstellungen! Ist ein kubische Polynom mit λ. Die Nullstellen des Polynoms sind die Zahlen, die gewählt werden können, um die Spaltenvektoren linear abhängig zu machen, also die Eigenwerte.

5.2 Für $n \times n$-Matrizen

Verallgemeinerung auf $n > 3$ mit Hilfe des Vorzeichens der Permutation.

$f(e_{k1}, .., e_{kn}) = 0$ außer falls $k_1, ..., k_n$ eine Permutation von$1, ..., n$ sind.

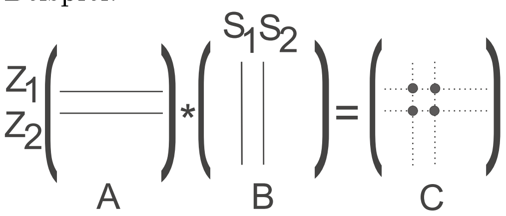
Die von 0 verschiedenen Werte:

$f(e_1, ..., e_n) = 1$ nach Wahl eines Proportionalitätsfaktors $\sigma \in \mathcal{S}_n$
$f(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}) = 1$ falls σ Transposition
$f(\sum_{k=1} a_{k(1)1} e_k 1, ..., a_{k(n)n} e_k n) = f(e_1, ..., e_n)$

Die Axiome besitzen mindestens eine, nämlich diese Realisierung.

5.2.1 Schlußworte zu Determinaten

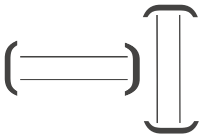
(Man soll nie denken, dass man alle relevanten Formeln kennt)
Beispiel:



Die zweireihige Unetrdeterminanten von C können aus den 2-reihigen Unterdeterminanten von A und B berechnet werden.

$$\begin{pmatrix} \langle z_1, s_1 \rangle & \langle z_1, s_2 \rangle \\ \langle z_2, s_1 \rangle & \langle z_2, s_2 \rangle \end{pmatrix} \text{ Unterdet. von C } \langle z_1, s_1 \rangle \cdot \langle z_1, s_2 \rangle - \langle z_2, s_1 \rangle \cdot \langle z_2, s_2 \rangle$$

Betrachtung der Vektoren von oben:



$z_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$
$z_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = (b_{11}, \dots, a_{1n}) \\ s_2 = (b_{21}, \dots, a_{2n}) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Achtung: Spalten- und Zeilenindi-} \\ \text{ces in b nicht wie üblich}\end{array}$$

$\langle z_1, s_1 \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{1j}$

$$\langle z_1, s_1 \rangle \cdot \langle z_2, s_2 \rangle - \langle z_1, s_2 \rangle \cdot \langle z_2, s_1 \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{1j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{2k}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{2j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{1k}\right)\\
&= \sum_{jk} a_{1j}a_{2k}b_{1j}b_{2k} - a_{1j}a_{2k}b_{2j}b_{1k}\\
&= \sum_{jk} a_{1j}a_{2k}\underbrace{b_{1j}b_{2k} - b_{2j}b_{1k}}_{\text{Unterdet. B}}\sharp\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{1k}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{2j}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{2k}\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{1j}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{2j}\quad\underbrace{-b_{1j}b_{2k} + b_{2j}b_{1k}}_{\substack{\text{diesselbe}\quad\text{Unterdet.}\\ \text{wie oben}}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} -a_{1k}a_{2j}b_{1j}b_{2k} - b_{2j}b_{1k}\\
&\qquad \text{mit } \sharp \text{ addieren und dann mit } \tfrac{1}{2} \text{ multiplizieren}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k}\underbrace{(a_{1j}a_{2k} - a_{1k}a_{2j})}_{\text{Unterdet. von A}}\cdot\underbrace{(b_{1j}b_{2k} - b_{2j}b_{1k})}_{\text{Unterdet. von B}}
\end{aligned}
$$

Die Unterdeterminante von C wird sogar bilinear aus denen von A und denen von B berechnet.

5.3 Multilineare Abbildung

Zweck: Funktion von n-Vektoren die über lin.abh./lin.unabh. enstcheidet.
Strategie: Bestimme das Volumen des Spates $(v_1, \dots, v_n)$
Formel: Spaltenvektoren seien:

$$
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{matrix}, \det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1}\cdot a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n}\cdot \operatorname{sign}(\sigma)
$$

realisiert eine multilineare Abbildung $f : (v_1, \dots, v_n) \to f(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}(K)$ und „alternierend" $\Leftrightarrow$ Beim Vertauschen von zwei Argumenten ändert sich das Vorzeichen.
Alle v_j bis auf eines, etwa v_b seien fest $v_b \to f(v_1, \dots, v_n)$ linear.

Satz: Der Vektorraum der n-linearen alternierenden Funktionen

$$
f : \underbrace{V\times\dots\times V}_{n\text{-mal}} \mapsto n
$$

ist eindimensional.

Eine multilineare Abbildung ist festgelegt, sobald die Werte auf allen Kombina-

tionen von Basisvektoren bekannt sind.
Da f alternierend sit, sind die Werte 0, sobald ein Basisvektor in der Argumentation doppelt vorkommt.
Es bleibt zu diskutieren: $f\left(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}\right)$.
Da eine Permutation σ als Komposition von Transpositionen geschrieben werden kann und da $f\left(e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(n)}\right) = -f\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ ist alternierend, daher ist notwendig $f\left(e_{\tau(1)}, \ldots, e_{\tau(n)}\right) = \mathrm{sign}\sigma * f\left(e_1, \ldots, e_n\right)$
A sei die Matrix mit den Spaltenvektoren (a_j) und

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \underbrace{a_{\sigma(1)_1} * \ldots * a_{\sigma(n)_1} * \mathrm{sign}(\sigma)}_{\text{sortiere die Faktoren nach den 1-Indices}} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} a_{1_{\sigma(1)^{-1}}} * a_{2_{\sigma(2)^{-1}}} * \ldots * a_{n_{\sigma(n)^{-1}}} * \mathrm{sign}(0)
\end{aligned}$$

D.h. die Spaltenvektoren von a sind die Zeilenvektoren von A^t (A-transponiert).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \swarrow\nearrow & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

5.4 Entwicklungssatz nach Spalten - Laplace'scher Entwicklungssatz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \ldots & a_{nm} \\ & \mathbf{a_{22}} & \ldots & \mathbf{a_{22}} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\sum_{\sigma \in \mathbb{S}} \underbrace{a_{1_{\sigma(1)^{-1}}}}_{a_{k1}} * a_{2_{\sigma(2)^{-1}}} * \ldots * a_{n_{\sigma(n)^{-1}}} \mathrm{sign}(\sigma)}^{\text{nur die } k=1 \text{ betrachten}}$$

Laplace'scher Entwicklungssatz:

$$= \sum_{-1}^{n} (-1)^{k+1} * a_{k1} * \det(\text{kompl. Matrix})$$

Wie man sehen kann, gibt es keinen Index$= 1$ in den letzten Faktoren. Diese stammen alle aus der Teilmatrix $\begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S} \\ \sigma(1) = 1}} a_{11} * a_{\sigma(2)2} * \ldots * a_{\sigma(n)n} * \mathrm{sign}(\sigma) \overset{\text{Beh}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Behauptung: Das Vorzeichen $\mathbb{S}_n(\sigma) = \text{sign}(\hat{\sigma})$
Beweis: Benutze die Fehlstellenformel:

$$\sigma \in \{\sigma \in \mathbb{S}_n; \sigma(1) = 1\} \Leftrightarrow \{\hat{\sigma} \in \mathbb{S}_{n-1}\} \quad \text{mit}\sigma : \{2, \ldots, n\} \overset{\text{bijektiv}}{\mapsto} \{2, \ldots, n\}$$

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathbb{S} \\ \sigma(1) = 1}} a_{k1} * \left[a_{\sigma(2)2} * \ldots * a_{\sigma(n)n}\right] * \text{sign}(\sigma) = (-1)^{k+1} * a_{k1} * \det\left(\text{zu } a_{k1} \text{ komplementäre Matrix}\right)$$

Hierbei fällt auf, daß der zweite Index niemals gleich 1 und der erste Index niemals gleich k ist.
Die $(n-1)$ letzten Faktoren stammen aus der zu a_k komplementären Matrix, der aus A entsteht indem die Spalte und die letze Zeile gestrichen werden. Es gilt nun:

$$\sigma \in \{\sigma \in \mathbb{S}_n; \sigma(1) = 1\} \Leftrightarrow \{\hat{\sigma} \in \mathbb{S}_{n-1}\} \quad \text{mit}\sigma : \{2, \ldots, n\} \overset{\text{bijektiv}}{\mapsto} \{1, \ldots, n\} \backslash \{k\}$$

σ kann also wieder mit einer Permutation $\hat{\sigma} \in \mathbb{S}_{n-1}$ identifiziert werden.

$$\boxed{\text{sign}\sigma \quad ? \quad \text{sign}(\hat{\sigma})}$$

Es gilt nun:

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2, \ldots, n \\ k & \sigma(2), \ldots, \sigma(n) \end{pmatrix}$$

die Fehlstellen liefern hier $\text{sign}(\hat{\sigma})$. Wie viele zusätzliche Fehlstellen hat σ? Nun ja, offenbar $(k-1)$.

$$\boxed{\text{sign}\sigma = (-1)^{k+1} * \text{sign}(\hat{\sigma})}$$

5.5 Die Determinante eines Endomorphismus

Sei $F \neq 0$ eine n-lineare alternierende Abbildung. $f : V \times V \mapsto K$ und sei A ein V-Endomorphismus!
Definition :$f_A(v_1, \ldots, v_n) := f(A * v_1, A * v_2, \ldots, A * v_n)$
Bemerke :f_A ist multilineare und alternierend.

Satz: Der Vektorraum von solchen Abbildungen ist 1-dimensional

Daraus folgt:
$f_A = const * f$. Diese Konstante heißt $\det(A)$.

$$\det(A) = \frac{f(A * v_1, \ldots, A * v_n)}{f(v_1, \ldots, v_n)} \quad \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ irgendeine Basis}$$

Dieser Quotient ist von der Wahl von f unabhängig, da $g \neq 0$ also $g = \lambda * f, \lambda \neq 0$ geschrieben werden kann.

Determinantenmultiplikationssatz:

$$\det(A * B) = \det(A) * \det(B) \quad A, B \in \mathrm{End}(V)$$

Beweis: Wähle $f \neq 0$, n-linear und alternierend, und eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

$$\begin{aligned} \det(A * B) &= \frac{f(A * B * v_1, \ldots, A * B * v_n)}{f(v_1, \ldots, v_n)} \\ \det(B) &= \frac{f(B * v_1, \ldots, B * v_n)}{f(v_1, \ldots, v_n)} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1. **Rang**$(B) < n$
   $B * v_1, \ldots, B * v_n$ linear abhängig. Daraus folgt: $\det(B) = 0$
   $A * B * v_1, \ldots, A * B * v_n$ linear abhängig. Daruaus folgt: $\det(A * B) = 0$

2. **Rang**$(B) = n$ $\{w_1, \ldots, w_n\} = \{B * v_1, \ldots, B * v_n\}$ sind eine andere Basis.

$$\begin{aligned} \det(A * B) &= \frac{f(A * w_1, \ldots, A * w_n)}{f(v_1, \ldots, w_1)} * \frac{f(B * v_1, \ldots, B * v_n)}{f(v_1, \ldots, v_n)} \\ &= \det(A) * \det(B) \end{aligned}$$

   mit Übereinstimmung mit der Volumeninterpretation

Wenn man einen Basiswechsel auf eine andere Basis $\{w_1, \ldots, w_n\}$ druchführt, dann ändert sich die Matrix so:

$$(A)_{\{w_1, w_n\}} = (S)(A_{\{w_1, w_n\}}) * \left(S^{-1}\right)$$

Die Determinante von A kann aus jeder für A betrachtet werden.

$$\det(A) = \det(S \circ A \circ S^{-1}) \quad \text{, also für alle zu } A \text{ konjugierten Endomorphismen dasselbe}$$

5.5.1 Koeffizienten von Linearkombinationen

Gegeben eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und ein $v \neq 0$. Wie findet man $v = \sum_{k=1}^{n} x_k * e_k$?

Frühere Antwort: Falls wir auf V ein Skalarprodukt gewählt haben $<,>$ und falls $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormale bestimmt, so gilt: $x_k =< v, e_k >$

$$\frac{\det(e_1, \ldots, \overbrace{v}^{\text{k-te Spalte}}, \ldots, e_n)}{\det(e_1, \ldots, e_n)} \underset{\text{ten Argument}}{\overset{\text{Linearität im k-}}{=}} \sum_{j=1}^{n} x_j * \frac{\det(e_1, \ldots, e_j, e_{k+1}, \ldots, e_n)}{\det(\det(e_1, \ldots, e_n))}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $\text{Rang}(A - \lambda \text{id}) < n$ ist:

$$P_A(\lambda = \det(A - \lambda * (id))$$

Also:

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}} a_{\sigma(1)n}, \ldots, a_{\sigma(n)n} * \text{sign}(\sigma) \ \} \det(A - \lambda * \text{id})$$

Also: Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen der Polynome $\lambda \mapsto P_A(\lambda)$. Das Polynom heißt charakteristische Polynom.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nm} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda)^n + \underbrace{\sum_{j-1}^{n}}_{\text{Spur A}} a_{jj} - (\lambda)^{n-1} + \ldots + \det(A) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten diese charakteristischen Polynoms ändern sich unter Konjugation nicht!

6 Numerische Abschätzung des Integrals

zwei Aufgaben

Hauptsätze über stetige Funktionen   Handwerkszeug entwickeln

Leibnizreihen, Konvergenz ist übersichtlicher als in anderen Fällen
$0 \leq a_n$ monoton fallende Nullfolge
Definition: $l_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k$

$$\underbrace{a_0 - a_1}_{} \geq 0 + \underbrace{a_2 - a_3}_{} \geq 0 \dots$$

$$\underbrace{a_0 - a_1 + a_2}_{} \leq 0 - \underbrace{a_3 + a_4 - a_5}_{} \leq 0 \dots$$

$l_{n(\text{ungerade})}$ wachsend
$l_{n(\text{gerade})}$ fallend
Jede Leibnizreihe kommt mit einer Intervallschachtelung

$$[l_1, l_2] \subset [l_3, l_4] \subset [l_5, l_6] \text{ Länge: Nullfolge}$$

Behauptung: Die Zahl $\frac{1}{l} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$ ist irrational
$n \geq 1$ Speziell:

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc} \sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} & < & \frac{1}{l} & < & \sum\limits_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \text{Unterschied}\frac{1}{(2n)!} & & \end{array}}_{0<|\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}-\frac{1}{l}|\sharp<\frac{1}{(n+1)!}}$$

Indirekter Beweis
Angenommen $\frac{1}{l} = \frac{P}{Q}$ dann wähle in $\sharp$ $n = Q$

$$0 < \frac{1}{Q!} < |\frac{\text{Zähler} \neq 0}{Q!}| = |\sum_{k=0}^{Q} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{P}{Q}| < \frac{1}{(Q+1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Q!} \leq \frac{1}{(Q+1)!} \text{ Widerspruch!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l} \neq \frac{P}{Q}$$

$A \subset \mathbb{R}^d$ sei vollständig und beschränkt. $f : A \to \mathbb{R}^e$ sei stetig.

$$\boxed{\text{Vollständig + Beschränkt =: } \textbf{Kompakt}}$$

Behauptung
$f(A)$ ist beschränkt
Folgerung: $m * \sup|f(A)|$ existiert und ähnlich wie im Beweis des Zwischenwertsatzes gibt es ein $a \in A$ mit $|f(a)| = m$ Maximumsatz

Voraussetzungen (etwas ausführlicher)

- A beschränkt: Es gibt $S \in \mathbb{R}, a \in A \Rightarrow |a| \leq S$
- A vollständig: $\{a_n\}$ Cauchy-Folge in A
  $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^d = a \overset{\text{Beh.}}{\in} A$

f stetig:

1. f ist stetig an jeder Stelle $a \in A$
2. folgenstetig: Falls $a_n \overset{\text{konv.}}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(a_n) \overset{\text{konv.}}{\longrightarrow} f(a)$
   oder $\varepsilon - \delta-$stetig: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_{\varepsilon,a}$ so dass
   $x \in A, |x-a| \leq \delta_{\varepsilon,a} \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Satz über die gleichmäßige Stetigkeit:
$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig auf A, d.h. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es δ_ε so dass $x, y \in A; |x-y| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

$U \subset \mathbb{R}^d(\mathbb{Q}^d)$ heißt **offen**:
Falls zu jedem $u \in U$ eine Kugel $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x-u| < r\}$ in U enthalten ist.

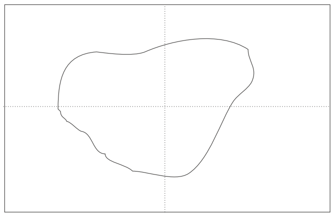
6.1 Beweis des Beschränktheitssatzes

Behauptung:
$A \subset \mathbb{R}^d$ sei vollständig und beschränkt; ferner sei die Abbildung $F : A \to \mathbb{R}^e$ stetig. Dann ist $F(A)$ beschränkt.
Indirekter Beweis mit Quaderhalbierung
$F(A)$ sei unbeschränkt. Wähle zu dem Skalarprodukt eine ON-Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$. Die Beschränktheit von A bedeutet, dass es einen Quader
$Q_1 := \{v = \sum_{k=1}^d x_k e_k; |x_k| \leq l_k\}$ mit Kanten der Länge l_k parallel zu den Vektoren e_k gibt mit $A \subset Q_1$.
Wähle $a_1 \in A \cap Q_1$ mit $|F(a_1)| > 1$ — das ist möglich weil 1 keine Schranke für die unbeschränkte Menge $F(a)$ ist. Betrachte die 2^d Teilquader von Q_1, die durch Halbieren der Kantenlängen von Q_1 entstehen. Für mindestens einen, genannt Q_2, ist wahr, dass $F(A \cap Q_2)$ nicht beschränkt ist. Wähle $a_2 \in A \cap Q_2$ mit $|F(a_2)| > 2$. Konstruiere durch Wiederholung dieses Schrittes eine Quaderschachtelung Q_n, so

dass F auf $A \cap Q_n$ nicht beschränkt ist, also $a_n \in A \cap Q_n$ gewählt werden kann mit $|F(a_n) \geq n$.
Wegen $a_n \in Q_n$ ist $\{a_n\}$ eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von A einen Grenzwert $a \in A$ hat. Wegen $|F(a_n)| \geq n$ konvergiert $\{F(a_n)\}$ nicht gegen $F(a)$ — im Widerspruch zur vorausgesetzten (Folgen-) Stetigkeit.

6.2 Beweis aus kompakt und stetig $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig

Voraussetzung
A vollständig und beschränkt (= kompakt) $f: A \to \mathbb{R}^e$ stetig (in jeder Stelle $a \in A$)
Behauptung
f ist gleichmäßig stetig
Indirekter Beweis
Es gibt also ein ε^* für das sich kein δ mehr finden läßt, also weder $\delta_1 = \frac{1}{2}$, noch $\delta_2 = \frac{1}{4}, \ldots$, auch $\delta_n = \frac{1}{2^n}$ sind nicht klein genug als dass: $|x - y| \leq \delta_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon^*$
Q



Q mit Teilquadern

Wenn f gleichmäßig stetig auf $A \cap Q$ ist, dann ist f auch nicht gleichmäßig stetig auf min. einer der Mengen $A \cap Q_{\text{halb,k}}$ $k = 1, \ldots 2^d$
Zu jedem δ_n gibt es also min. einen Ausreißer $a_n \in A \cap Q_n$
d.h. zu a_n gibt es b_n mit $|a_n - b_n| \leq \delta_n$ aber $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon^*$
a_n ist jetzt Cauchy-Folge, konvergiert also gegen $a \in A$ weil A vollständig ist.
f ist stetig bei a, d.h. zu $\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon^*$ gibt es $\delta > 0$, so dass $x \in A$

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon^*$$

Wähle n so groß, dass

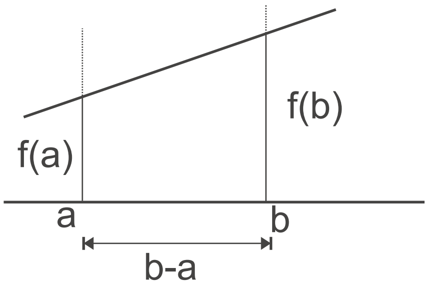
$$\begin{array}{lll}
\delta_n \leq \frac{1}{3} \quad \text{und} & |a_n - a| \leq \frac{1}{3}\delta & \Rightarrow |f(a_n) - f(a)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon^* \\
|a_n - b_n| \leq \delta_n \leq \frac{1}{3}\delta & |b_n - a|\frac{2}{3}\delta & \Rightarrow |f(b_n) - f(a)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon^* \\
 & & \Rightarrow |f(a_n) - f(b_n)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon^*
\end{array}$$

$$\Rightarrow |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon^* \text{ und } |f(a_n) - f(b_n)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon^* \text{ Widerspruch!}$$

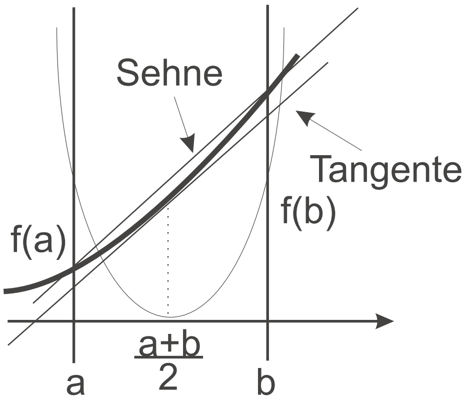
6.3 Schrankensatz und numerische Berechnung von Integralen: $\int_a^b f(x)dx$

Für lineare Funktionen $f(x) = f(a) + m(x-a)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \tfrac{f(a)+f(b)}{2} * (b-a) &=:& \; ST(f) \text{ SehnenTrapez}\\ &= f(\tfrac{a+b}{2}) * (b-a) &=:& \; TT(f) \text{ TangentenTrapez}\end{aligned}$$



Wie falsch ist das, wenn f nicht so einfach ist?



Kurve: $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$

Voraussetzung (weil z.B. $\cup$ sehr unterschiedliche ST und TT hat)

$|f''| \le B$

$$\overset{\text{S.S.}}{\Longrightarrow} |f(x) - f(\frac{a+b}{2}) - f'(\frac{a+b}{2}) \cdot (x - \frac{a+b}{2})| \le \frac{B}{2} \cdot |x - \frac{(a+b)}{2}|^2$$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$F''' = f'' \Rightarrow |F'''| \le B$

$$\left| F(x) - F\left(\frac{a+b}{2}\right) - F'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (x - \frac{a+b}{2}) - \frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} \cdot (x - \frac{a+b}{2})^2 \right| \le \frac{B}{6}(x - \frac{a+b}{2})$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Die obere Zeile mit $x = a$ und $x = b$ benutzen und in die zweite Ziele einsetzen $\rightsquigarrow$

$$|\underbrace{F(b) - F(a)}_{\int_a^b f(x)dx} - \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)}_{TT(f)}| \leq \frac{B}{3} \cdot |\frac{b-a}{2}|^3$$

6.4 Numerische Abschätzungen

Benötigt:
1.) Handwerkliches
2.) Hauptsätze für stetige Funktionen

zu 1.)
Definition des Integrals:
Endliche Riemannsumme (RS) mit...

- $f : [a, b] \to \mathcal{R}^d$ (Kurve)
- Einteilung $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$
- Zwischenstellen $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$

$\Rightarrow RS(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)(t_{j-1} - t_j)$
$I \in \mathcal{R}^d$ heißt Integral von f über $[a, b]$, falls gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle Einteilungen, die feiner sind als δ (und bel. Zwischenkonst.) gilt:$|RS(f) - I| \leq \epsilon$

Hauptsatz:
Falls $F' = f$ ist, so gilt $F(b) - F(a) = I$
1-dimensionale Vereinfachung:

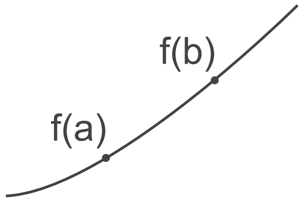
- Obersummen (OS) sind $\geq$ dem was man sucht.
- Untersummen (US) sind $\leq$ dem was man sucht.

Falls inf OS = sup US, so heißt die Zahl $\int_a^b f(x)dx$.
OS/US können nur durch verfeinern der Einteilung verkleinert/vergrößert werden!

Kontinuierliche Dreiecksungleichung (gilt für irgendeine Norm auf $\mathcal{R}^d$)

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \overset{a\leq b}{\leq} \int_a^b |f(x)|dx}$$

Numerische Berechnungen:



$\frac{1}{2}(f(a)-f(b))(b-a)$ für $f(x)=p+v\cdot x$ gibt das schon das richtige Integral

$f(\frac{a+b}{2})(b-a) = \int_a^b \underbrace{[f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x+\frac{a+b}{2})]}_{tang(x)}\, dx$

Voraussetzung: $|f''| \leq B$

$|f(x) - tang(x)| \leq \frac{B}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2$

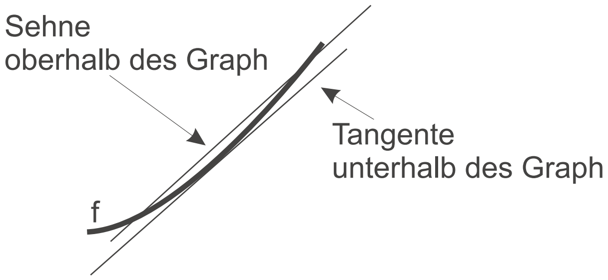
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)\right| &= \left|\int_a^b f(x) - tang(x)dx\right| \\
&\overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \int_a^b |f(x)-tang(x)|dx \\
&\overset{\text{a}\leq\text{b}}{\leq} \int_a^b \frac{B}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2 dx \\
&= \frac{B}{6}\frac{(b-a)^3}{4} \\
&= \frac{B}{24}(b-a)^3
\end{aligned}$$

Unterschied zw. der gesuchten Zahl und der numerischen (Tangenten)Abschätzung!

Versuche dieselbe Überlegung auf die Sehne, $sehne(x) = \frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a}$

$\int_a^b sehne(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

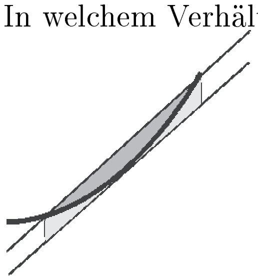
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx - f(\frac{f(a)+f(b)}{2})(b-a)\right| &= \left|\int_a^b f(x) - sehne(x)dx\right| \\ &\overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \int_a^b |f(x) - sehne(x)|dx \\ &\overset{\text{d=1}}{\leq} \int_a^b \frac{B}{2}(x-a)(b-x)dx \\ &= \frac{B}{12}(b-a)^3\end{aligned}$$



Wenn $B \geq 0$:
$f(\frac{a+b}{2})(b-a)$ ist zu klein $\rightarrow$ Tangente $\frac{2}{3}$

$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ ist zu groß $\rightarrow$ Sehne $\frac{1}{3}$

In welchem Verhältniss sollte man mitteln ? ARCHIMEDES $\rightsquigarrow 2:1$



Mittel: $SP(f) = \frac{1}{6}(f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) \cdot (b-a)$

Ist auch für quadratische und kubische Funktionen/Polynome verwendbar!
Wenn man den Schrankensatz 4 mal anwenden könnte, dann würde folgen:

$\left|\int_a^b f(x)dx - SP(f)\right| \leq \frac{max|f''''|}{2880}(b-a)^5$

zu 2.) gleichmäßig:
Schon bekannt sind folgende:

- gleichmäßig stetig:
  $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \epsilon$

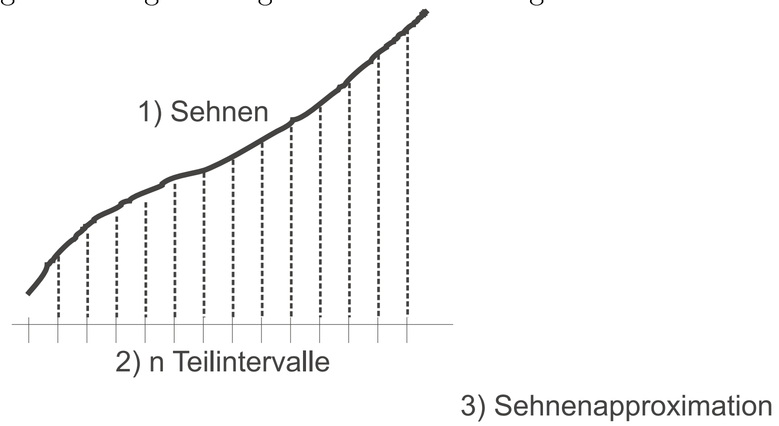
- gleichmäßig stückweise linear approximierbar:
  $\{sa_n\}_{n=1}^{\infty}$ Genzfunktion von f

- gleichmäßige Fehlerschranken:
  z.B. für Polynome $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$|P(X) - tang_a(x)| \overset{(x-a)\leq 1}{\leq} \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} |a_k| k(k-1)(|a|+1)^{k-2}}_{\text{const aus den Koeff. berechnet}} \cdot (x-a)^2$$

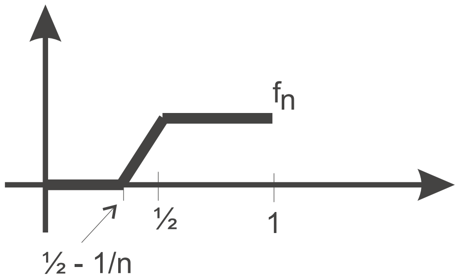
NEU!

- gleichmäßig konvergente Funktionenfolge:



Wir betrachten Funktionen $f : A \subset \mathcal{R}^d \longrightarrow \mathcal{R}^d$
Bisher: Konvergente folgen von Funktionswerten $\{f_n(x)\}$ d.h. zu jeder Stelle x und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $n_{\epsilon,x}$, so daß $m, n \geq n_{\epsilon,x} \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$.
NEU: gleichmäßige Konvergenz dieser Folgen:
Definition: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_ϵ(ausdrücklich unabh. von x), so daß $m, n \geq n_\epsilon \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$.

Einfaches Beispiel für paarweise aber nicht gleichmäßige Konvergenz:



Hauptsatz über gleichmäßige Konvergenz von Folgen stetiger Funktionen f_n

Behauptung: Die Grenzfunktion ist stetig.

Ausführlichere Formulierung:
$f_n : A \subset \mathcal{R}^d \longrightarrow \mathcal{R}^d$ sei stetig $\forall n$, außerdem:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index n_ϵ, so daß: Falls $m, n \geq n_\epsilon$, so ist für jedes $x \in A \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$.

Behauptung: Für jedes $x \in A \quad \exists f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ und

$$\boxed{f_\infty : A \longrightarrow \mathcal{R}^e \quad \text{ist stetig}}$$

Beweis:

- Für jedes einzelne x ist vorausgesetzt, daß $\{f_n(x)\}$ eine CF ist. Weil $\mathcal{R}^e$ vollständig ist, konvergiert diese CF. Daher können wir definieren:
$f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes x eizeln

- Behauptung: Diese Grenzfunktion ist stetig an jeder Stelle $a \in A$. Zu jedem $\epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in A \quad , \quad |x - a| \leq \delta$
$\Rightarrow |f_\infty(x) - f_\infty(a)| \leq \epsilon$

  Beweis: Zu $\epsilon_k := \frac{1}{3}$ gibt es n_ϵ, so daß folgt, wenn $m, n \geq n_\epsilon$
$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon_k$
$\overset{Archimedes}{\Rightarrow} |f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \epsilon_k$
gilt für alle $x \in A$

  Wähle ein $m^* \geq n_\epsilon$ und benutze die Stetigkeit von f_{m^*} (Es ist nicht günstig, m^* unnötig groß zu wählen)

  Zu $\epsilon_s = \frac{1}{3}\epsilon$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $x \in A \quad , \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f_{m^*}(x) -$

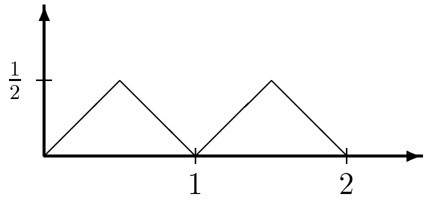
$f_{m^*}(a)| \leq \epsilon_s$

Noch für die Grenzfunktion:
$x \in A \quad , \quad |x - a| \leq \delta \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |f_\infty(x) - f_\infty(a)| &= |(f_\infty(x) - f_{m^*}(x)) + (f_{m^*}(x) - f_{m^*}(x)) + (f_{m^*}(a) - f_\infty(a))| \\ &\leq (\underbrace{|f_\infty(x) - f_{m^*}(x)|}_{\leq \epsilon_k} + \underbrace{|f_{m^*}(x) - f_{m^*}(a)|}_{\leq \epsilon_s} + \underbrace{|f_{m^*}(a) - f_\infty(a)|}_{\leq \epsilon_k}) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Zwei Beispiele:

1. Sägefunktion:



Graph von säg

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \text{säg}(4^k x)$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n_\epsilon}} \cdot 2 \quad \text{NF}$$

$\Rightarrow \{f_n\}$ ist also gleichmäßig konvergent. Daher ist die Grenzfunktion (Weierstraß - Ostillator) stetig.
4^k sorgt dafür, daß die addierten Zacken immer steiler werden. Darauy folgt: f_∞ ist nirgends differenzierbar.

2. Potenzreihe: $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

Vorausetzung: $\{P_n(z_0)\}, \quad z_0$ konvergent

Hilfsatz: $P_{n+1}(z_0) - P_n(z_0) = a_{n+1} \cdot z_0^{n+1}$ ist NF und daher beschränkt.

Behauptung: $A_q := \{z \in \mathcal{C}; |z| \leq q \cdot |z_0|\} \quad 0 < q < 1$
$\{P_n\}$ ist auf A_q gleichmäßig konvergent.

$|a_k z^k| \leq |a_k| \cdot q^k \cdot |z_0|^k \leq S \cdot q^k$ geometrisch majorisiert!

$\Rightarrow$ Schlußresultat:

$$m, n \geq n_\epsilon \Rightarrow |P_m(z) - P_n(z)| \leq \frac{S \cdot q^n}{1-q}$$

Umformulierung:

$\{f : A \to \mathcal{R}^e, \quad f \text{stetig und konvergent}\}$ bilden Vektorraum V
Sei $f \in V$. Die "Größe" oder "Norm" eines $f \in V$ messen wir durch

$$||f||_\infty := sup\{|f(x)|_{\mathcal{R}^e}; x \in A\} < \infty$$

$\Rightarrow |f(x)| < ||f(x)|| \quad \forall x$

Verifizierte Axiome:

1. $||f|| \geq 0$ wenn $||f|| = 0 \Rightarrow$ alle $|f(x)|_{\mathcal{R}^e} = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \in V$

2. $||r \cdot f|| = |r| \cdot ||f||$

3. $f, g \in V$

$$\begin{aligned} ||f+g|| &= sup\{|f(x)+g(x)|, x \in A\} \\ &\leq sup\{|f(x)| + |g(x)|, x \in A\} \\ &\leq sup\{||f|| + ||g||, x \in A\} \\ &= ||f|| + ||g|| \end{aligned}$$

Umformulierung des Hauptsatztes:
V ist $|| \quad ||$-Vollständig, d.h. jede $|| \quad ||$-CF hat eine stetige Grenzfunktion.
Beweis:
$\{f_n\}$ sei $|| \quad ||$-CF in v, d.h. zu jedem $\epsilon > 0 \exists n_\epsilon$, so daß:

$$m, n \geq n_\epsilon \Rightarrow ||f_m + f_n|| \leq \epsilon, d.h. \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \forall x \in A$$

Mit anderen Worten: $\{f_n\}$ ist gleichmäßig konvergent (Hauptsatz) gegen eine stetige Grenzfunktion f_∞
Frage: ist $f_\infty \in V$?
Beweis: z.z.: $||f_\infty|| < \infty$

$$\begin{aligned}
m, n \geq n_\epsilon \quad & \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in A \\
& \overset{Archimedes}{\Longrightarrow} \quad |f_m(x) - f_\infty(x)| \leq \epsilon \\
& \Rightarrow \quad ||f_m + f_\infty|| < \epsilon \\
& \Rightarrow \quad \underbrace{||f||_\infty \leq \underbrace{||f_m||}_{<\infty} + \underbrace{||f_\infty - f_m||}_{\leq \epsilon}}_{\Rightarrow f_\infty \in V}
\end{aligned}$$

Schließlich: Ist auch $||f_\infty - f_m|| =: r_m$ NF?
Beweis: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein m_ϵ, so daß $m \geq n_\epsilon$
$\Rightarrow$
$||f_\infty(x) - f_m(x)|| \leq \epsilon$
$\Rightarrow$
$||f_\infty - f_m|| = sup \underbrace{|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \epsilon}_{|(f_m - f_\infty)(x)|}$
$\Rightarrow$ NF

Satz: Jedes nicht konstante komplexe Polynom zerfällt in Linearfaktoren $(x - a_i)$.

Schritt 1: Es genügt zu zeigen: Jedes nicht konstante komplexe Polynom hat mindestens eine Nullstelle, weil $P(z) - P(a) = (z - a) \cdot P_1(z)$

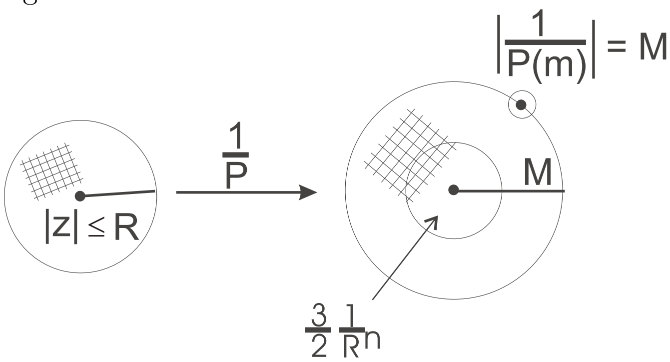
Schritt 2: Weit außen braucht man keine Nullstellen zu suchen:

$$\begin{aligned}
P(z) &= a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1} + 1 \cdot z^n \\
&= z^n (1 + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n})
\end{aligned}$$

$$R := \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) \cdot 3$$

$$|P(z)| \geq |z|^n \cdot \left(1 - \underbrace{\left(\frac{|a_{n-1}|}{R} + \frac{|a_{n-2}|}{R} + ... + \frac{|a_0|}{R}\right)}_{\leq \frac{1}{3}}\right) \geq \frac{2}{3}|z|^n$$

Schritt 3: Indirekt: Falls P keine Nullstellen hat, so ist $f := \frac{1}{P} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ stetig.



Genauere Diskussion:

$P(0) = a_0 \neq 0$ (P ohne NS)

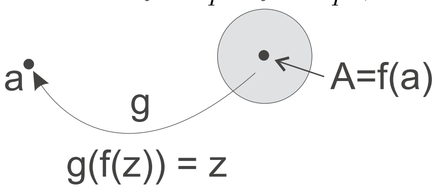
$|P^{-1}(0)| = |a_0^{-1}| \leq M$

$\frac{3}{2R^n} \leq \frac{3}{2R} \leq 32 \cdot (3 \cdot |a_0|) \leq \frac{1}{2}M$

$$\frac{1}{P} : \mathcal{C} \to \{z \in \mathcal{C}, |z| \leq M\}$$

Schritt 4: f sei komplex differenzierbar, $f(a) = A, \quad f'(a) \neq 0$

Betrachte $f = \frac{1}{P} \quad f' = \frac{P'}{P^2}$, dann hat f' höchstens $(n-1)$ NS



- Günstiger Fall:

$$P'(m) \neq \Longrightarrow \left(\frac{1}{P}\right)'(m) \neq 0$$

$\Rightarrow$ Eine Kreisscheibe um $\frac{1}{P}(m)$ besteht aus Werten der Funktion $\frac{1}{P}$!
$\Longleftarrow$

- Ungünstiger Fall: $P'(m) = 0$

  Satz: Eine Scheibe um A besteht tatsächlich immer aus Werten von f, auch wenn $f'(a) \neq 0$ nicht wahr ist!

  Beweis: Für Funktionen $f = \frac{1}{P}$

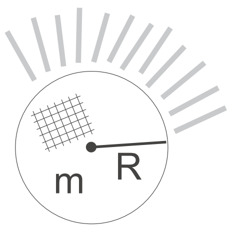
$$\begin{aligned} f(z) - f(a) &= \frac{1}{P(z)} - \frac{1}{P(a)} \\ &= \frac{P(a) - P(z)}{P(z) \cdot P(a)} \\ &= (z-a)^k \cdot \frac{P_1(z)}{P(z) \cdot P(a)} \\ &\Rightarrow P_1(a) \neq 0 \end{aligned}$$

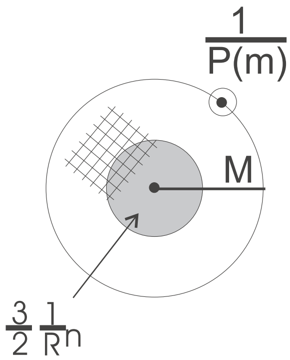
6.5 Komplex differenzierbare Abbildungen sind surjektiv auf einer Umgebung jedes Bildpunktes

Sei P ein Polynom ohne Nullstellen und $\frac{1}{P} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig.

$$\frac{1}{P} : \{|z| \geq R := 1 + 3 * \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\} \to \{|z| \leq \frac{3}{2R}$$

$\frac{1}{P}$ hat auf der beschränkten vollständigen Kugel $\{|z| \leq R\}$ ein Maximum $M \geq \frac{1}{|a_0|} \geq \frac{3}{R}$





Umkehrsatz: Falls $p'(m) \neq 0$ also auch $\left(\frac{1}{P}\right)'(m) = 0$,
so sind alle Punkt aus einer Umgebung
von $\frac{1}{P}(m)$ Bildpunkte von p.

Was passiert wenn $p'(m) = 0$?

Betrachte

$$\frac{1}{P(z)} - \frac{1}{P(A)} = \frac{P(a)-P(z)}{P(a)*P(z)} = \frac{\overbrace{(z-a)^k}^{\substack{\text{mit } k \text{ max} \\ P_1(a)\neq 0}} \; *P_1(z)}{P(a)*P(z)}$$

Voraussetzung: $P'(a) = 0 \Rightarrow P_1(a) = 0$

$$\underbrace{((z-a)*g(z))^k}_{\substack{\text{Ableitung } < 0 \\ \text{bei } a \text{ mit } h(a)\neq \\ 0 \text{ ist also nach} \\ \text{Umkehrsatz sur-} \\ \text{jektiv.}}} *(z-a)^k * h(z)$$

Behauptung: Obwohl die Ableitung bei a verschwindet $(k > 1)$ ist $z-1$ mit $|z-a| < 0$ $(z-a)^k * h(z)$ surjektiv auf einer Umgebung von 0.

Das Ziel nun $g(z) = \sqrt[k]{h(z)}$ als differnzierbare Funktion zu definieren. In der Nähe von a, $h(a) \neq 0$. Also $f(z) = z^k$.
Finde eine differnzierbare Umkehrfunktion in der Nähe von $f(1) = 1$

$$N_w(z) = z - \frac{f(z)-w}{f'(z)}$$

Fixpunkt von N_w ist ein f-Urbild von w.

$$\begin{aligned} \left|N_{w_1}(z) - N_{w_2(z)}\right| &\leq const * |w_1 - w_2| \\ \Rightarrow |Fixpunkt\,((N_{w_1}) - Fixpunkt\,(N_{w_2})| &\leq const * |w_1 - w_2| \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung dehnungsbeschränkt!

7 Dualbasen & Dualräume

$V_{\langle,\rangle}$ $a \in V$
$l_a(v) := \langle a, v\rangle$ $l_a \in Hom(V, \mathbb{R})$

$a \to l_a$ ist injektiv, $\dim V = \dim Hom(V, \mathbb{R})$
$a \to l_a$ bijektiv (Anwendung: Vergleich von Skalarprodukten)

$V = \mathbb{R}^3 \;\; a, b, c \in \mathbb{R}^3$

$$c \to \det(\underbrace{a, b}_{\text{fest}}, c) = \langle \varphi(a, b), c \rangle \overset{\text{Standard Bez.}}{=} \langle a \times b, c \rangle \text{Definition Kreuzprodukt}$$

linear

$$b \to \det(a, b, c) := \langle \varphi(a, b), c \rangle \left.\begin{array}{l} b \to \varphi(a, b)\text{linear} \\ \text{ebenso} \\ a \to \varphi(a, b)\text{linear} \end{array}\right\} \quad \text{und } \varphi(a, b) = \varphi(b, a)$$

7.1 Was passiert bei Basiswechsel in zusammengehörigen Vektorräumen?

z.B.: $(V, Hom(V, K), End(V) \dots)$
In der Frühzeit der Vektorrechnung hat man sich mit Säcken von Indices rumschlagen müssen.
$x \in V$ Basis $\{v_1, \dots v_d\}$

$$x = \sum_{k=1}^{d} \alpha^k v_k \quad \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^d \end{pmatrix}$$

Indices des Spaltenvektor (das sind Zeilennummern) werden hochgestellt

Basiswechsel $\{w_1, \dots, w_d\}$
$w_j = \sum_{k=1}^{d} a_j^k v_k$

$$\text{Matrix A } = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_d^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^d & & & a_d^d \end{pmatrix}$$

Wird benötigt um aus der alten Basis die neue zu berechnen.

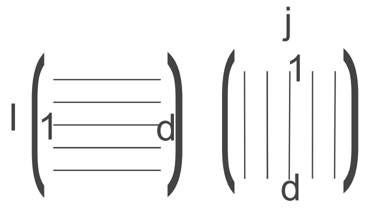
$$<>, \langle\rangle, \left\langle \sum_{j=1}^{n} \right\rangle \left\langle \sum_{j=1}^{n} \right\rangle$$

$v_k = \sum\limits_{l=1}^{d} b^l w_l$ Matrix B berechnet aus den neuen Basisvektoren die alten.
Die Matrizen A und B sind inverse Matrizen:

$$
\begin{aligned}
w_j &= \sum_{k=1}^{d} a_j^k \cdot \cancel{v}_k \left(\sum_{l=1}^{d} b_k^l \cdot w_l \right) \\
&= \sum_{k,l} a_j^k b_k^l w_l \\
&= \sum_{l=1}^{d} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{d} b_k^l a_j^k \right)}_{\text{Weil die } w_1, \dots, w_d \text{ eine Basis bilden steht hier 1 für } l = j \text{ und 0 für } l \neq j} w_l
\end{aligned}
$$

Die anderen Indices laufen durch die Zeilen

$$
\left(\sum_{k=1}^{d} b_k^l a_j^k \right) = (B \cdot A)_j^l = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}
$$



$$
x = \sum_{k=1}^{d} \alpha^k \cancel{v}_k \cdot \sum_{l=1}^{d} b_k^l w_l = \sum_{k,l} \alpha^{|k} b_{k\_}^l = \sum_{l=1}^{d} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{d} b_k^l \alpha^k \right)}_{\beta^l = (B) \cdot (\alpha)^l} = \sum_{l=1}^{d} \beta^l \cdot w_l
$$

Die Matrix B berechnet die neuen Komponenten (β) aus den alten (α)
Für die Komponenten benötigen wir die inverse Matrix für die Umrechnung der Basisvektoren. Name der Physiker: Diese Vektoren heißen kontravariant.
Betrachte den Vektorraum der Polynome mit Basis $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

$P = \sum \alpha^k$ (k-ter Basisvektor). Ein Polynom wird durch Angabe der $\begin{pmatrix} \alpha^0 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}$ mitgeteilt. In $Hom(V, K)$ kennen wir interessante Elemente:
$W_a \in Hom$

$$
W_a(P) = (1\alpha^0 + a\alpha^1 + a^2\alpha^2 + \dots) \overset{\text{als Matrixprodukt}}{=} (1, a, a^2, \dots, a^n) \begin{pmatrix} \alpha^0 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix}
$$

Dadurch, dass wir W_a als Zeile $(1, a, \ldots, a^n)$ schreiben, wählen wir eine Basis in $Hom(V, K)$ nämlich
Erster Basisvektor: $1 \to 1; x^* \to 0$
Zweiter Basisvektor: $x \to 1$; alle anderen $\to 0$
Zu jeder Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V wählen wir automatisch eine Basis von $Hom(V, K)$, nämlich $l^1(v_j) = \begin{cases} 1, j = 1 \\ 0, j \neq 1 \end{cases}$ $\quad l^k(v_j) = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$

7.2 Dualbasis

Die Basis $\{l^1, \ldots, l^d\}$ von $Hom(V, K)$ heißt **Dualbasis** von $\{v_1, \ldots, v_d\}$

Ein Basiswechsel $\{v_1, \ldots, v_d\} \to \{w_1, \ldots, w_d\}$ in V zieht automatisch einen Basiswechsel in $Hom(V, K)$ nach sich, nämlich von der Dualbasis zu $\{v_1, \ldots, v_d\}$ auf die Dualbasis der $\{w_1, \ldots, w_d\}$

$\{v_1, \ldots, v_d\}$ für V, Dualbasis $l^1, \ldots, l^d$ für $\varphi \in Hom(V, K)$ seien gewählt
$x = \sum_{k=1}^{d} \alpha^k \cdots v_k$ $\qquad \varphi = \sum_{j=1}^{d} \omega_j l^j$ (ω_j) sind die Komp. von φ bzgl. dieser Basis.

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{j=1}^{d} \omega_j l^j(x) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \omega_j \underbrace{l^j \left(\sum_{k=1}^{d} \alpha^k v^k \right)}_{\substack{\text{liefert } 0 \text{ außer} \\ \text{für } k = j}} \\
&= \sum_{j=1}^{d} \omega_j \alpha^j \\
&= (\omega_1, \ldots, \omega_d) \cdot \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^d \end{pmatrix} \\
&= (\omega_1, \ldots, \omega_d) \cdot (B^{-1} B) \cdot \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^d \end{pmatrix} \\
&= (\omega_1, \ldots, \omega_d) A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^d \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$\{v_1, \ldots, v_d\} \underset{\overleftarrow{B}}{\overset{A}{\rightarrow}} \{\omega_a, \ldots, \omega_d\}$

$(\beta) = B \cdot (\alpha)$

$\{\omega_a, \ldots, \omega_d\} \cdot A$ liefert die Komp. von φ bzgl. der Dualbasis der $\{\omega_a, \ldots, \omega_d\}$

> Die Komponenten von $\varphi \in Hom(V, K)$ bzgl. der alten Dualbasis zu $\{v_a, \ldots, v_d\}$ rechnen sich mit der Matrix A um in die Komponenten von φ bzgl. der neuen Dualbasis zu $\{\omega_a, \ldots, \omega_d\}$. Deshalb nenn die Physiker die Elemente von $Hom(V, K)$ **kovariante** Vektoren. In der Mathematik heipt $Hom(V, K)$ **Dualraum** von K.

7.3 Schlußwort zum Basiswechsel

Gegeben sei $x \in V$, $\{v_1, \ldots, v_d\}$. Basiswechsel $V = \mathbb{R}[X]$, $\{1, (x-2), (x-2)^2$.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{d} \alpha^k * v_k \overset{\text{mit}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha^d \end{pmatrix} \qquad w_j = \sum_{k=1}^{d} a_j^k * v_k \quad v_k = \sum_{k=1}^{d} b_j^e * w_e \\ &= \sum_e \beta^e w_e \qquad (\beta^-) = (\beta) * (\alpha)^{(A)} \quad \text{(kontrahierend)} \end{aligned}$$

$$\text{Nun sei } \varphi \in \text{HOM}(V, K) \text{ mit } \varphi = \sum w_k e^k \text{ und } \varphi(X) = (w_1, \ldots, w_d) * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(w_1, \ldots, w_d) * A}_{\text{neue Koordinate von } \varphi} \quad * \quad \overbrace{B * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}}^{\text{neue Koordinaten}}$$

Mit $A * B = \left(\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right)$ und A kontravariant.

$$L \in \text{Hom}(V, V) \overset{\text{Als Matrix}}{\rightsquigarrow} L * v_j = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(e_j^k)}_{\substack{\text{Matrix des} \\ \text{Endomor-} \\ \text{phismus}}} * v_k$$

$$\begin{aligned}
L * x &= L\left(\sum_{j=1}^{d} \alpha^j v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \alpha^j l(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \alpha^j * \sum_{k=1}^{d} \left(e_j^k * v_k\right) \\
&\overset{ditrib.}{=} \sum_{j,k} \alpha^i * e_j^k * v_k \\
&= \sum_{k=1}^{d} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{d} e_j^k * \alpha^i}_{(\alpha^-)\mapsto L*(\alpha^-)} \right) * v_k
\end{aligned}$$

Basiswechsel: $(\beta^-) = B * (\alpha^-)$ und somit $(B)(L)(\alpha^-)$ als neue Koordinaten des Bildes $L(X)$.

$$\underbrace{(\beta^-)}_{\text{neue Koordinaten von } x} \mapsto \underbrace{(B)(L)(\beta^-)}_{\text{Basiswechsel des Endomorphismus}} * \underbrace{(B) * (\alpha^-)}_{\beta^-}$$

Physiker: Endomorphismen sind einfach kovarint und einfach kontravariant (Tensoren)

$V, \mathrm{Hom}(V,K), \mathrm{Hom}(V,V), \Phi \in \mathbf{Bild}(V,K)$

$$
\begin{aligned}
x &= \sum x^j v_j \qquad x \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} \\
y &= \sum y^k v_k \qquad y \rightsquigarrow \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \\
\text{gesucht: } \Phi(x,y) &= \Phi(\sum_j x^j v_j, \sum_k y^k v_k) \\
&= \sum_{j,k} x^j * y^k * \Phi(v_j, v_k) \\
&= \sum_{j,k} y^k * x^i * f_{ki} \\
&= \sum_k y^k * \left(\sum_j f_{ki} * x^j \right)
\end{aligned}
$$

Matrix zu Φ bzgl. der Basis $\{v_1, \dots, v_d\}$ ist die Matrix $f_{\lambda j} = \Phi(v_j, v_k)$

$$
\begin{aligned}
\text{Basiswechsel: } \left(\hat{x}^-\right) &= (B)(x^-) \\
\left(\hat{y}^-\right) &= (B)(y^-); \quad (y^-) = (A) * \left(\hat{y}^-\right)
\end{aligned}
$$

Deswegen wird die Matrix $A = B^{-1}$ zweimal verwendet um die Komposition der alten Matrix von Φ in der Kompositin der neuen Matrix von Φ umzurechnen. Nochmal:

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{f}\right)_{l,m} &= \Phi(w_m, w_l) \\
\text{mit} \qquad & w_m = \sum_h a_m^k * v_k \\
& w_e = \sum_g a_l^j * v_j
\end{aligned}
$$

8 Ringe

Gruppen Körper Vektorräume
Ringe

Beipiele:
$\mathbb{Z}, K[X]$, Endomorphismen, quadratische Matrizen
$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$a, b, m, n \in \mathbb{Z}$

$(m + in) \cdot (a + ib) = \underbrace{ma - nb}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{mb + na}_{\in\mathbb{Z}}$ $\underbrace{\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}}_{\text{ganze Gaußsche Zahlen}} \subset \mathbb{C}$

Axiome für (kom.) **Ringe** mit 1

- bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe:
  Beispiel: r + (-r) = 0
- Multiplikation:
  immer assoziativ: $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$
  immer distributiv: $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$
  meistens kommutativ: $r \cdot s = s \cdot r$
  multiplikative 1: $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$

Unterscheid zum Körper: Kein multiplikatives Inverses vorausgesetzt!

$\varphi : G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphosmus

$\varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2^{-1})$ $(\Rightarrow \varphi(e_G) = e_H)$
$Kern(\varphi) := \{k \in G; \varphi(k) = e_H\}$
Untergruppe: $\surd$

Bessere Untergruppe:

$k \in Kern(\varphi), g \in G$
$\Rightarrow \underbrace{g \cdot h \cdot g^{-1}}_{\text{Konjugation nötig}} \in Kern(\varphi)$
Kerne sind Untergruppen, die unter Konjugation invariant sind.

8.1 Ringhomomorphismus

$\varphi : R \to S$ „Ringhomomorphismus"

- homomorph bzgl. Addition
  $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) +_S \varphi(r_2)$

- $\varphi(r_1 \cdot r_2) = \varphi(r_1) \cdot_S \varphi(r_2)$

$Kern\varphi := \{k \in R : \varphi(k) = 0\}$
$Kern(\varphi)$ ist bzgl. Addition eine Untergruppe
bzgl. der Multiplukation: $k \in Kern(\varphi), r \in R$
$\Rightarrow k \cdot r \in Kern(\varphi)$

$$\varphi(k \cdot r) = \underbrace{\varphi(k)}_{0_S} \cdot \varphi(r) = 0_S \Rightarrow k \cdot r \in \varphi^{-1}(0) = Kern(\varphi)$$

Beispiel für einen Ringhomomorphismus
V sei ein K-Vektorraum, $A \in End(V)$

$$\begin{array}{ccc} R = K[X] & & S = End(V) \\ \in P & \overset{\text{Auswertung}}{\underset{W_A}{\longrightarrow}} & \in P(A) \end{array}$$

$P, Q \rightsquigarrow (PQ)(A) = P(A) \cdot Q(A)$

$$\left.\begin{array}{lll} Kern(W_A) & \subset & K[X] \\ \in P_1 & \Rightarrow & P_i Q \in Kern(W_A) \end{array}\right\} \text{Ziel:}$$

Tatsächlich besteht $Kern(W_A)$ aus den Vielfachen eines einzigen Polynoms des **Minimalpolynoms** von A

8.2 Analogie zwischen $\mathbb{Z}$ und den Polynomen $\mathbb{Q}[X]$

Beachte die Analogie zwischen $\mathbb{Z}$ und den Polynomen $\mathbb{Q}[X]$
Zu $\mathbb{Z}$ kann man die rationalen Zahlen konstruieren, indem man Paare $\{(m, n); m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow (m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1)$
Dieselbe Konstruktion funktioniert für Paare von Polynomen und liefert den Körper der Polynomquotienten.

$$\left.\underbrace{\begin{array}{lll} (m, n) + (a, b) & := & (m \cdot b + a\dot{n}, n \cdot b) \\ (m, n) \cdot (a, b) & := & (m \cdot a, m \cdot b) \end{array}}_{\text{"Repräsentantenweise Definition"}}\right\}$$

Verifiziere, das diese Definition tatsächlich Summe und Produkt der Äquivalenzklassen definieren d.h. unabh. von der Wahl der Repräsentanten

Eine weitere Analogie zwischen $\mathbb{Z}$ und $K[X]$
Ziel: Die Teilbarkeitslehre (im Sinne von Kl 6+7) ist in $\mathbb{Z}$ sehr ähnlich wie die in $K[X]$.
Um über größte (gemeinsame) Teiler reden zu können, braucht man ein geeignetes Maß für die Größe von Ringelementen.
$g \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow |z|$ $\quad$ $P \in K[X] \rightsquigarrow grad(P)$ (oder $2^{grad(P)}$)
$a + ib \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \rightsquigarrow |a + ib|$

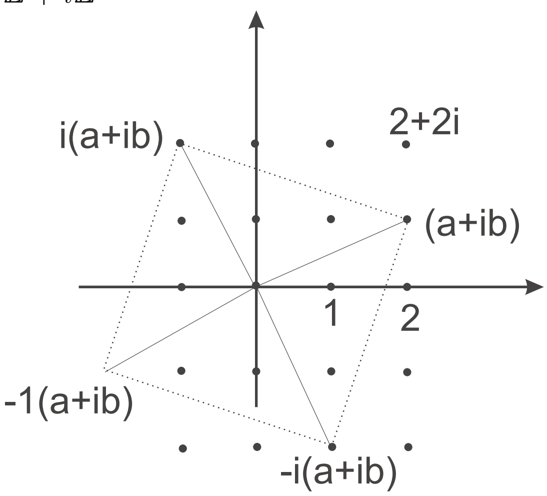
9 Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Zur Bestimmung größter gemeinsamer Teiler besonders geeignet ist die Division mit Rest.

$g_1 = n_2 \cdot g_2 + r_2$ mit $|r_2| < |g_2|$
$n_2 :=$ kleinste ganze $\left(\frac{g_1}{g_2}\right)$ in $\mathbb{Z}$
Ein gemeinsamer Teiler von g_1 und g_2 ist natürlich auch Teiler von $r_2 = g_1 - n_2 \cdot g_2$
$\Rightarrow |g_1 - n_2 \cdot g_2| < g_2$

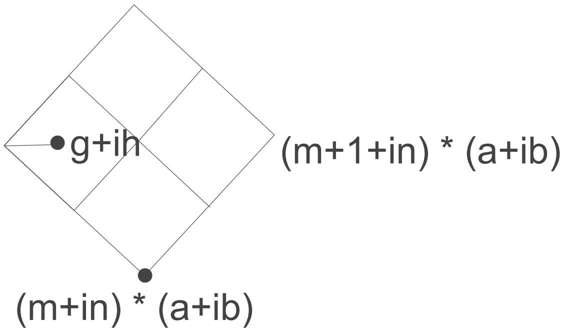
$P_1 = Q_2 \cdot P_2 + R_2$ (Polynome) mit $Grad(R_2) < Grad(P_2)$ (ok. weil die Koeff. der Polynome $\in K$)
$P_1 = b_0 + \ldots + 1 \cdot x^N$ $\quad$ $P_1 - x^{N-n} \cdot P_2$ hat $Grad < P_1$
$P_2 = a_0 + \ldots + 1 \cdot x^n$ $\quad$ $N > n$
$a_j, b_j \in K$

$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$



Multipliziere $a + ib$ mit allen ganzzahligen Gitterpunkten. Was entsteht?
Es entsteht ein Quadratgitter mit der Seitenlänge $|a + ib|$
Wenn $g + ih \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ gegeben ist und man ein möglichst geschicktes Vielfaches

von $(a+ib)$ abziehe, wie klein wird der Rest(mindestens)? $\leq \frac{|a+ib|}{\sqrt{2}}$



9.1 Euklidsches Verfahren

$g_1, g_2 \in R$
Wir haben eine Division mit Rest!
$g_1 = q_2 \cdot g_2 + g_3$ $\quad$ $q_2, r_2 = g_3 \in R$ ($r_2 = g_3$ kleiner als g_2)
Jeder gemeinsame Teiler von g_1 und g_2 ist auch Teiler von $r_2 = g_3$!
Euklid:

$g_2 = q_3 \cdot g_3 + g_4$	Jeder Teiler von g_2 und g_3 ist auch Teiler von g_1, g_4 und g_4 ist kleiner als g_3
usw.	
$g_{n-2} = q_{n-2} \cdot g_{n-1} + g_n$	In den Ringen $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}, K[X]$ bricht dies Verfahren nach endlich vielen Schritten ab!
$g_{n-1} = q_n \cdot g_n + r$	Jeder gemeinsame Teiler von g_1 und g_2 ist auch Teiler von g_n. Die Schlußzeile: g_n ist Teiler von g_{n-1} also auch von g_{n-2}, g_{n-3}, usw. g_2, g_1

Damit ist g_n ein größter gemeinsamer Teiler!

Gegeben $P, Q \in KernW_A$. Warum ist $ggT(P,Q) \in Kern(W_A)$?

Satz: Das Euklidsche Verfahren liefert $ggt(g_1, g_2)(= g_n)$ als Linearkombination von g_1 und g_2!

$$\begin{array}{rcl|l} g_n &=& g_{n-2} - q_{n-1} \cdot g_{n-1} & \text{Setze ein } g_{n-1} = g_{n-3} - q_{n-2} \cdot g_{n-2} \\ &=& g_{n-2} - q_{n-1} \cdot (g_{n-3} - q_{n-2} \cdot g_{n-2}) & \text{Setze } g_{n-2} \text{ aus der vorhergehenden Zeile des Euklid ein} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl|} &=& (1 + q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot g_{n-2} - q_{n-1} g_{n-3}) \\ g_n &=& r_{n-3} \cdot g_{n-3} + r_{n-4} \cdot g_{n-4} \\ && \text{usw.} \\ g_n &=& r_1 g_1 + r_2 g_2 \end{array}$$

10 Partielle Ableitungen

Wiederholung: Kontrahierende Abbildungen $f : A \to A$
Mit

- $$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y| \qquad \text{mit } 0 \leq q < 1$$
- $a_0 \in A$ beliebig
  $a_{n+1} := f(a_n) \quad \wedge \quad a_n := f(a_{n-1})$

folgt:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}| \leq ... \leq q^n |a_1 - a_0|$$

ist geometrisch majorisierte CF!

A ist vollständig:
$\Rightarrow$ Diese CF a_n konvergiert gegen $a_\infty \in A$, also:

$$\begin{array}{rcl} a_{n-1} &=& f(a_n) \Rightarrow a_\infty = \lim a_{n+1} \\ &=& \lim f(a_n) \\ &=& f(\lim a_n) \\ &=& f(a_\infty) \end{array}$$

Der Grenzwert der CF ist Fixpunkt von f

$g, f : A \to A$ seien beide q-kontrahierend

$a_f = f(a_f) \quad \wedge \quad a_g = f(a_g)$
Voraussetzung: $||g - f|| \leq \epsilon$
Behauptung:

$$\begin{aligned}
|a_f - a_g| &\leq \frac{\epsilon}{1-q} \\
&= |f(a_f) - f(a_g) + f(a_g) - g(a_g)| \\
&\overset{\Delta-Ungl.}{=} q|a_f - a_g| + ||f - g|| \\
&\Rightarrow (1-q)|a_f - a_g| \leq ||f - g||
\end{aligned}$$

Vorbemerkung (Integrale und Summen):
$f(x) = \frac{1}{x \log x} \overset{?}{=} F'(x)$ konvergent?
Obersumme für das Integral: $\int f(x)dx$

$$\underbrace{\log\log n}_{unbeschr.} - \log\log 3 = \underbrace{\int_3^n \frac{dx}{x \log x}}_{OS} \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{n \log n} \leq US$$

Grenzfunktionen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

etwas allgemeiner:

$$F(x) := \int_a^b f(t,x)dt$$

10.1 Beispiel: EULER'sche Γ-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$$

zu $f(t) = t^n \cdot e^{-t}$ können wir Stammfunktionen finden

$(t^n \cdot e^{-t})' = \underbrace{n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t}}_{\text{nach Ind. Stammfkt bekannt}} - \underbrace{t^n \cdot e^{-t}}_{\text{Stammfunktion gesucht}}$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^R t^{x-1}e^{-t}dt$ existiert

Warum ist diese Stammfunktion interessant?
Behauptung: $\Gamma(n+1) = n!$ $\quad n! = n \cdot (n-1)!$

$$1 - 0 = [-e^{-t}]_0^\infty = \int_0^\infty e^{-t}dt = \Gamma(1) = 0! = 1 \quad \surd$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(t^{x-1} \cdot e^{-t})}_{\sharp 1} =?= \underbrace{(x-1) \cdot t^{x-2} \cdot e^{-t} - t^{x-1} \cdot e^{-t}}_{\sharp 2}$$

Nebenrechnung:

$t^{x-1} = e^{(\log t)\cdot(x-1)}$ nach t differenzieren:

$\Rightarrow \;\; (x-1) \cdot \frac{1}{t} \cdot \underbrace{e^{\log t(x-1)}}_{t^{x-1}} = (x-1) \cdot t^{x-2}$

Das bedeutet:

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{d}{dt}(t^{x-1} \cdot e^{-t})dt}_{=\sharp 1} = t^{x-1}e^{-t}\,\Big|_0^\infty = 0 = \underbrace{(x-1)\int_0^\infty t^{x-2}e^{-t}dt - \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt}_{=\sharp 2}$$

$\Rightarrow \Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)$

$$F(x) := \int_a^b f(t,x)dt$$

Ziel: Leite aus Voraussetzung über f Eigenschaften von F her.

Voraussetzung: $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)|x-y|$ evtl. muß x aus einem beschr.

Intervall sein!

$$\begin{aligned}
|F(x)-F(y)| &= |\int_a^b (f(t,x)-f(t,y))dt| \\
&\overset{\Delta-Ungl.}{\leq} \int_a^b |f(t,x)-f(t,y)|dt \\
&\overset{Vor.}{\leq} \int_a^b L(t)|x-y|dt \\
&= \left(\int_a^b L(t)dt\right)|x-y|
\end{aligned}$$

Wo kommen solche Voraussetzungen vor?
Bei festem t nennen wir $x \to f(t,x)$ und
bei festem x nennen wir $t \to f(t,x)$,
die beiden eindimensionalen **partiellen Funktionen** zu der gegebenen Funktion $(t,x) \to f(t,x)$!
Die Ableitungen der partiallen Funktionen besitzen suggestive Namen.

Die Ableitung von

$$t \to f(t,x)$$

heißt **partielle Ableitung** nach t und wird

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$$

geschrieben.

Beispiel: $f(t,x) = t^{t-1}e^{-t} \quad x \to e^{(x-1)\log(t)}$
Dann ist die partielle Ableitug der x-Koordinate:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(t,x) = (\log(t)) \cdot e^{(x-1)\log(t)} \cdot e^{-t} = (\log(t)) \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t}$$

$\log(t) < 0$ für $0 < t < 1$
$\log(t) > 0$ für $1 \leq t$

Voraussetzung: $2 \leq x \leq n$

1. $1 \leq t$:
   $\log(t) \leq (t-1) \leq t$ $\quad\surd$ wg. Monotoniesatz

   Ableitung: $\frac{1}{t} \leq 1$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} e^{-t}\right| \overset{1 \leq t}{\leq} t^x e^{-t} \overset{x \leq n}{\leq} t^n e^{-t}$$

2. $0 \leq t \leq 1$:
   $-\log(t) = \log(\frac{1}{t}) \leq \frac{1}{t}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} e^{-t}\right| \overset{0 \leq t \leq 1}{\leq} |t^{x-2} e^{-t}| \leq t^{x-2} \overset{2 \leq x \leq n}{\leq} 1$$

Also gilt für $x \in [2, n]$

$$|(t^{y-1} e^{-t}) - (t^{x-1} e^{-t})| \leq t^n e^{-t} |x - y|$$

wegen $1 \leq t \quad \wedge \quad 2 \leq x \leq n$ und

$$|(t^{y-1} e^{-t}) - (t^{x-1} e^{-t})| \leq 1|x - y|$$

wegen $0 \leq t \leq 1 \quad \wedge \quad 2 \leq x \leq n$

$$\begin{aligned} |\Gamma(y) - \Gamma(x)| &\leq \underbrace{\left|\int_0^1 (t^{y-1} e^{-t} - t^{x-1} e^{-t}) dt\right|}_{2.) \qquad \leq 1|x-y|} + \underbrace{\left|\int_1^\infty (t^{y-1} e^{-t} - t^{x-1} e^{-t}) dt\right|}_{1.) \qquad t^n e^{-t}|x-y|} \\ &\leq (1 + n!) \cdot |x - y| \end{aligned}$$

Schön

$$F'(x) = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)\right) dt$$

Voraussetzung:

$$|f(t,y) - \underbrace{f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \cdot (y-x)}_{\text{Tangente d. partiellen Fkt.}}|$$

$\overset{Vor.}{\leq} B(t)|x-y|^2$

10.2 Analysis - Überblick

- Rechnen in $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

- Funktionen

Einfache Funktionen	Polynome, $P, Q, \frac{P}{Q}$
Begriffe	Ableitung, Differentationsregeln
Sätze	Monotoniesatz $\rightsquigarrow$ <u>Schrankensatz</u>

- Exponentielles Wachstum, Kreisbewegungen
  $\exp, \sin, \cos, \ldots$ Notwendig ist ein <u>vollständiges</u> Zahlensystem $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$
  Erstes Verfahren zur Konstruktion neuer Funktionen:
  <u>Potenzreihen</u>: Werkzeug die <u>Geometrische Majorisierung</u>
  Komplexe Funktionen: 1. Schritt zu höherdimensionalen Funktionen
  Als letztes der Grundkonstruktion:
  Integration oder kontinuierliche Summation
  Hauptsatz der Differential und Integral-Rechnung

- Funktionen in höheren Dimensionen:
  Dazu <u>Normen</u> (=Länge) auf Vektorräumen

Allgemeine Eigenschaften	Spezielle Eigenschaften
Hauptsätze über stetige Funktionen Argumente sind weitgehend dimensionsunabhängig	Beispiele $t^{x-1} \cdot e^{-t}$ muß nach t oder x partiell differenziert werden $\frac{\partial}{\partial t} : (x-1)t^{x-2} \cdot e^{-t} - t^{x-1} \cdot e^{-t}$

Beweise in der Analysis werden in kleinen Schritten entwickelt. Neue Funktionen werden zuerst als stetig nachgewiesen, dann als differenzierbar (Umkehrfunktionen).

- $F(x) := \int_a^b f(t,x)dt$
  Voraussetzungen über f. Behauptungen über F

  1. Stetigkeit oder Dehnungsschranken

     - Stetigkeit
       $|a|, |b| < \infty$ $[a,b]$ ist kompakt $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$
       Vor.: $(t,x) \stackrel{\text{stetig}}{\to} f(t,x)$
       Dann ist f gleichmäßig stetig
       Def.-Bereich: $\{(t,x), a \leq t \leq b, x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\}$
       $\forall\ a \leq t_0 \leq b$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so dass $x_0 - r \leq x, y \leq x_0 + r$
       $|(t,x) - (t_0, y_0)| \leq \delta \Rightarrow |f(t,x) - f(t_0, y_0)| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\stackrel{\text{Def.}}{=} |\int_a^b |(f(t,x) - f(t,y))dt| \\ &\stackrel{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \int_a^b |f(t,x) - f(t,y)|dt \\ &\stackrel{\text{gl. stetig}}{\leq} \varepsilon \cdot |b-a| \end{aligned}$$

       Integrationsintervall: vollständig + beschränkt

     - Dehnungsschranken
       $|f(x,t) - f(y,t)| \leq L(t) \cdot |x-y|$ auch $b = \infty \Rightarrow$
       $|F(x) - F(y)| \leq \left(\int_a^b L(t)dt\right) \cdot |x-y|$
       Beispiel: $|\Gamma(x) - \Gamma(y)| \stackrel{2 \leq x,y \leq n}{\leq} (1 + n!) \cdot |x-y|$
       $\frac{\partial}{\partial x}$ Ableitung $x \to f(x,t)$ bei festem t
       $\left|\frac{\partial t}{\partial x}(x,t) \leq L(t)\right|$ Schrankensatz

  2. Differenzierbarkeit von F
     Voraussetzungen über $\frac{\partial t}{\partial x}$
     Qualitative Form:
     $(t,x) \to \frac{\partial t}{\partial x}(t,x)$ sei stetig und $[a,b]$ sei beschränkt

$$\left| f(t,y) - \underbrace{f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \cdot (y-x)}_{\text{Tangente bei } y = x \text{ der Funktion } y \to f(t,y)} \right| \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} B \cdot |y-x|^2 \text{ (inklusive } b = \infty)$$

$$
\begin{aligned}
& \left| F(y) - F(x) - \left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dx \right) \cdot (y-x) \right| \\
= \quad & \left| \int_a^b \left[f(t,y) - f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \cdot (y-x) \right] dt \right| \\
\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \quad & \int_a^b \left| \left[f(t,y) - f(t,x) - \frac{\partial}{\partial x} f(t,x) \cdot (y-x) \right] \right| dt \\
\overset{\text{Vor.}}{\leq} \quad & \left(\int_a^b B(t)dt \right) \cdot (y-x)^2
\end{aligned}
$$

Falls $\int_a^b B(x)dt < \infty$ ist, ist der Beweis fertig

$$f(y,t) - f(x_0,t) \overset{\text{HS. D+I}}{=} \int_{x_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx$$

$$
\begin{aligned}
& \left| f(y,t) - f(x_0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \cdot (y-x_0) \right| \\
= \quad & \left| \int_{x_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dx \right| \\
\leq \quad & \int_{x_0}^{y} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) \right| dx \\
\leq \quad & \text{gleichmäßig stetig: } |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \\
& \varepsilon \cdot |y - x_0|
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{\left| F(y) - F(x_0) - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,t)dt \cdot (y-x) \right| \leq \varepsilon \cdot (b-a) \cdot |y-x_0|}_{\text{richtig falls } |y-x_0| \leq \delta \text{ wg. gleichmäßiger Stetigkeit}}$$

Diese Ungleichung besagt: $F'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,t)dt$

$F(x) := \int_a^b f(\mathbf{t},x)d\mathbf{t}$ Parameterabhängiges Integral

$H(x) = \int_a^b h(t)dt$: H ist Stammfunktion von h

$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad \int P(x)dx = F(a_0, \ldots, a_n)$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$

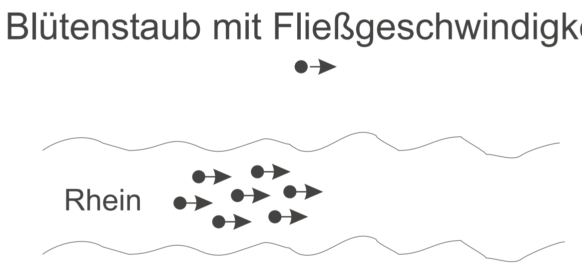
$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \quad \text{(falls existiert)} \\ &= \lim_{h\to 0} \int_a^b \tfrac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h} dt \\ &= \int_a^b \lim_{h\to 0} \tfrac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h} dt \end{aligned}$$

Der bewiesene Satz behauptet auch, dass $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b = \int\limits_a^b \lim\limits_{h\to 0}$

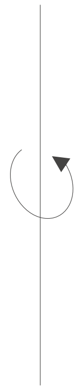
11 Vektorfelder

11.1 Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Betrachte Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
Wie kann man solche Abbildungen veranschaulichen?
Die Antwort enhhält Willkür!
Beispiele:
Geschwindigkeitsfeld von Staubkörtnern auf dem Rhein würde als Abbildung: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beschrieben.



Drehung des Raumes um eine vertikale Achse



$$t \to \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & -\cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

Welche Geschwindigkeit hat diese Drehbewegung?

$$\begin{pmatrix} -\alpha\sin(\alpha t) & -\alpha\cos(\alpha t) & 0 \\ \alpha\cos(\alpha t) & -\alpha\sin(\alpha t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{|t=0} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}_{|t=0}$$

Geschwindigkeit der Bewegung zu r Zeit $t = 0$ $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$

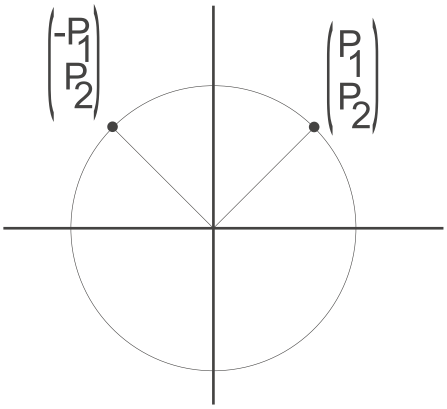
$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Abb.}}{\to} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

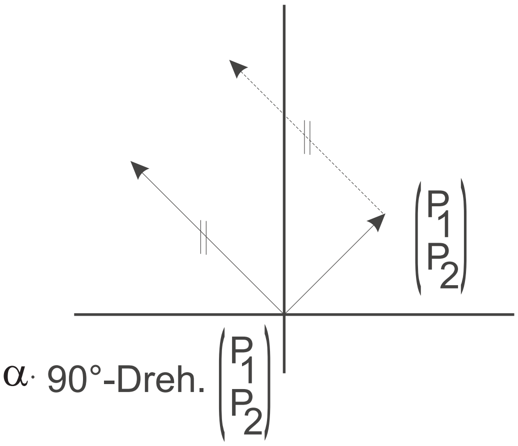
Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (analog $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) wird als „Vektorfeld" oder „Geschwindigkeitsfeld" veranschaulicht wenn zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ der Wert $F(x) \in \mathbb{R}^3$ als Vektor mit Fußpunkt gemalt wird.

11.2 Drehbewegung im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot t & -\sin\alpha \cdot t \\ \sin\alpha \cdot t & -\cos\alpha \cdot t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_1 \cdot \cos(\alpha \cdot t) & P_2 \cdot -\sin(\alpha \cdot t) \\ P_1 \cdot \sin(\alpha \cdot t) & P_2 \cdot \cos(\alpha \cdot t) \end{pmatrix} \\ &= \cos\alpha \cdot t \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \sin\alpha \cdot t \begin{pmatrix} -P_2 \\ P_1 \end{pmatrix} \qquad t = \frac{\Pi}{2 \cdot \alpha} \end{aligned}$$

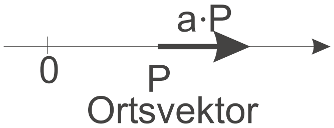
$$\jmath(t) = \alpha \cdot \left(-\sin\alpha t \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} + \cos\alpha t \begin{pmatrix} -P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \right)$$





11.3 Ein eindimensionales Beispiel

Frage: Gibt es eine „Kurve" $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß die Geschwindigkeit $\dot{\mathcal{C}}(t)$ genauso groß ist wie das gegebene Geschwindigkeitsfeld $p \to a \cdot \vec{p}$?



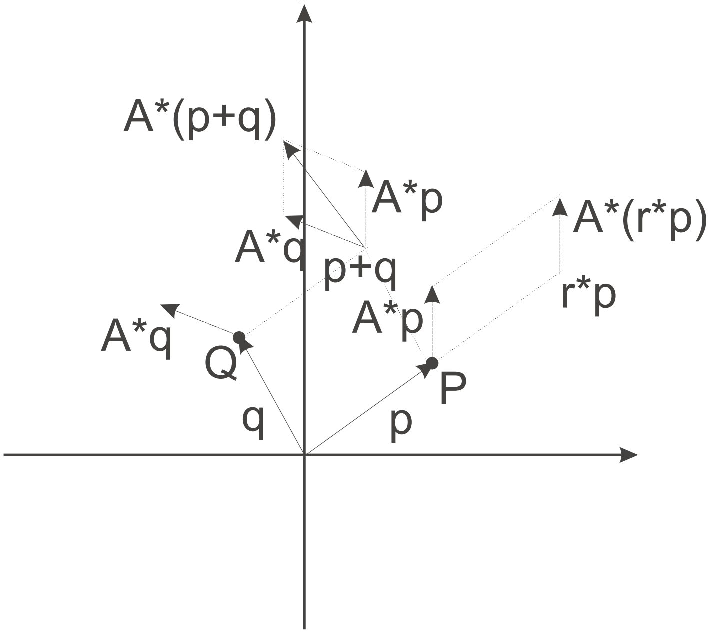
$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{C}}(t) &= a \cdot \mathcal{C}(t) \\
\mathcal{C} &= \exp(a \cdot t) \cdot \mathcal{C}(0) \\
\dot{\mathcal{C}}(t) &= a \cdot \exp(a \cdot t) \cdot \mathcal{C}(0) = a \cdot \mathcal{C}(t)
\end{aligned}$$

11.4 Höher dimensional

Sei

$$p \to A \cdot p$$

eine lineare Abbildung und A eine quadratische Matrix.



Wir interpretieren das Zahlenpaar $A \cdot p$ als Vektor mit Fußpunkt p

Frage: Gibt es eine Deformation $F(t,p)$, so daß die Geschwindigkeit $\frac{d}{dt}F(t,p) = A \cdot F(t,p)$ (für festes p)?
Es soll dabei gelten:
Für festes $t : p \to F(t,p)$ Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
Für festes $p : t \to F(t,p)$ Kurve, die der Punkt p beschreibt.

Behauptung: $F(t,p) \;=\; \underbrace{\exp(t \cdot A)}$ liefert eine solche Deformation

$$\mathrm{id} + \frac{t \cdot A}{1!} + \frac{t^2 \cdot A^2}{2!} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k \cdot A^k}{k!} \text{ : quad. Matrix}$$

Z.z.: Die Abbildung von $t \to \exp t \cdot A$ ist $A \cdot \exp(t, A)$

$$t \to \exp(t, A) = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k \cdot A^k}{k!}$$

$A : \quad \mathbb{R}^d \overset{\text{linear}}{\to} \mathbb{R}^d$ $\quad$ $\mathbb{R}$-Vektorraum der $d \times d$ Matrizen hat die Dimension d^2 und sit bezüglich irgendeiner Norm vollständig

Aufgabe: $\sum_{k=1}^{n} \frac{A^k}{k!}$ ist Cauchyfolge in diesem V-Raum. Dazu ist eine geeignete Norm zu wählen. Die häufigste ist:

$$|A \cdot x| \leq ||A|| \cdot |x| \Leftarrow ||A|| := \max\{|A \cdot x|_{\mathbb{R}^d}\ x \in \mathbb{R}^d; |x| = 1\}$$ Einheitsspähre; vollständig und beschränkt

Es gilt:

$$\begin{aligned} ||A + B|| &\leq ||A|| + ||B|| \\ ||A^k|| \leq ||A||^k \Leftarrow ||A \cdot B|| &\leq ||A|| \cdot ||B|| \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} ||A \cdot B|| &= \max_{|x|=1} |A \cdot B \cdot x| \leq \max^{|x|=1} ||A|| \cdot |B \cdot x| \\ &\leq \max_{|x|=1} ||A|| \cdot ||B|| \cdot |x| = ||A|| \cdot ||B|| \end{aligned}$$

Sei jetzt $\{B_n\}$ eine Cauchy-Folge: $||B_{n+p} - B|| \leq r_n$.

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A^k}{k!}\right|\right| &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{A^k}{k!} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{||A^k||}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{||A^k||}{k!} \end{aligned}$$ bekannte Nullfolge, weil die Taylorreihe der eindimensionalen Funktion konvergiert

Daraus folgt: Der Limes existiert.

Behauptung: Für $\forall$ $varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |t - t_0| \leq \delta$ gilt:

$$||\exp(t \cdot A) - \exp(t_0 \cdot A) - A \cdot \exp(t_0 \cdot A)(t - t_0)||$$

tatsächlich gilt für $|t - t_0| \leq 1$:

$$\leq \frac{\exp\left(||A|| \cdot (|t_0| + 1)\right)}{2}$$

Daraus folgt für unsere Behauptung:

$$\begin{aligned} &= \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!} \cdot \left(t^k - t_0\right)\right) - 1 \cdot A \cdot (t - t_0) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{t_0^k \cdot A^{k+1}}{k!}(t - t_0)\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!} \cdot (t - t_0)\left(t^{k-1} + \ldots + t_0^{k-1}\right)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_0^k \cdot A^{k+1}}{k!}(t - t_0)\right|\right| \\ &= \left|\left|\left(\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{A^k}{k!} \cdot \left(t^{k-1} + \ldots + t_0^{k-1}\right)\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_0^k \cdot A^{k+1}}{k!}\right)(t - t_0)\right|\right| \end{aligned}$$

Nun benutzt man folgenden Trick:

$$k+1=l: \quad \sum_{l=2}^{\infty} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} \cdot A^l$$

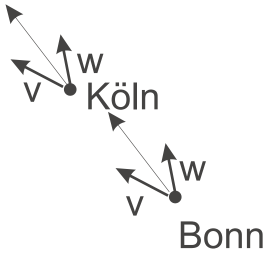
und setzt ein:

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \left(\left(t^{k-1} + \ldots + t_0^{k-1} \right) - k \cdot t_0^{k-1} \right) (t-t_0) \right\| \\
&\overset{\triangle}{\leq} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} \underbrace{\left| t^{k-1} + \ldots, + t_0^{k-1} - k \cdot t_0^{k-1} \right|}_{\leq \frac{k(k-1)}{2} \cdot (|t_0|+1)^{k-2} \cdot |t-t_0|} \cdot |t-t_0| \right\| \\
&= \frac{||A||^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{||A||^{k-2} \cdot (|t_0|+1)^{k-2}}{(k-2)!}}_{\exp(||A|| \cdot (|t_0|+1))} \cdot |t-t_0|^2
\end{aligned}$$

11.5 Veranschaulichung von Vektorfelder

Betrachten Sie eine Landkarte; die Punkte haben zwar Koordinaten in $\mathbb{R}^2$, trotzdem macht Köln+Köln oder 2.5$\cdot$ Köln nicht viel Sinn. Betrachten Sie zusätzlich die Geschwindigkeiten von Wanderern, ebenfalls in $\mathbb{R}^2$ beschrieben; aber hier beschreibt die Addition in $\mathbb{R}^2$ die Vektoraddition der Geschwindigkeiten in der beabsichtigten Weise. Vor diesem Hintergrund soll man die Definition verstehen: Ein Vektorfeld auf dem Punktraum $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung in den Vektorraum $\mathbb{R}^d$ mit der Interpretation: der Wert $V(p)$ wird interpretiert als Vektor mit Fußpunkt p. Oder: Geschwindigkeiten in Köln sind Vektoren mit Fußpunkt Köln.

Landkarte:



$\mathbb{R}^2$ als Punktraum	$\mathbb{R}^2$ als Vektorraum
Künstlich einen Nullpunkt anzeichnen.	(mit 0, Addition...)
Köln + Köln	
$2,5\cdot$ Köln	
<u>nicht definiert!</u>	$v+w$
$2,5\cdot v$	
<u>definiert</u>	

11.6 Differentialgleichungen

Die einfachsten Vektorfelder sind die linearen.

$$\underbrace{P}_{\substack{\in \\ \text{Punktraum} \\ \mathbb{R}^2}} \longmapsto A \cdot \underbrace{p}_{\substack{\in \\ \text{Vektorraum} \\ \mathbb{R}^2}}$$

A gegeben: Geschwindigkeitsfeld $p \mapsto A \cdot p$ „vorstellen"
Frage:
Gesucht Kurven $t \mapsto \dot{p}(t)$ gleich dem Wert des Vektorfeldes $A \cdot p$ an der Stelle p ist $\dot{p}(t) = A \cdot (t)$
Antwort:
$p(t) = \exp(tA) \cdot p(0)$ ist wegen $\dot{\exp(tA)} = A \exp(tA)$ eine Kurve der gewünschten Art
Andere Vokabeln: $\dot{p} = Ap(t)$ ausführlicher

$$\dot{\begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= 1 \cdot P_1(t) + 2p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) &= 3 \cdot P_1(t) + 4p_2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{(p+q)}(t) &= A \cdot (p+q)(t) \\ r \cdot \dot{p}(t) &= A \cdot (rp(t)) \end{aligned}}$$

Mit der Exponentialreihe können alle Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelöst werden.

Eindeutigkeitssatz: Durch jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^d$ geht genau eine Lösungskurve der linearen Differential gleichung $\begin{pmatrix} p \mapsto A \cdot p(\text{Vektorfeld}) \\ \dot{p}(t) = A \cdot p(t) \end{pmatrix}$

Vorbemerkung: Wegen der Linearität genügt es zu zeigen, dass Lösungskurven mit Startwert 0 konstant gleich 0 sind.
Zu einer Lösung $p(t)$ betrachte:

$h(t) := \langle p(x), p(t)\rangle \cdot e^{-2||A||t}$
Behauptung: $\dot{h}(t) \leq 0 \Rightarrow h(t) \leq h(0)$

$$\langle p(t), p(t)\rangle \leq \langle p(0), p(0)\rangle \cdot e^{+2||A||t}$$

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= \dot{\langle p(t), p(t)\rangle} \cdot e^{-2||A||t} + \langle p(t), p(t)\rangle \cdot (-2||A||) \cdot e^{-2||A||t} \\ &= (2 \underbrace{\langle \dot{p}(t), p(t)\rangle} -2||A||\langle p(t), p(t)\rangle) \cdot e^{-2||A||t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Dlg.: } |\quad| &\leq |A \cdot p(t)| \cdot |p(t)| \\ &\leq ||A|| \cdot |p(t)|^2\end{aligned}$$

$$\leq 0 \Rightarrow |p(t)| \leq |p(0)| \cdot e^{+||A||t}$$

$\dot{p}(t) = A \cdot p(t)$
$\dot{q}(t) = A \cdot q(t)$
$p(0) = q(0)$ Linearität

$\gamma(t) = p(t) - q(t)$
$\dot{r}(t) = A \cdot r(t)$, $r(0) = 0$

$$V: \underset{\boxed{\text{Punktraum}}}{\mathbb{R}^d} \longrightarrow \underset{\boxed{\text{Vektorraum}}}{\mathbb{R}^d}$$

$$V: \left.\begin{array}{lll} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^d \\ (P,t) & \to & V(p,t) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\text{für jedes feste } t \text{ ist} \\ p \mapsto V(p,t) \text{ ein Vek-} \\ \text{torfeld}\end{array}\right\} \begin{array}{l}(p,t) \to V(p,t) \\ \text{ist ein zweistelli-} \\ \text{ges Vektorfeld}\end{array}$$

Kann man wieder Kurven $t \mapsto p(t) \in \mathbb{R}^d$ (Punktraum) finden, so dass:

$\dot{p}(t)$	$=$	$V(p(t), t)$
Ableitung oder Geschwindigkeit der Kurve		Wert des Vektorfeldes an der richtigen Stelle

Voraussetzungen für eine positive Antwort: $(p,t) \overset{\text{stetig}}{\mapsto} V(p,t)$ (und etwas mehr Nähe zum linearen Fall)
Was sind das für Voraussetzungen: Lipschitz-Bedingung: $|V(p,t) - V(q,t)| \leq L \cdot |p - q|$
Der Eindeutigkeits- und Fehleranfachungssatz geht wie bisher (fast):
Voraussetzung:

$$\dot{p}(t) = V(p(t), t) \;\; \dot{q}(t) = V(q(t), t) \;\; h(t) := \langle p(t) - q(t).p(t) - q(t)\rangle \cdot e^{-2Lt}$$

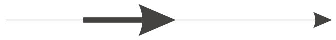
Behauptung:

$$\dot{h} \leq 0 \overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow} h(t) \leq h(0) \overset{\text{Eins}}{\Rightarrow} |P(t) - q(t)| \leq |P(0) - q(0)| \cdot e^{+Lt}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\dot{h}(t) &= \langle p(t) - q(t), p(t) - q(t)\rangle^{\cdot} \cdot e^{-2Lt} + \langle p - q, p - q\rangle(t)(-2L)e^{-2Lt} \\
&= 2\underbrace{\langle \dot{p}(t) - \dot{q}(t), p(t) - q(t)\rangle}_{} - 2L|p - q|^2(t)e^{-2Lt} \\
& \text{Dgl. } V(p(t),t) - V(q(t),t) \text{ und Cauchy-Schwarz-B. anwenden:} \\
&\leq (2|V(p(t),t) - V(q(t),t)| \cdot |p - q|(x) - 2L|p - q|^2(t)) \cdot e^{-2Lt} \\
&\overset{\text{Lipschitz-Bed.}}{\leq} (2L|p(t) - q(t)| \cdot |p - q(t)| - 2L|p - q|^2(t)) \cdot e^{-2Lt} \\
&\leq 0!!!
\end{aligned}$$

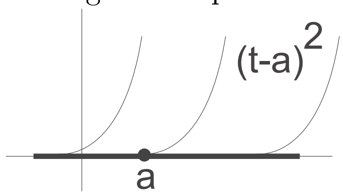
1-dim-Beispiel:



$\dot{f}(t) = 2 \cdot \sqrt{f(t)}$ $\quad$ $V(x)_{x \in \mathbb{R}^1} = 2 \cdot r\sqrt{x}$ Lipschitz-stetig außer bei $x = 0$

$f(t) = (t - a)^2$

Lösung als Graph



Zeitabhängige Vektorfelder: $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \qquad (p,t) \to V(p,t)$

Für jedes feste t ist $p \to V(p,t)$ ein Vektorfeld wie diskutiert!

Voraussetzung:

1. stetig
2. Dehnungsbeschränkt $\rightsquigarrow$ (LIPSCHITZ-Bedingung)

$$|V(p,t) - V(q,t)| \leq L \cdot |p - q|$$

Kurven $t \to p(t)$ mit der Eigenschaft

$$\dot{p}(t) = V(p(t),t)$$

heißen "Bahnkurven" oder "Integralkurven" des Vektorfeldes. "Lösungskurven der Differentialgleichung (DGL)".

Eindeutigkeitssatz und Fehlerkontrolle:

$$|p(t) - q(t)| \leq |p(0) - q(0)| \cdot e^{+L \cdot t}$$

(Grund: $h(t) := \langle p(t) - q(t), p(t) - q(t) \rangle \cdot e^{-L \cdot t} \quad , 0 \leq h \quad , \dot{h} \leq 0$)

Propaganda: Für die Exponentialreihe gilt folgendes:

Behauptung:
$\exp((s + t) \cdot A) \overset{\checkmark}{=} \exp(s \cdot A) \cdot \exp(t \cdot A)$

Definition: (t sei fest)
$s \to \exp((s + t) \cdot A) =: F(s)$
$s \to \exp(s \cdot A) \cdot \exp(t \cdot A) =: G(s)$
Dann folgt durch...

- $F(0) = \exp(t \cdot A)$
  $G(0) = \exp(t \cdot A)$

- $F'(s) = A \cdot F(s)$
  $G'(s) = A \cdot G(s)$

$$F(s) = G(s)$$

Auf der Suche nach einem Existenzbeweis:
Sei

$$\dot{p}(t) = V(p(t), t)$$

Dann besagt der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, daß

$$p(t) \overset{HS}{=} p(0) + \int_0^{t_0} \dot{p}(\tau) d\tau \overset{DGL}{=} p_0 + \int_0^t V(p(\tau), \tau) d\tau$$

mit $p(0) = p_0 =$"Startwert"

PICARD-LINDELÖF:
Jede stetige Kurve $t \to p(t)$ wird durch die rechte Seite zu einer neuen Kurve

$$\boxed{\mathcal{L}_p(t) = p_0 + \int_0^t V(p(\tau), \tau) d\tau}$$

Vorteile dieser Betrachtung:

1. Ein Fixpunkt der Abbildung $(t \to p(t)) \to (t \to \mathcal{L}_p(t))$ ist Lösung unseres Problems. Zum finden von Fixpunkten kennen wir mindestens eine Nullstelle ("kontrahierend")

2. Ist $t \to p(t)$ nur stetig, so ist $t \to \mathcal{L}_p(t)$ sogar differenzierbar, $\dot{\mathcal{L}}_p(t) = V(p(t), t)$

3. Falls die Kurve $t \to p(t)$ wenigstens $p(0) = p_0$ erfüllt, so gilt für $t \to \mathcal{L}_p(t)$ mehr:

$$\mathcal{L}_p(t) = p_0 \quad , \dot{\mathcal{L}}_p(t) = V(p_0, 0)$$

Beispiel: Test: Wie gut ist die PICARD-LINDELÖF-Abbildung?

DGL: $f' = id \cdot f \quad , V(p) = id \cdot p$

Versuch: $p(t) = p_0$ ist konstante Kurve

$$\mathcal{L}_p(t) = p_0 + \int_0^t \underbrace{V(\underbrace{p(\tau)}_{p_0}, \tau)}_{p_0} d\tau = p_0 + p_0 \cdot t =: p_1(t)$$

$$\mathcal{L}_{p_1}(t) = p_0 + \int_0^t \underbrace{V(\underbrace{p_1(\tau)}_{p_0+p_0\cdot\tau}, \tau)}_{id\cdot(p_0+p_0\cdot\tau)} \, d\tau = p_0 + p_0 \cdot t + \frac{p_0}{2} \cdot t^2 =: p_2(t)$$

In einem einfachen Fall wird durch wiederholte Anwendung der PICARD-LINDELÖF-Abbildung die Exponentialreihe hergestellt!

$\Longrightarrow$ Test bestanden!

Voraussetzung:
$(p, t) \to V(p, t)$ ist stetig
$|V(p, t) - V(q, t)| \leq L \cdot |p - q|$ dehnungsbeschränkt (LIPSCHITZ-Bedingung)
$(t \to p(t)) \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{L}_p(t) := p_0 + \int_0^t v(p(\tau), \tau) d\tau$ ist PICARD-LINDELÖF-Abbildung
Fixpunkte von $\mathcal{L}$ sind wegen $\dot{\mathcal{L}}_p(t) = V(p(t), t)$ Lösung der DGL

$$\dot{p}(t) = V(p(t), t)$$

Strategie: Zeige, daß $\mathcal{L}$ kontrahierend ist.

$$\mathcal{L} : \{p(.) : [0, T] \to \mathbb{R}^d, p(.) \text{ stetig}\} = C^0([0, T], \mathbb{R}^d)$$

Hauptsatz über gleichmäßige Konvergenz stetiger Abbildungen:
Mit der Norm $||p(.)|| := sup_{t\in[0,T]}|p(t)|_{\mathbb{R}^d}$ ist $C^0([0, T], \mathbb{R}^d)$ ein vollständiger Vektorraum (jede Cauchy-Folge konvergiert).

Wiederholung zum Hauptsatz über gleichmäßige Konvergenz:

$$f_n : A \to \mathbb{R}^d \qquad \text{alle stetig, } \mathbb{R}^d \text{ vollständig}$$

- $\{f_n(a)\}$ konvergent für jedes $a \in A$ ("punktweise konvergent"). Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n_{\varepsilon,a}$, so daß $m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$

- $\{f_n\}$ ist gleichmäßig konvergent. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε (unabh. von a), so daß $m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$
  Haupsatz:
  Bei gleichmäßiger Konvergenz ist die Grenzfunktion stetig (”$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument”)

  $\{p_n(.)\}$ sei eine $|| \quad ||$CF, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es n_ε, so dass $m, n \geq n_\varepsilon$

  $sup_{t\in[0,T]}|p_n(t) - p_m(t)| =: ||p_n(.) - p_m(.)|| \geq \varepsilon$ gleichmäßig konvergent

Ende der Wiederholung
An die Fehlerentwicklung angepaßt ist folgende Norm:

$$|||p(.)||| := sup_{t\in[0,T]}|p(t)|_{\mathbb{R}^d} \cdot e^{-L\cdot t}$$

$e^{-L\cdot t} \cdot ||p(.)|| \leq |||p(.)||| \leq ||p(.)||$
Daher sind die Normen $|| \quad ||$ (”alte”) und $||| \quad |||$ (”neue”) äquivalent!

Satz: Ist $\mathcal{L} : C^0([0,T], \mathbb{R}^d, p_0) = \{p : [0,T] \to \mathbb{R}^d, p(.) \text{ stetig}, p(0) = p_0\}$ kontrahierend, dann gibt es zwei stetige Kurven $p(t)$ und $q(t)$ auf $[0,T]$ mit $p(0) = p_0 = q(0)$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}_p(t) - \mathcal{L}_q(t)| \cdot e^{-L\cdot t} &\overset{\mathcal{L}}{=} e^{-L\cdot t} \cdot \left| \int_0^t (V(p(\tau),\tau) - V(q(\tau),\tau)) d\tau \right| \\
&\overset{a\leq t}{\leq} e^{-L\cdot t} \cdot \int_0^t |V(p(\tau),\tau) - V(q(\tau),\tau)|\, d\tau \\
&\overset{Vor.}{\leq} e^{-L\cdot t} \cdot \int_0^t L \cdot |p(\tau) - q(\tau)| d\tau \\
&\leq e^{-L\cdot t} \cdot \int_0^t L \cdot \underbrace{|p(\tau) - q(\tau)| \cdot e^{-L\cdot\tau}}_{\leq ||| \quad |||} \cdot e^{+L\cdot\tau} d\tau \\
&\leq |||p(.) - q(.)||| - e^{-L\cdot t} \cdot \underbrace{\int_0^t L \cdot^{+L\cdot\tau} d\tau}_{e^{L\cdot t}-1}
\end{aligned}$$

$$|\mathcal{L}_p(t) - \mathcal{L}_q(t)| \cdot e^{-L\cdot t} \leq \underbrace{|||p - q||| \cdot (1 - e^{-L\cdot t})}_{\text{unabh. von t}}$$

$$|||\mathcal{L}_p - \mathcal{L}_q||| \leq \underbrace{(1 - e^{-L\cdot t})}_{<1} \cdot |||p - q|||$$

Auch berühmte Kabarettisten und Komiker, wie zum Beispiel Loriot, haben sich mit "partiellen Integrationen" beschäftigt und uns damit gezeigt, daß Mathematik nicht unbedingt so weltfremd und humorlos sein muß wie viele zu Glauben imstande sind. All jene seien hiermit eines Besseren belehrt. Alle anderen dürfen aber auch lachen!(oder auch nicht!?)

Satz von Loriot: Was ist der Unterschied zwischen einer partiellen Integration und einer partiellen Sonnenfinsterniss?
Ersteres können sie selber machen.

So, nachdem der eine oder andere noch am überlegen ist ob er nun lachen soll oder es lieber bleiben läßt, kehren wir zum Thema zurück. All jene die nicht wissen, was eine partielle Integration ist und deshalb nicht über...nun, nennen wir es die humoristische Anekdote (ich möchte hier nicht so weit gehen es einen Witz zu nennen) lachen können, seien hier noch einmal dazu angeregt, die letzten Seiten erneut zu lesen!

Bemerkung zu kontrahierenden Abbildungen:
Zusammenfassung:

- $A \subset V$ mit V=vollst. Vektorraum und A=vollst. Teilmenge
- $F : A \to A$ sei $q-$kontrahierend , $a.b \in A \quad \Rightarrow |F(a) - F(b)| \leq q \cdot |a - b|$
- $a_0 \in A$ beliebig. $a_{n-1} = F(a_n)$ "durch Iteration erzeugte Cauchy-Folge" und $a_\infty = \lim a_n \in A \quad , F(a_\infty) = a_\infty$

Bemerkung:
$F, G : A \to A$ $q-$kontrahierend und $|F(a) - G(a)| \leq \eta \quad \forall\ a \in A$
Fixpunkt: $a_F = F(a_F) \quad \wedge \quad a_G = G(a_G)$
Behauptung: $|a_F - a_G| \leq \frac{\eta}{1-q}$
Beweis:

$$\begin{aligned}
|a_F - a_G| &= |F(a_F) - G(a_G)| \\
&= |F(a_F) - F(a_G) + F(a_G) - G(a_G)| \\
&\overset{\Delta-Ungl.}{\leq} |F(a_F) - F(a_G)| + |F(a_G) - G(a_G)| \\
&\leq q_F \cdot |a_F - a_G| + \eta
\end{aligned}$$

12 Normalformen

12.1 Normalformen von (nicht allen) Endomorphismen

Wiederholung:
Sei $A \in End(V)$. Warum besitzt A ein Minimalpolynom P_A? D.h. ein Polynom kleinsten Grades mit $P_A(A) = 0 \in End(v)$.

$$Kern(W_A) \subset K[X] \stackrel{Ringhom.}{\longrightarrow} End(V) \qquad (dim\ V = d)$$

Satz: $Kern(W_A)$ besteht aus den Vielfachen eines Polynoms, genannt Minimalpolynom!

Aus

- $P, Q \in Kern(W_A)$
- Euklid: $g.g.T(P,Q) = R \cdot P + S \cdot Q \quad R, S \in K[X]$

$\Rightarrow \ g.g.T(P,Q) \in Kern(W_A) \quad grad(g.g.T) < \min(grad\ P, grad\ Q)$

Widerholung und Zusatz zu Skalarprodukten:
$\langle , \rangle$ in V gegeben und $A \in End(V)$
Drei Definitionen:

1. A ist symmetrisch oder selbstadjungiert:[VR oder UVR von $End(v)$]
   $\langle A \cdot v, w \rangle = \langle v, A \cdot w \rangle$
2. A ist schiefsymmetrisch oder asymmetrisch:[VR oder UVR von $End(v)$]
   $\langle A \cdot v, w \rangle = -\langle v, A \cdot w \rangle$
3. A ist orthogonal:[Gruppe$\subset End(V)$]
   $\langle A \cdot v, A \cdot w \rangle = \langle v, w \rangle$

Bei Verwendung von ON-Basen gilt für die Matrizen: $(A°{-1})$ entsteht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen!
Warum Normalenform?
Matrixfunktionen wie $det(A)$, A^{-1}. $\exp(A)$ können für Normalformen ohne Schwierigkeit berechnet werden.

- Für symmetrische Endomorphismen:
  Für symmetrische $A \in End(V)$ gilt: Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren und in dieser Basis ist die Matrix diagonal.
  Matrix bezüglich der Eigenbasis

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

  Berechnung der Eigenwerte:

$$det(A - \lambda id) = \chi_A(\lambda) \in K[\lambda]$$

  Nullstellen des charakteristische Polynoms (χ_A)

- Für schiefsymmetrische Endomorphismen:
  Falls $\langle A \cdot v, w\rangle = -\langle v, A \cdot w\rangle$ insbesondere $\langle A \cdot w, v\rangle = -\langle v, A \cdot v\rangle = 0$, so sind nur Eigenwerte =0 möglich. D.h. $Kern(A)$ ist der einzige Eigenraum von A.

  Wiederholung:
  Voraussetzung:

  1. $A \cdot U \subset U$ ("invarianter Unterraum [U]")
  2. $\langle A \cdot v, w\rangle = -\langle v, A \cdot w\rangle$

  Definition: $U^\perp := \{v \in V; \langle v, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$
  Behauptung: $A \cdot U^\perp \subset U^\perp$
  Beweis: Wähle $v \in U^\perp$ (also $\langle v, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$) und $u \in U$ und betrachte

$$\underbrace{\langle A \cdot v, u\rangle}_{2.} = \underbrace{-\langle v, A \cdot u\rangle}_{1.} \stackrel{v \in U^\perp}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Für jedes $u \in U : A \cdot v \in U^{\perp}$
Wiederholung Ende:

Also: $U = Kern(A) \quad , \quad U^{\perp}$ sind invariante UR und

- $\{e_1, \cdots, e_k\}$ ON-Basis für U
- $\{f_1, \cdots, f_k\}$ ON-Basis für $U^{\perp}$

sind linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis für V

Wie sieht die Matrix von A in dieser Basis aus?

$$\left(\begin{array}{c|c} k\left\{\begin{array}{c}0\\ Kern(A)\end{array}\right. & \begin{array}{c}0\\ \text{inv. Unterr.}\end{array} \\ & \\ \begin{array}{c}0\\ \text{inv. Unterr.}\end{array} & \left.\begin{array}{ccc}0 & & +\\ & \nearrow\swarrow & \\ - & & 0\end{array}\right\}l \end{array}\right)$$

Die Matrix eines Endomorphismus berechnet in einer ON-Basis liefert die Elemente $\langle A \cdot v_j, v_k\rangle$
Wir können annehmen, daß $\{f_{,} \cdots f_l\}$ eine Eigenbasis von A^2 ist!
Wegen $\langle A^2 \cdot v, v\rangle = -\langle A \cdot v, A \cdot v\rangle$ sind die Eigenwerte von $A^2 \leq 0$ und weil $U = Kern(A)$ gewählt wurde und $A : U^{\perp \to U^{\perp}}$ betrachtet wird, besitzt $A : U^{\perp \to U^{\perp}}$ keinen $Kern$, wegen $\langle A^2 \cdot v, v\rangle = -|A \cdot v|^2$ sind die Eigenwerte $(A)^2 \neq 0$.
$A^2 \cdot f_j = -\mu_j^2 \cdot f_j \qquad j = 1, \cdots, l$
Behauptung: $Spann\{f_j, A \cdot f_j\} = U_j$ ist ein 2-dim invarianter Unterraum.
$A : f_j \to a \cdot f_j \qquad A \cdot f_j \to A^2 \cdot f_j = -\mu_j^2 \cdot f_j$
Wie sieht die Matrix von $A : U_j \to U_j$ bezüglich der Basis $\{f_j, A \cdot f_j\}$ aus ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu_j^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wobei $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der 1.Basisvektor $\to$ 2.Basisvektor und $\begin{pmatrix} -\mu_j^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ der 2.Basisvektor $\to -\mu_j^2\cdot$ 2.Basisvektor

$f_j \perp A \cdot f_j \quad \Leftrightarrow \quad \langle f_j, A \cdot f_j \rangle = 0$ ($\leftarrow$ Schiefsymmetrisch)
Voraussetzung: $|f_j| = 1 \qquad \langle A \cdot f_j, A \cdot f_j \rangle = \mu_j^2$, d.h.$|f_j| = \mu_j$.

Eine ON-Basis für U_j ist $\{\underbrace{f_j}_{v_{1j}}, \underbrace{\frac{A \cdot f_j}{\mu_j}}_{v_{2j}}\}$

$A \cdot v_{1j} = \mu_j \cdot v_{2j}$

$A \cdot v_{2j} = A^2 \cdot \frac{f_j}{\mu_j} = -\mu_j \cdot v_{1j}$

$\{v_{1j}, v_{2j}\} \rightarrow$ Matrix von $A \begin{pmatrix} 0 & -\mu_j \\ \mu_j & 0 \end{pmatrix}$ und die Matrix von $A^2 \begin{pmatrix} -\mu_j^2 & 0 \\ 0 & \mu_j^2 \end{pmatrix}$

$Kern(A); \qquad \underbrace{Span\{f_1, \frac{a \cdot f_1}{\mu_1}\}; Span\{f_3, \frac{a \cdot f_3}{\mu_3}\}; ...; Span\{f_{l-1}, \frac{a \cdot f_{l-1}}{\mu_{l-1}}\}}$
bzgl. d. Basis besteht d. Matrix aus Zweierblöcken längs d. Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & -\mu_j \\ \mu_j & 0 \end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix} 0 & -\mu_j \\ \mu_j & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Zweierblöcke längs der Diagonalen:

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} & -\mu_1 \\ \mu_1 & \end{matrix}} & 0 \\ & & & 0 & \boxed{\begin{matrix} & -\mu_2 \\ \mu_2 & \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\mu_1 & -\sin\mu_1 \\ \sin\mu_1 & \cos\mu_1 \end{matrix}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\mu_2 & -\sin\mu_2 \\ \sin\mu_2 & \cos\mu_2 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ein wesentlicher Punkt der bisherigen Argumentation war dieser. Falls

$A \cdot U \subset U$, so ist auch $U^\perp$ ein invarianter Unterraum. Dieses Argument steht im allgemeinen nicht zur Verfügung!
Zwei Beispiele:

1. $\mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Standardbasis

   $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   A hat $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als $Kern$ aber A hat überhaupt keine komplementären invariantenUnterräume, denn

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in Kern(A) \Rightarrow A : V \to Kern(A)$$

   Der $Rang(A) = 1$, daher ist die Dimension ebenfalls $1 \Rightarrow dim\ Kern(A) = 1$
   $\chi_A(\lambda) = \lambda^2$

2. $\mathbb{R}^2 \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Standardbasis

   $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

   $$\chi_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} a - \lambda & 1 \\ 0 & a - \lambda \end{pmatrix}$$

   Die Nullstellen sind a

   $$Rang(A - a \cdot id) = Rang \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

   $\Rightarrow$ Eigenraum E_a ist 1-dim, weitere Eigenräume gibtes nicht!
   Daher gibt es keinen invarianten Unterraum der komplementär zu $Span \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ ist, denn ein 1-dim invarianter Unterraum wird immer von einem Eigenvektor aufgespannt.

Mit was für Normalformen könnte man sich zufrieden geben?
Geeignete Normalform:

$$A = \begin{pmatrix} a & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} = a \cdot id \begin{pmatrix} 0 & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (a - \lambda)^d$$

$a \cdot id$ und $\begin{pmatrix} 0 & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ kommutieren!

Daher genügt es die Potenzen von $\begin{pmatrix} 0 & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ zu berechnen.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \star \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \star\star \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \star \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \star\star\star \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Induktionsbeweis: $\begin{pmatrix} 0 & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}^n = 0 \cdot id \in End(V)$

Wir wollen nun zeigen:

Falls $\chi_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt, dann ist eine Basis zu finden, so daß

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

Falls die λ's alle verschieden sind, wird $\star = 0$ durch Wahl einer Eigenbasis.

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot ... \cdot (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

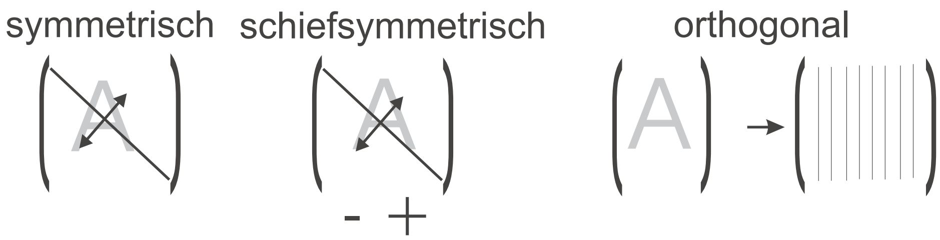
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \lambda_1 & & * & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & & 0 & \\ 0 & & \lambda_1 & & & & & & \\ \hline & & & \lambda_2 & & * & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & 0 & & \lambda_2 & & & \\ \hline & & & & & & \lambda_3 & & * \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & & \lambda_3 \end{array}\right)$$

12.2 Normalformen

$A \in End(V)$ Die Wahl einer Basis für V beeinflußt die Matrix für A sehr. ,,Normalformen finden" ist dasselbe wie ,,Eine Basis finden, so dass die Matrix möglichst einfach ist."
$V, \langle , \rangle$
Die mit Skalarprodukten zusammenarbeitenden Endomorphismen sind:

- symmetrisch $\langle Av, w\rangle = +\langle v, Aw\rangle$
- schiefsymmetrisch: $\langle Av, w\rangle = -\langle v, Aw\rangle$
- orthogonal (=isometrisch): $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$

Von vornherein nur ON-Basen verwenden:



- Symmetrische Endomorphismen besitzen Basen aus Eigenvektoren
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren von A^2 + ein wenig; möglichst einfach für schiefsymmetrisch:
$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{matrix}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren $A + A^{-1}$ + dieselbe Vor.; möglichst einfach für othiginale:
$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & -1 \end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

12.3 Situation ohne Skalarprodukte

Ziel: ,,Die Matrix soll wenigstens so einfach werden, dass man bequem Potenzen ausrechnen kann.”
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot id + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}^{\text{d}} \text{ kommutieren! und } B^d = 0$$

Etwas allgemeiner

$$\left(\begin{array}{ccc} \underbrace{\boxed{\begin{array}{ccc}\lambda_1 & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{array}}}_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\boxed{\begin{array}{ccc}\lambda_2 & & B_2 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{array}}}_{m_2} & \\ 0 & & \ddots \end{array}\right)$$

Diese Matrizen sind „einfach" für das Berechnen von Potenzen.

Welche Eigenschaften über den Endomorphismus kann man aus der Matrix $\left(z\right)$ ablesen?

$\chi_{\left(z\right)}(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - X)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - X)^{m_k 1}$ λ_j seien paarweise verschieden.

1. Das charakteristische Polynom zerfälllt in Linearfaktoren.

2. Jeder Block liefert einen invarianten Unterraum $U_j = span\{u_{j,1}, \ldots, u_{j,m_j}\}$

$$\{U_{1,1}, \ldots, U_{1,m_1}; U_{2,1}, \ldots, U_{2,m_2}; \ldots ; U_{k,1}, \ldots, U_{k,m_k}\}$$

   Jeder Vektor $v \in V$ kann geschrieben werden als $v = v_1 + \ldots + v_k$ mit $v_j \in U_j$

3. Zur Basis $u_1, \ldots, u_d$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & B \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{Span\{u_1, u_2, \ldots, u_j\} = v_j}_{\text{Invarianter Unterraum}} \subset V_{j+1} \ldots$$

Was ist der Unterschied zwischen den invarianten Unterräumen in 2. und 3.?

$$\left.\begin{array}{rrcl} & Kern(A - \lambda \cdot id) & = & K \cdot u_1 \\ 2 - dim & Kern(A - \lambda \cdot id)^2 & = & Span(u_1, u_2) \\ & & \vdots & \\ j - dim & Kern(A - \lambda \cdot id)^j & = & Span(u_1, \ldots, u_j) \end{array}\right\}$$

Keiner dieser invarianten Unterräume besitzt einen invarianten Komplimentärraum

Voraussetzung:
$\chi_A(X)$ zerfällt in Linearfaktoren, $\chi_A(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - X)^{m_k 1}$

Kein brauchbares Skalarprodukt vorhanden.

Wähle λ_1 und dazu einen Eigenvektor u_1, ergänze zu einer Basis $u_1, v_1, \dots, v_d$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ 0 & \\ \vdots & * \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \text{besonders uninteressant} \neq 0 \\ 0 & a_{22} \dots a_{2d} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & a_{d2} \dots a_{dd} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = (\lambda_1 - X) \cdot \underbrace{det\left(\begin{pmatrix} a_{22} & & a_{2d} \\ & \ddots & \\ a_{d2} & & a_{dd} \end{pmatrix} - X \cdot id\right)}_{\text{zerfällt in Linearfaktoren nach Vor.}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{22} \dots a_{2d} \\ \vdots \\ a_{d2} \dots a_{dd} \end{pmatrix} \text{Von was für einem Endo. ist dies die Matrix?}$$

Ein offensichtlicher Induktionsbeweis bietet sich an, falls "besonders uninteressant" $=$ $0 \Rightarrow$ invariant: $Span(v_2, \dots, v_d)$. Dies geht leider nicht!!!
Früher griff an dieser Stelle: $AU \subset U \Rightarrow AU^\perp \subset U^\perp$

12.4 Eigenräume - Induktionsbeweis

$U = Span(u_1)$, $AU \subset U$ (weil $A \cdot u_1 = \lambda \cdot u_1$)
$W := \{[v] = v + U; v \in V\}$ $\qquad v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U;\ v_1 = v_2 + u$ mit $u \in U$
$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2]$,,wohldefiniert" (siehe Übungsaufgaben)
W ist ein Vektorraum,
$W = V/U$ Quotientenraum von V nach dem Vektorraum U

$A_W[v] := [A \cdot v] \qquad v_1 \in [v] = v + u\ v_1 = u + v\ [v_1] = [u]$
wohldefiniert

$$Av \sim Av_1 \Leftrightarrow Av - Av_1 = A(v - v_1) = A(-u) \in U \Rightarrow [Av_1] = [Au]$$

$W = V/U$
$A_W : W \to W$
$A_W[V] = [Av]$ } Behauptung: A_w hat die Matrix bezgl. einer leicht anzugebenen Basis $\begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$

$\{u_1, v_2, \dots, v_d\}$ ist die gegebene Basis von V.$^\sharp$
Welches ist die nächstliegende Basis von V/U?

$[u_1] = 0, \{[v_2], \ldots, [v_d]\}$
Behauptung: Dies ist eine Basis für W.

1. Erzeugendensystem
   $[v] \in W$ gegeben, $v \in V$ ein Repräsentant
   $v = a^1 u_1 + a^2 v_2 + \ldots + a^d v_d$
   $[v] = 0 + a^2[v_2] + \ldots + a^d[v_d]$
   Daher ist $[v]$ Linearkombination der $[v_2], \ldots, [v_d]$.

2. Linear unabhängig
   Sei $a^2[v_2] + \ldots a^d[v_d] = 0 \in W$
   Zz: Alle Koeffizienten sind 0
   $a^2 v_2 + \ldots a^d v_d \in U$
   $a^2 v_2 + \ldots a^d v_d = a u_1 \overset{\sharp}{\Rightarrow} a, a^2, \ldots, a^d = 0$

Wie sieht die Matrix von A_W bzgl. der Basis $\{[v_k], \ldots, [v_d]\}$ von W aus?
Was wissen wir?
$A \cdot u_1 = \lambda \cdot u_1$
$A \cdot v_j = a_j^1 u_1 + \sum_{k=2}^d a_j^k \cdot v_k \qquad j = 2, \ldots, d$
$A_W[v_j] \overset{\text{Def. v. } A_W}{=} [A \cdot v_j] = [a^1 u_1 + \sum_{k=2}^d a_j^k v_k] = [0] + \sum_{k=2}^d a_j^k [v_k]$,,repräsentantenweise Linearkombination ansehen"

Die a_j^k sind dieselben Koeffizienten wie bei $\begin{pmatrix} a_{22} \ldots a_{2d} \\ \vdots \\ a_{d2} \ldots a_{dd} \end{pmatrix}$

Induktions-Anfang:
$d = 1$: 1×1 Matrizen sind diagonal $\surd$
Induktions-Voraussetzung:
Für jeden Endomorphismus eines $(d-1)$-dim Vektorraumes, dessen charakteristsiches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Basis, so dass die Matrix Dreiecksgestalt hat.
Induktions-Schritt:
Der Endomorphismus A_W mit der Matrix $\begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d2} & \ldots & a_{dd} \end{pmatrix}$ hat ein char. Polynom das in Linearfaktoen zerfällt.
$det \left(\begin{pmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d2} & \ldots & a_{dd} \end{pmatrix} - X \cdot id \right)$ zerfällt nämlich in Linearfaktoren!

Also gibt es eine Basis $[u_2], [u_3], \ldots, [u_d]$ von W so dass $\left(A_W\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$

Wähle $u_2 \in [u_2], \ldots, u_d \in [u_d]$ und u_1 als Basis für V.

$$\left(A\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \text{weitere Zeile hängt von der} \\ & \text{Wahl der Repräsentanten ab} \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & \ldots & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{\underbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}}_{m_1}} & \\ & \boxed{\underbrace{\begin{matrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{matrix}}_{\lambda_j \neq \lambda_1}} \end{array}$$

$Kern(A - \lambda id)^{m_1} = Span(a_1, \ldots, a_{m_1})$

Satz:
Voraussetzungen:
Sei V ein K-Vektorraum, $dim(V) = n$, $L \in End(V)$
$\chi_L(T) = (\lambda_1 - T)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - T)^{m_k} \qquad \lambda_j \cdot = \lambda_j$ für $i \neq j$
Dann gibt es eine Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ von V, so dass die Matrix von L diese

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Gestalt hat.

Beweis:
Es gibt eine Basis $B_1 = \{e_1^1, \ldots, e_n^1\}$, so dass die Matrix von L ist:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{m_1} & & & & & & & * \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_k & & \\ 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$\forall\ j = 1, \ldots, k$ gibt es eine Basis $B_j\{e_1^j, \ldots e_{m_j}^j\}$, so dass die Matrix von ist:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_j & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j\end{matrix}}_{m_j} & & * & \\ & \lambda_? & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_? \end{pmatrix} \lambda_? \neq \lambda_j$$

Definiere:
$V_j = \mathit{Spann}$ von $\{e_1^j, \ldots, e_{m_j}^j\}$

V_j ist invariant $L(V_j) \subset V_j$
Matrix von $L|_{V_j}$ bzgl. der Basis $\{e_1^j, \ldots, e_{m_j}^j\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j \end{pmatrix}$$ Was kann man herauslesen?

1. $(L|_{V_j} - \lambda_j id)^{m_j} = 0$
2. $(L|_{V_j} - \lambda_i id)^{m_i} : V_j \to V_j \qquad i \neq j$
   Behauptung: Dies ist ein Isomorphimus.
   Matrix von $L|_{V_j} - \lambda_i id = \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j - \lambda_i \end{pmatrix}$
   $\Rightarrow det(L|_{V_j} - \lambda_i id) = (\lambda_j - \lambda_i)^{m_j} \neq 0$
   Also ist bewiesen: $(L|_{V_j} - \lambda_i id)^{m_j}$ Isomorphismus

Ansatz: $B = \{\underbrace{e_1^1, \ldots, e_{m_1}^1}_{\text{Basis für } V_1}, \underbrace{e_1^2, \ldots, e_{m_2}^2}_{\text{Basis für } V_2}, \ldots\ldots, \underbrace{e_1^k, \ldots, e_{m_k}^k}_{\text{Basis für } V_k}\}$
B hat $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ Elemente
Zz.: B ist linear unabhängig.

$$\underbrace{a_1^1 e_1^1 + \ldots + a_{m_1}^1 e_{m_1}^1}_{W_1} + \ldots\ldots + \underbrace{a_1^k e_1^k + \ldots + a_{m_k}^k e_{m_k}^k}_{W_k} = 0$$

$W_i \in V_i\ \forall i$
$W_1 + W_2 + \ldots + W_k = 0$
Ziel: Sehen $W_i = 0\ \forall i$

Wende: $A_i = (L - \lambda_1 id)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (L - \lambda_{i-1} id)^{m_{i-1}} \cdot (L - \lambda_{i+1} id)^{m_{i+1}} \cdot \ldots \cdot (L - \lambda_k id)^{m_k}$ auf die Gelcihung an.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
W_1 & & W_{i-1} & & W_{i+1} & & W_k & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & + \ldots + & 0 & + A_i W_i & 0 & + \ldots + & 0 & = 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow A_i W_i = 0 \qquad A_i|_{W_i}$ ist Isomorphismus $\Rightarrow W_i = 0$
Bestimme Matrix von L bzgl. B

$$
\begin{array}{c}
m_1\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\
m_2\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right. \\
\\ \\ \\
m_k\left\{\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right.
\end{array}
\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix} & 0 & & \\ \hline
0 & \begin{matrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2\end{matrix} & & \\ \hline
\vdots & \begin{matrix}0 \\ \vdots\end{matrix} & & \\ \hline
0 & 0 & & \begin{matrix}\lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k\end{matrix}
\end{array}\right)
$$

13 Symmetrische Bilinear Form

V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum; $dim(v) = n$
$b : V \times V \to \mathbb{R}$ bilnear, symmetrisch

F_W $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Matrix von b ist: $\begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & \ldots & b(e_n, e_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e_1, e_n) & \ldots & b(e_n, e_n) \end{pmatrix}$

13.1 Trägheitssatz von Sylvester

Satz: „Trägheitssatz von Sylvester"
Es gibt eine Basis B von V, so dass die Matrix x von b ist:

$$\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & 0 \\ \hline
\underbrace{\qquad 0 \qquad}_{r} & \underbrace{\qquad 0 \qquad}_{s} & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}
\end{array}$$

r, s hängen nur von b ab.

Beispiel:

Skalarprodukte:

B ist ON-Basis: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Lorenzform: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lemma:
Sei $\langle , \rangle$ Skalarprodukt auf V. Dann gibt es einen symmetrischen Endomorphismus $A : V \to V$ mit $b(x, y) = \langle x, Ay \rangle$
Beweis (Lemma):
F_W $y \in V$ fest $b(\cdot, y) : V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto b(x, y)$
$b(\cdot, y) \in Hom(V, \mathbb{R}) =$ Dualraum
Es wurde bewiesen, dass es $y' \in V$ gibt, so dass (eindeutig): $b(\cdot, y) = \langle \cdot, y' \rangle$

Definiere: $Ay = y'$ $\qquad A : V \to V$
Zz:

1. A ist linear
2. A ist symmetrisch

$\forall x$ gilt $b(x,y) = \langle x, Ay\rangle$

1. $y_1, y_2 \in V$ $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$
   Zz: $A(a_1y_1 + a_2y_2) - a_1A(y_1) - a_2A(y_2) \stackrel{!}{=} 0$ $\forall x \in V$
   $$\langle x, A(a_1y_1 + a_2y_2) - a_1A(y_1) - a_2A(y_2)\rangle = 0$$
   $$\langle x, A(a_1y_1 + a_2y_2)\rangle - a_1\langle x, A(y_1)\rangle - a_2\langle x, A(y_2)\rangle$$
   $$= b(x, a_1y_1 + a_2y_2) - a_1b(x, y_1) - a_2b(x, y_2) = 0$$
   $\Rightarrow$ A linear!
2. $\forall x, y$ gilt $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$
   $$\langle x, Ay\rangle = b(x,y) = b(y,x) = \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle$$

Beweis (Satz):
Im WS gezeigt: Es gibt eine ON-Basis B' bzgl. der A diagonal ist. $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$
Matrix von b bzgl. B'?

$$\begin{pmatrix} b(e'_1, e'_1) & \ldots & b(e'_1, e'_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b(e'_n, e'_1) & \ldots & b(e'_n, e'_n) \end{pmatrix}$$

$b(e'_i, e'_i)$ Irgenwelche Zahlen
$i \neq j$ $b(e'_i, e'_j) = \langle e'_i, \underbrace{Ae'_j}_{\lambda_j e_j}\rangle = \lambda_j \underbrace{\langle e'_i, e'_j\rangle}_{0}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} b(e'_1, e'_1) & & 0) \\ & \ddots & \\ 0 & & b(e'_n, e'_n) \end{pmatrix}$$

Nach umformen, nehme an:
$b(e'_1, e'_1), \ldots, b(e'_r, e'_r) > 0$ und
$b(e'_{r+1}, e'_{r+1}), \ldots, b(e'_{r+s}, e'_{r+s}) < 0$
$b(e'_{r+s+1}, e'_{r+s+1}) = \ldots = b(e'_n, e'_n) = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c}
+ & & 0 & & \\
& \ddots & & 0 & 0 \\
0 & & + & & \\
\hline
& & & - & \\
& 0 & & \ddots & 0 \\
& & & - & \\
\hline
& & & & 0 \\
& 0 & & 0 & \ddots \\
& & & & 0
\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lcl}
e_1 & = & \frac{1}{\sqrt{b(e'_1,e'_1)}} \cdot e'_1 \\
\vdots & & \\
e_r & = & \frac{1}{\sqrt{b(e'_r,e'_r)}} \cdot e'_r \\
e_{r+1} & = & \frac{1}{\sqrt{-b(e'_{r+1},e'_{r+1})}} \cdot e'_{r+1} \\
\vdots & & \\
e_{r+s} & = & \frac{1}{\sqrt{-b(e'_{r+s},e'_{r+s})}} \cdot e'_{r+s} \\
e_{r+s+1} & = & e'_{r+s+1} \\
\vdots & & \\
e_n & = & e'_n \\
B & = & \{e_1, \ldots, e_n\}
\end{array}$$

Auszurechnen: $b(e_i, e_j)\ \forall i, j$
$i \neq j$:

$$b(e_i, e_j) = b(\text{Vorfaktor}_i e'_i, \text{Vorfaktor}_j e'_j) = \text{Vorfaktor}_i \cdot \text{Vorfaktor}_j \underbrace{b(e'_i, e'_j)}_{0} = 0$$

$i = 1, \ldots, r$

$$b(e_i, e_i) = b\left(\frac{1}{\sqrt{b(e'_i, e'_i)}} \cdot e'_i, \frac{1}{\sqrt{b(e'_i, e'_i)}} \cdot e'_i\right) = \frac{1}{\sqrt{b(e'_i, e'_i)}} b(e'_i, e'_i) = 1$$

$i = r + 1, \ldots, r + s$

$$\text{analog} \rightsquigarrow -1$$

$i = r + s + 1, \ldots, n$

$$\text{analog} \rightsquigarrow 0$$

Wie erkennt man $n-r-s=$ Anzahl von "0"
$n-r-s=dim(Kern(A))$

$$Kern(A)=\{y|Ay=0\}=\{y|\langle x,Ay\rangle=0\forall\ x\}=\{y|b(x,y)=0\forall\ x\}$$

$n-r-s=dim\{y\in V|b(x,y)=0\ \forall x\in V\}$
$\Rightarrow n-r-s$ hängt nur von b ab.
Nehme $\{e_1,\dots,e_n\}$, $B'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ wie im Satz

$$\underbrace{e_1,\dots,e_r}_{+1},\underbrace{e_{r+1},\dots,e_{r+s}}_{-1},\underbrace{e_{r+s+1},\dots,e_n}_{0}\qquad \underbrace{e'_1,\dots,e'_R}_{+1},\underbrace{e'_{R+1},\dots,e'_{R+S}}_{-1},\underbrace{e'_{R+S+1},\dots,e'_n}_{0}$$

Behauptung: $e'_1,\dots,e'_R,e'_{R+1},\dots,e'_{R+S},e'_{R+S+1},\dots,e'_n$ sind linear unabhängig.
Zz: $r+s=R+S\stackrel{!}{=}r+S$

$$\underbrace{a_1e_1+\dots+a_re_r}_{V}=\underbrace{-a_{R+1}e'_{R+1}-\dots-a_{R+S}e'_{R+S}}_{W}$$

$$\begin{aligned} b(V,V) &= b(a_1e_1+\dots+a_re_r,a_1e_1+\dots+a_re_r)\\ &= a_1^2\underbrace{b(e_1,e_1)}_{1}+\dots+a_r^2\underbrace{b(e_r,e_r)}_{1}\\ &\geq 0(b(v,v)=0\Leftrightarrow v=0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(W,W) &= \dots(\text{ analog})\\ &= a_{R+1}^2\underbrace{b(e'_{R+1},e'_{R+1})}_{-1}+\dots+a_{R+S}^2\underbrace{b(e'_{R+S},e'_{R+S})}_{-1}\\ &\leq 0(b(w,w)\leq 0\ b(w,w)=0\Leftrightarrow w=0)\end{aligned}$$

$V=W\Rightarrow\underbrace{b(v,v)}_{\geq 0}=\underbrace{b(w,w)}_{\leq 0}$
$\Rightarrow$ linear unabhängig, also $r=R$ und $s=S$

14 Differenzierbarkeit von Abbildungen $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^e$

Lukas 6.6.00

Abbildung $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^e$ an der Stelle $a\in\mathbb{R}^d$
Zu jedem $\epsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$, so daß aus $|h|\leq\delta$ folgt:

$$|f(a+h)-f(a)-l_a\cdot h|_{\mathbb{R}^e}\leq\epsilon\cdot|h|_{\mathbb{R}^d}$$

mit $l_a \in \; Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$

14.1 Wiederholung

Zur Erinnerung:

1. Die Definition kann auf quadratische Funktionen ($\langle Ax, x\rangle$) ohne weitere Vorkenntnisse angewandt werden.

2. Falls für 1-dimensionale Funktionen bekannt ist, daß $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $|g''| \leq B$, dann folgt daraus:

$$|g(x+h) - g(x) - g'(x) \cdot h| \leq \frac{B}{2} \cdot |h|^2$$

   So können auch solche zusammengesetzte Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, z.B. $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \cdot e^{x_2}$ differenziert werden (ohne Kenntniss weiterer Sätze)

3. Es wird erwartet, daß die Ableitungen der partiellen Funktionen $x_1 \to f(x_1, x_2)$ und $x_2 \to f(x_1, x_2)$, die sogenannten partiellen Ableitungen, als "schon bekannt" angesehen werde. Zum Beispiel $(x, a_0, \cdots, a_n) \to a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Die Ableitungen heißen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

4. Falls Nenner auftreten, etwa

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 \cdot x_2^3}{x_1^2 + x_2^4}$$

   ,so zeigen sich unerwartete Schwierigkeiten, die nicht erlauben, mit der 1-dimensionalen partiellen Ableitung zufrieden sein

1. f ist gegeben und differenzierbar. Dann hat man zu jeder Stelle $a \in \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung

$$l_a = Tf\Big|_a$$

   Die Ableitung von f an der Stelle a

Dieses l_a heißt Ableitung von f an der Stelle a. Leider sind viele Bezeichnungen üblich, die an den unterschiedlichsten Stellen mit anderen Bezeichnungen kollidieren.

- $l_a = f'(a)$ ohne Unterschied zum 1-dimensionalem Fall.
- Für $e = 1$ ist am Verbreitesten:

$$l_a = df\Big|_a$$

  Dies kollidiert für $e > 1$ aber in untragbarere Weise!
- Für $e > 1$ zum Trost:

$$l_a = Df\Big|_a$$

  Dieser Fall kollidiert aber in allen Bereichen, in denen Geometrie und Analysis zusammentreffen!
- Noch nicht sehr verbreitet, aber kollisionslos ist

$$l_a = Tf\Big|_a$$

Die beiden letzten Bezeichnungen werden in der Vorlesung verwendet werden!

2. Behauptung: Auch $f \to Tf$ ist linear, d.h.

$$T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\Big|_a = \alpha_1 Tf_1\Big|_a + \alpha_2 Tf_2\Big|_a$$

Voraussetzung: Für $j = 1, 2$

$$|h| \leq \delta_1, \delta_2 \Rightarrow |f_j(a+h) - f_j(a) - Tf_j\Big|_a \cdot h| \leq \epsilon \cdot |h|$$

Beweis: $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Aus $|h| \leq \delta \Rightarrow$

$$|(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \cdot (a+h) - \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \cdot (a) - \underbrace{(\alpha_1 Tf_1\Big|_a + \alpha_2 Tf_2\Big|_a)}_{Lin.komb.\ in\ Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)} \cdot h| \leq \underbrace{(|\alpha_1| + |\alpha_2|) \cdot \epsilon}_{\tilde{\epsilon}} \cdot |h|$$

14.2 Kettenregel

- Kettenregel:
  $c : [\alpha, \omega] \to \mathbb{R}^d$ ("Kurve") sei differenzierbar,
  $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ eine Funktion wie zu diskutieren und
  $g := f \circ c : [\alpha, \omega] \to \mathbb{R}^1$ 1-dimensional wie bisher!
  Die Kettenregel soll so gut sein, daß aus der Differenzierbarkeit von c und f die Differenzierbarkeit von $g = f \circ c$ folgt.
  Die Kettenregel soll auch sagen, wie die Ableitung $g'(t)$ aus den Ableitungen $Tf\Big|_{c(t)}$ und $c'(t)$ berechnet wird.
  Behauptung:

$$(f \circ c)' = \underbrace{Tf\Big|_{c(t)}}_{\in\ Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)} \cdot \underbrace{c'(t)}_{\in\ \mathbb{R}^a}$$

14.2.1 d-dimensionale Schrankensatz

PROPAGANDA:
Aus diese Kettenregel und dem 1-dimensionalem Schrankensatz (oder ähnlich) folgt ein schöner d-dimensionaler Schrankensatz

- c sei stetig differenzierbar auf $[\alpha, \omega]$! Dann ist die Kurvenlänge

$$c = \int_\alpha^\omega |c'(t)| dt$$

- f sei (stetig) differenzierbar und $||Tf\Big|_{c(t)}|| \leq L$

$\rightsquigarrow g(t) = (f \circ c)(t)$ stetig differenzierbar Ableitung (Kettenregel) und der HS der Differential- und Integralrechnung liefert:

$$\begin{aligned}
|g(t_2) - g(t_1)| &= |\int_{t_1}^{t_2} g'(t)dt| \\
&= |\int_{t_1}^{t_2} Tf\Big|_{c(t)} \cdot c'(t)dt| \\
&\overset{\Delta-Ungl}{\leq} \int_{t_1}^{t_2} |Tf\Big|_{c(t)} \cdot c'(t)|dt \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} ||Tf\Big|_{c(t)} || \cdot |c'(t)|dt \\
&\leq l \cdot \int_{t_1}^{t_2} |c'(t)|dt \\
&= L \cdot \text{Länge}(c)
\end{aligned}$$

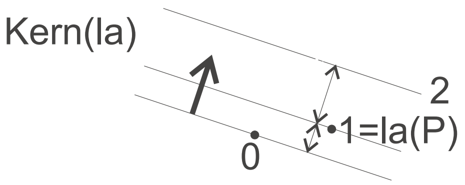
Von der folgenden Funktionen f hatte ich für jede Gerade $c(t) = (t \cdot \alpha, t \cdot \beta)$ und $\tilde{c}(t) = (t^2, t), c^2(0) = 0$ durch 0 gezeigt:

- $(f \circ c)'(0) = 0 \quad \surd$
- $(f \circ \tilde{c})'(0) = \frac{1}{2} \quad \surd$

Beide sind zwar einzelnd richtig, zusammen aber nicht verträglich mit der Kettenregel!

14.3 Veranschaulichung höherdim. Ableitungen

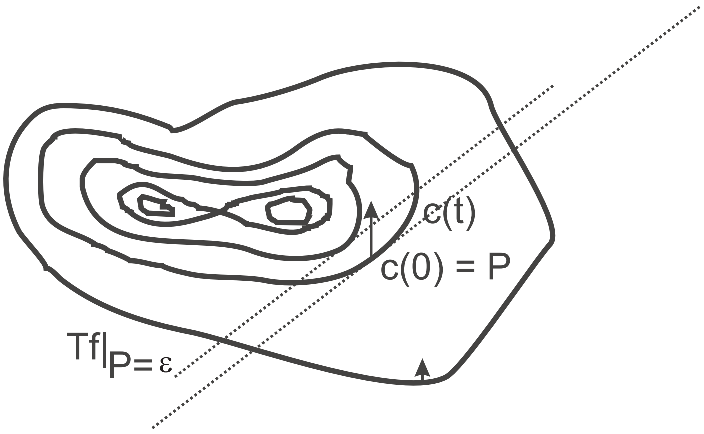
Was können wir tun, um höherdimensionale Ableitungen "anschaulich" zu machen? (d=1,2 ; e=1)
Wie kann man lineare Abbildungen $l_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ anschaulich machen?
Wie sieht das Höhenlinienbild einer linearen Funktion aus ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)?



$$l_a(a) = \langle v, h\rangle = v_{\perp} Kern(l_a)$$

Abstand der Höhenlinien 0 und 1 ist $\frac{1}{|v|}$
Höhenlinienbild von f
$c(t)$ sei Höhenlinie und $f(c(t)) = const$

$$\underbrace{Tf\Big|_{c(t)}}_{\in Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\dot{c}(t) = (f \circ c)\dot{(t)} = 0}_{\dot{c}(t) \in Kern\ Tf\big|_{c(t)}}$$



In der linearen Algebra war es bequem, lineare Abbildungen $\in Hom(V, \mathbb{R})$ mit Hilfe von Skalarprodukten zu beschreiben,

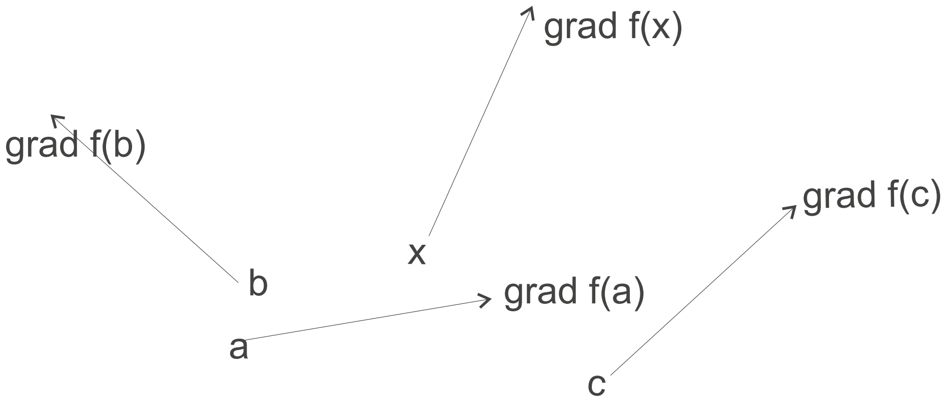
$$l_a \cdot h = l_a(h) = \langle \underbrace{v(a)}_{\in \mathbb{R}^d}, h \rangle$$

Das Mitteilen der linearen Abbildung l_a durch Angaben $V(a)$ ist schneller als die Mitteilung von $Kern$ und nächster Höhenlinie.

Nun sei weiter $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben und wir schreiben für die Ableitung:

$$Tf\Big|_a \cdot h = \langle grad\ f\Big|_a, h \rangle$$

Wie sieht jetzt eine Veranschaulichung der Ableitung aus?



14.4 Differenzierbarkeit von $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ ($d > 1$, anschaulich besonders wichtig: $d = 2, 3, e = 1$)

F heißt differenzierbar an der Stelle a mit der Ableitung $TF_{|a} \in Hom(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e)$, falls wahr ist:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|h| \leq \delta \Rightarrow |F(a+h) - F(a) - TF_{|a} \cdot h| \leq \epsilon \cdot |h|$$

alternativ:
$F(a+h) = F(a) + TF_{|a} \cdot h + \varphi_a(h) \cdot |h|$ mit $\varphi_a(h) = 0$ und φ_a stetig bei $h = 0$

Zum Beispiel:
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar bei $a \in \mathbb{C}$:
Ist eine komplex differenzierbare Funktion, auch als Abbildung $[\mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \cdot]$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar?
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(z) - f(a) - \underbrace{f'(a)}_{\text{dies ist eine } \mathbb{R}\text{-lineare Abbildung}} (z-a)| \leq \varepsilon \cdot |z - a|$$

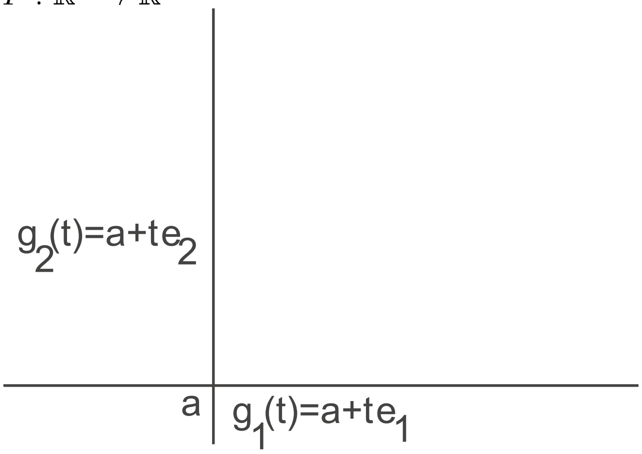
Die Antwort ist natürlich ja, aber wie formuliert man die Begründung?

$f'(a) \in \mathbb{C}$ $[\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \; TF_{|a} \in Hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)]$

1. $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum: $v_1 z_1 + r_2 z_2$, $r_j \in \mathbb{R}$, $z_j \in \mathbb{C}$ sind geläufig
2. $c \in \mathbb{C}$, dann ist $z \mapsto cz$ $\mathbb{R}$-linear, nämlich $c(r_1 z_1 + r_2 z_2) = r_1(cz_1) + r_2(cz_2)$

14.4.1 Falls man die Kettenregel zur Verfügung hat, so sind die partiellen Ableitungen extrem nützlich!

$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{e=1}$



$(F \circ g_j)(t) = F(a_1, a_2, \dots, a_j + te_j, a_{j+1}, \dots, a_d)$ kann 1-dimensional differenziert werden und die Ableitung heißt partielle Ableitung nach der j-ten Variable $\frac{\partial}{\partial x_j} F(a)$

links Kettenregel: $TF_{|a=g_j(0)} \cdot \dot{g}_j(0) = TF_{|a} \cdot e_j$
Zusammenfassung: Die Kettenregel erlaubt die Berechnung von $TF_{|a}$ aus 1-dimensionalen („partiellen") Ableitungen.
$F(x) = F(x_1, \dots, x_d)$

- Die Ableitung von F längs der Geraden $g_j(t) = a + te_j$ heißt partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} F(a)$
- Kettenregel: $TF_{|a} \cdot e_j$.

Deshalb ist die Matrix von $TF_{|a}$ bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$:

$$\left(TF_{|a}\right) = \left(\frac{\partial F(a)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(a)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(a)}{\partial x_j}\right)$$

Die$\frac{\partial F(a)}{\partial x_j}$ sind also die Spaltenvektoren.

$$F : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^e \, F(x) = \begin{pmatrix} F^1(x) \\ F^2(x) \\ \vdots \\ F^e(x) \end{pmatrix}$$

$$\left(TF_{|a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(a)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1(a)}{\partial x^d} \\ \frac{\partial F^2(a)}{\partial x^1} & \ddots & \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F^e(a)}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^e(a)}{\partial x^d} \end{pmatrix} \text{(Jacobi-Matrix von } F\text{, genauer: von } TF)$$

Wiederholung:
Kettenregel und $\left|\int_a^b f\,dt\right| \overset{a\leq b}{\leq} \int_a^b |f|dt$ hat den Schrankensatz zur Folge:

$$\| TF_{/c(t)} \| \leq L \Rightarrow |F(c(t_1)) - F(c(t_0))| \leq L \cdot \text{Länge}(c)$$

$$\begin{aligned} |F(c(t_1)) - F(c(t_0))| &\overset{\text{HS D+I}}{=} \left|\int_{t_0}^{t_1} (F\circ c)^{\cdot}(t)dt\right| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \int_{t_0}^{t_1} |(F\circ c)^{\cdot}|(t)dt \\ &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{t_0}^{t_1} |TF_{|c(t)}\dot{c}(t)|dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{|TF_{|c(t)}|}_{\leq L} |\dot{c}(t)|dt \end{aligned}$$

Sei $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^e$ differenzierbar bei $a\in\mathbb{R}^d$,
$F:\mathbb{R}^e \longrightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar bei $A=f(a)\in\mathbb{R}^e$.

Vorausetzung:

1. $x\mapsto \varphi_a(x)$ ist stetig bei $x=a$ mit Wert 0
   $f(x) = f(a) + TF_{/a}(x-a) + \varphi_a(x)(x-a), x\in\mathbb{R}^d$
2. $X\mapsto \Phi(X)$ ist stetig bei $X=A$ mit Wert 0
   $F(X) = F(A) + TF_{/A}(X-A) + \Phi(X)(X-A), X\in\mathbb{R}^e$

Behauptung:
$F\circ f$ ist differenzierbar bei $x=a$ mit Ableitung $T(F\circ f)_{/a} = TF_{/A=f(a)}\cdot Tf_{|a}$
Setze $f(x)=X$, $f(a)=A$ in die Diff.-Def. von F ein:

$$\begin{aligned} F(f(x)) &= F(f(a)) + TF_{|A=f(a)}(f(x)-f(a)) + \Phi(f(x))(f(x)-f(a)) \\ &= F(f(a)) + TF_{|f(a)}\left[TF_{|a}(x-a) + \varphi_a(x)(x-a)\right] \\ &\qquad + \Phi_A(f(x))\left[TF_{|a}(x-a) + \varphi_a(x)(x-a)\right] \\ &= F(f(a)) + TF_{|f(a)}\cdot TF_{|a}(x-a) + \left\{TF_{|f(a)}\cdot\varphi_a(x) \right. \\ &\qquad \left. + \Phi_A(f(x))\cdot(TF_{|a}+\varphi_a(x))\right\}(x-a) \end{aligned}$$

also: $\{\dots\}_{|x=a} = 0$; $\{\dots\}$ als Produkt und Komposition stetiger Funktionen stetig

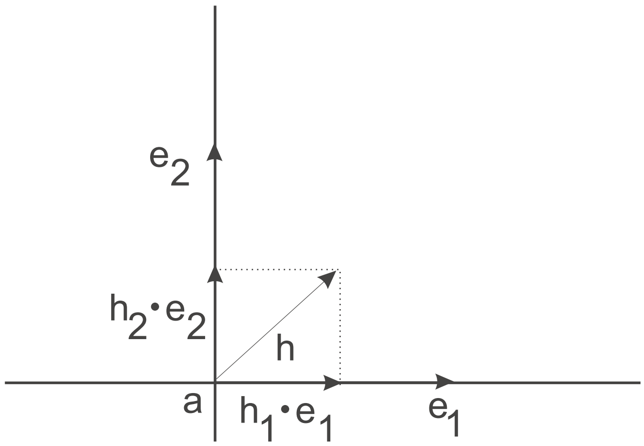
$\epsilon = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{1000} \to$
$|F(a+h) - F(a) - TF_{|a} \cdot h| \leq \frac{1}{2}|h|$ enthält keine Information über $TF_{|a}$
Der Wert von $\varphi_a(0)$ wird hiedurch nicht bestimmt.

14.5 Wie kann man den partiellen Ableitungen von F bei a ansehen, ob F differenzierbar ist?

(Die Existenz der partiellen Ableitungen war zu wenig: $\frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^4}$)

Satz:
Falls die partiellen Ableitungen von F in einer Umgebung a (für $|x-a| \leq \delta$) existieren und stetig an der Stelle a sind, dann ist F differenzierbar bei a und $\left(TF_{/a} \right)$ ist die Jacobi-Matrix der partiellen Ableitungen

Vorausetzung:
$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)$ existiert für x nahe a
Zu jedem $\varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ s.d. $|x-a| \leq \delta \Rightarrow$
$|\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial F}{\partial x_j}(a)| \leq \epsilon$, Stetigkeit der partiellen Ableitungen



$F(a+h) - F(a) \approx Ableitung \cdot h$
erwarte: $\frac{\partial F}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_d}(a) \cdot h_d$

Zz.: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass $|F(a+h) - F(a) - \sum \frac{\partial F}{\partial x_j}(x) \cdot h_j| \leq \varepsilon \cdot |h|$

setze $h := (x - a) = h_1 e_1 + h_2 e_2 + h_d e_d$, dann

$$a_n := a + \sum_{k=1}^{n} h_k e_k$$

$|F(a_1) - F(a) - \frac{\partial F}{\partial x_1}(a) \cdot h_1| \leq \varepsilon_1 \cdot h_1 = \varepsilon \cdot h_1$
$|F(a_2) - F(a_1) - \frac{\partial F}{\partial x_1}(a_1) \cdot h_2| \leq \varepsilon_2 \cdot h_2 = \varepsilon \cdot h_2$

14.6 Ableitungskriterium mit partiellen (=1-dim) Ableitungen

Satz:

$$|f(a+h) - f(a) - \langle grad\ f(a), h\rangle| \leq \epsilon \cdot |h|$$

Voraussetzung:
$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$; $F : (F^1, \dots, F^e)$; die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x^j}$ sollen in einer Umgebung von $a \in \mathbb{R}^d$ existieren und stetig sein.
Behauptung:
Dann ist F bei a differenzierbar und die Matrix von $TF|_a$ bzgl. der Standardbasis $e_1, \dots, e_d$ von $\mathbb{R}^d$ ist: $\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(a) & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^d}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F^e}{\partial x^1}(a) & \dots & \frac{\partial F^e}{\partial x^d}(a) \end{pmatrix}$

Beweis:
$h = \sum_{k=1}^{d} h^k \cdot e_k$ „Differenzvektor"
Problem: Wie kann man $F(a+h) - F(a)$ kontrollieren, wenn die Voraussetzungen nur $F(x + \underbrace{h^k \cdot e_k}_{\text{parallel zu einer Koordinatenrichtung}}) - F(x)$ kontrollieren?

$$a \to a_1 = a + h^1 \cdot e_1 \to a_2 = a_1 + h^2 \cdot e_2 \to \dots$$

Zwischenpunkte $a_n = a + \sum_{k=1}^{n} h^k \cdot e_k \; n = 1, \dots, d$
Stetigkeit der $\frac{\partial F}{\partial x^j}$ an der Stelle a:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ s.d. $|x - a| \leq \delta \Rightarrow \left|\frac{\partial F}{\partial x^j}(x) - \frac{\partial F}{\partial x^j}(a)\right| \leq \varepsilon$
(alternativ kann man auch $|h| \leq \delta$ und dann mit $x = a + h$ arbeiten)

Betragsgleichung aufgelöst:

$$\rightsquigarrow \frac{\partial F}{\partial x^j}(a) - \varepsilon \le \frac{\partial F}{\partial x^j}(x) \le \frac{\partial F}{\partial x^j}(a) + \varepsilon$$

Voraussetzung, die erlaubt den Schrankensatz auf $F(a_j) - F(a_{j-1})$ anzuwenden denn $a_j - a_{j-1} = h^j \cdot e_j$
Betrachte: $t \to F(a_{j-1} + te_j) \qquad 0 \le t \le h^j$
(Setze $0 \le h^j$ voraus; keine Einschränkung, da man durch die Basisvektoren das Vorzeichen kontrollieren kann.)
1-dim Funktion, deren Ableitung zwischen $\frac{\partial F}{\partial x^j}(a) - \varepsilon$ und $\frac{\partial F}{\partial x^j}(a) + \varepsilon$ liegt.
Schrankensatz:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^j}(a) - \varepsilon\right) \cdot h^j \le F(a_j) - F(a_{j-1}) \le \left(\frac{\partial F}{\partial x^j}(a) + \varepsilon\right) \cdot h^j$$

Summation dieser Ungelichung über j:
In der Mitte ergibt sich eine Teleskopsumme!

$$\sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial F}{\partial x^j}(a) - \varepsilon\right) h^j \le F(a+h) - F(a) \le \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial F}{\partial x^j}(a) + \varepsilon\right) h^j$$

oder

$$\underbrace{\begin{aligned} |h| \le \delta \Rightarrow \left| F(a+h) - F(a) - \sum_{j=1}^{d} \tfrac{\partial F}{\partial x^j}(a) \cdot h^j \right| &\le \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{d} |h^j| \\ &\le \varepsilon \cdot \sqrt{d} \cdot |h| \\ |h| = \sqrt{\textstyle\sum |h^j|^2} \end{aligned}}_{\text{Differenzierbarkeit von } F \text{ bei a } \left(TF|_a\right) \text{ Matrix der partiellen Ableitung}}$$

14.6.1 Nicht immer ist es am bequemsten die partiellen Ableitungen zu verwenden

Ergänzung:
$X \in \mathbb{R}^{d^2} = Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, z.B. durch $d \times d$ Matrizen realisiert

$$\left.\begin{array}{l} F : \mathbb{R}^{d^2} \to \mathbb{R}^{d^2} \\ F(X) = X * X \end{array}\right\} \begin{array}{l} F \text{ soll an der Stelle } A \in \mathbb{R}^{d^2} \text{ diff. werden.} \\ X = A + (X - A) \\ X^2 = A^2 + \underbrace{A * (X - A) + (X - A) * A}_{!Kommutativ} \end{array}$$

$$F(X) - F(A) - [A * (X - A) + (X - A) * A] = \underbrace{(X - A)^2}_{^2-\text{Fehler}}$$

$$(X - A) \overset{\text{linear}}{\to} [\ldots]$$

Was heißt das linear?
$(H \to A * H + H * A)$
$(r_1 H_1 + r_2 H_2) \to A(r_1 H_1 + r_2 H_2) + (r_1 H_1 + r_2 H_2)A = r_1(AH_1 + H_1 A) + r_2(AH_2 + H_2 A)$

15 Umkehrsatz

15.1 Komplexer Umkehrsatz

Zu Aufgaben 4.7, 6.4, 7.5
$|z - 0| \leq \frac{2}{3} = r \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} |f'(z) - 1| \leq \frac{2}{3}$(mit Kontraktionssatz)
$f(0) = 0$
Ziel: Finde in der Nähe von 0 eine Umkehrfunktion.
$|w - 0| \leq \frac{2}{9}$
$F_w(z) := z - (f(z) - w)$
Fixpunkte: $F_w(z_*) = z_* \Rightarrow f(z_*) = w$
$|F'_w(z)| = |1 - f'(z)| \overset{\text{Vor.}}{\leq} \frac{2}{3}$
$F_w(z) = F_0(z) + w$
$F_0(0) = 0,\ F_0 : \{|z - 0| \leq \frac{2}{3}\} \to \{|z - 0| \leq \underbrace{\frac{2}{3}}_{r} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{q}\}$
$\Rightarrow F_w = \{|z - 0| \leq r = \frac{2}{3}\} \circlearrowleft$ q-kontrahierend
Die Abbildung: $w \to$ Fixpunkt $F_w = z_*(w)$ soll nch Möglichkeit differenzierbar sein. Dazu zuerst stetig oder Lipschitz-stetig

$$|F_{w_1}(z) - F_{w_2}(z)| = |w_1 - w_2| = \|F_{w_1}(.) - F_{w_2}(.)\|$$

$\|f\| := \sup |f(z)|\ z \in$ Def.-Bereich
Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
|z_*(w_1) - z_*(w_2)| &\overset{\text{Fixpunkt}}{=} |F_{w_1}(z_*(w_1)) - F_{w_2}(z_*(w_2))| \\
&= |F_{w_1}(z_*(w_1)) - \underbrace{F_{w_1}(z_*(w_2)) + F_{w_1}(z_*(w_2))}_{0} - F_{w_2}(z_*(w_2))| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} F_{w_1}(z_*(w_1)) - F_{w_1}(z_*(w_2))| + |F_{w_1}(z_*(w_2)) - F_{w_2}(z_*(w_2))| \\
&\leq \underbrace{q}_{\frac{2}{3}} \cdot |z_*(w_1) - z_*(w_2)| + |w_1 - w_2|
\end{aligned}
$$

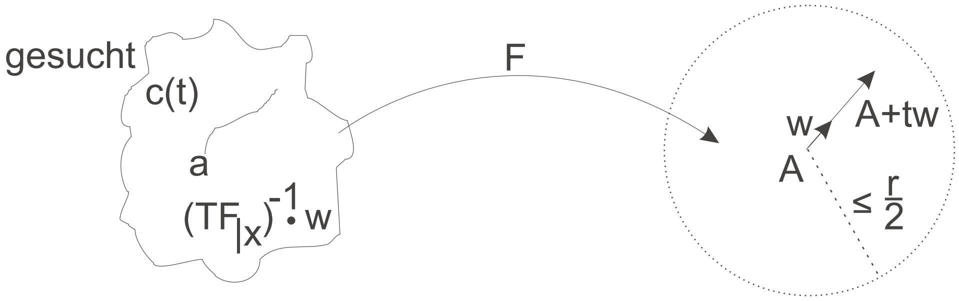
also $|z_*(w_1) - z_*(w_2)| \leq \underbrace{q}_{\frac{2}{3}} \cdot |z_*(w_1) - z_*(w_2)| + |w_1 - w_2|$

$\leadsto \underbrace{|z_*(w_1) - z_*(w_2)|}_{\text{Umkehrsatz hat Dehnungschranke } 3} \leq \underbrace{\frac{1}{1-q}}_{3} \cdot |w_1 - w_2|$

Markus 27.6.00

15.2 Umkehrsatz und gewöhnliche Differentialgleichungen

Frage: Suche ein Urbild der Kurve $t \to A + t \cdot w$
für $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit $F(a) = A, (TF_{|a})$



1. Angenommen wir hätten c differenzierbar
   $F(c(t)) = A + t \cdot w$
   $\left(TF_{|a}\right) \cdot \dot{c}(t) = w$ oder $\dot{c}(t) = \left(TF_{|c(t)}\right)\dot{w}$
2. Definiere ein Vektorfeld
   $V(x) = \left(TF_{|x}\right)^{-1} \cdot w$
   Sei $\gamma(t)$ eine Lösungskurve mit $\gamma(0) = a$

d.h. $\underbrace{\dot{\gamma}(t)}_{\text{durch Differenzieren}} = \underbrace{V(\gamma(t))}_{\text{Wert von V}}$

3. **Behauptung**:
$h(t) = F(\gamma(t)) - (A + t \cdot w) = 0$
$h(0) = F(\gamma(0)) - A + 0 \cdot w = F(a) - A = 0$
$\dot{(h)}(t) = TF_{|\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma(t)} - w = TF^{-1}_{|\gamma(t) \cdot \left(TF_{|\gamma(t)}\right)} \cdot w - w = 0$
$\Rightarrow h = 0$

Wiederholung zu linearen Differentialgleichungen

$\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$
dazu gehört das Vektorfeld $p \to A \cdot p$
"linear" : $A(r_1 \cdot p_1 + r_2 \cdot p_2) = r_1 \cdot Ap_1 + r_2\dot{A}p_2$
Lösungen durch Exponentialreihe $\exp(t \cdot A) = id + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \overset{\text{Satz}}{\Rightarrow}$
$\frac{d}{dt}\exp(t \cdot A) = A \cdot \exp(t \cdot A)$
Definition:
$c(t) = \exp(t \cdot A) \cdot c(0)$
$\dot{c}(t) = A \cdot \exp(tA) \cdot c(0) = A \cdot c(t)$

15.3 Höhere Ableitungen

$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar
$x \mapsto F(x)$

$TF : \mathbb{R}^d \to Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e) \approx \mathbb{R}^{d \cdot e}$
$x \mapsto TF_{|x}$
Falls $TF : \mathbb{R}^d \Rightarrow \mathbb{R}^{d \cdot e}$ differenzierbar ist, so heißt F zweimal differenzierbar usw.
Beachte: Die Ableitungen werden auf diese Weise immer höherdim. Ableitungen.
Bezeichungen:
$TF : x \to TF_{|x} \in Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$
$v \in \mathbb{R}^d$ $\quad TF \cdot v : x \to TF_{|x} \cdot v \in \mathbb{R}^e$ weiterdifferenzieren

$TF_{|x+h} - TF_{|x}$ einfach vorstellbar: Für jedes $v \in \mathbb{R}^d : TF_{|x+h} \cdot v - TF_{|x} \cdot v \in \mathbb{R}^e$

$$TF_{|x+h} - TF_{|x} - \underbrace{T^2F_{|x}...?}_{\text{2. Abl.}} \overset{|h| \leq G}{\Rightarrow} |TF_{|x+h}(v) - TF_{|x}(v) - T^2F_{|x}(v)(h)| \leq \varepsilon \cdot |v| \cdot |h|$$

Satz: (H.A. Schwarz)
Falls $x \to T^2F_{|x}$ stetig ist, so gilt $T^2F_{|x}(v)(h) = T^2F_{|x}(h)(v)$

$$\boxed{\text{Symmetrie der zweiten Ableitungen}}$$

Beachte

$$\left.\begin{array}{ll} v \to T^2F(v)(h) & \text{ist linear} \\ h \to T^2F(v)(h) & \text{ist linear} \end{array}\right\} T^2F()() \text{ ist bilinear \& Satz von Schwarz symmetrisch}$$

Endgültige Bezeichung:

$$T^2F_{|x}(v,h)$$

Markus 4.7.00

16 Divergenz von Vektorfeldern

$P \to X(P)$ Vektorfeld (anschaulich: Geschwindigkeitsfeld)
Bahnkurven (Integralkurven, Lösungskurven)
$c : I \to \mathbb{R}^d$

$$\underbrace{\dot{c}(t)}_{\text{Differenzieren}} \quad = \quad \underbrace{X(c(t))}_{\text{Wert des Vektorfelds}}$$

Das Lösen von Bahnkurven heißt auch Lösen von Differentialgleichungen.

Einfachste Vektorfelder sind die linearen: $X(P) = A \cdot p$
Diese besitzen Bahnkurven die mit schon bekannten Funktionen ausgedrückt werden können. $c(t) = \exp(t \cdot A) \cdot c(0)$: Interpretation:

1. $c(0) = p$ fest
   $t \to \exp(t \cdot A) \cdot p$
   Bahnkurve durch p

2. $t > 0$ fest
   Lin. Abb. $p \to \underbrace{\exp(t \cdot A)}_{\in Hom(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} \cdot p$
   Diese Punkte p werden (jeder auf seiner Bahnkurve) dem Zeitschritt t voranbewegt.

t fest, $p \to \exp(t \cdot A) \cdot p$
Wie groß ist das Volumenverhältnis zwischen dem Ausgangswürfel und dem Bildpolyeder zum Zeitpunkt t?

Arbeitssparenste Formel:

$$t \overset{v(t)}{\to} \det(\exp(t \cdot A)) \overset{\text{Satz}}{=} e^t \cdot spurA$$

$t \overset{v(t)}{\to} \det(\exp(t \cdot A))$: Beschreibt die Volumenexpansion

$X(p+h) - X(p) \approx TX_{|p} \cdot h$
Im linearem Fall: $X(p+h) - X(p) = A(p+h) - Ap = Ah$ unabhängig von p
$X(p) = Ap \Rightarrow TX_{|p} = A$ (unabhängig von p) lineare Vektorfelder haben konstante Ableitungen $p \to A$
$divX := spurTX$
$divX(p) := spurTX_{|p}$

$$v(t) = \det(\exp(t \cdot A)) = e^{t \cdot spurA} = e^{t \cdot divX}$$

$$\text{Wachstumsrate } \frac{\dot{v}}{v}(t) = divX \qquad X \text{ bel.}$$

$X(p+h) = X(p) + TX_{|p} \cdot h + \underbrace{\text{Korrektur}}_{\text{unwesentlich für } divX(p)}$

Behauptung:
$v_l(t) := \det(\exp(t \cdot A))$
$v_r(t) := e^{t \cdot spurA}$

$$v_l = v_r$$

Wenn beide Funktionen dieselbe Differentialgelichung lösen folgt mit dem Eindeutigkeitssatz, dass die beiden Funktionen gleich sein müssen.
$t = 0$
$\rightsquigarrow v_l(0) = v_r(0) = 1$
$\dot{v}_r(t) = spurA \cdot v_r(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v - l(t)\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{d\tau} v_l \cdot (t_0 + \tau)\Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{d}{d\tau} v_l(t_0) \cdot v_l(\tau)\Big|_{\tau=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp((t_0+\tau)\cdot A) &= \exp(t_0 A + \tau A) \\
&= \exp(t_0 A)\cdot \exp(\tau A)
\end{aligned}$$

$$\det(\exp(t_0 A)\cdot \exp(\tau A)) = \det(\exp(t_0 A))\cdot \det(\exp(\tau A))$$

$$\dot{v}_l(t) = \dot{v}_l(0)\cdot v_l(t) = \underbrace{const}_{\mathrm{spur}A}\cdot v_l(t)$$

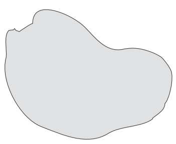
$$\frac{d}{dt}\det(1+\tau\cdot A + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\tau^k A^k}{k!}}_{\text{τ-Ableitung hat an der Stelle 0 den Wert 0}})_{|\tau=0} = \frac{d}{dt}\underbrace{\det(1+\tau\cdot A)}_{\text{Polynom vom Grad d (Zeilenab. von A)}}|_{\tau=0}$$

$$= \mathrm{spur}\ A$$

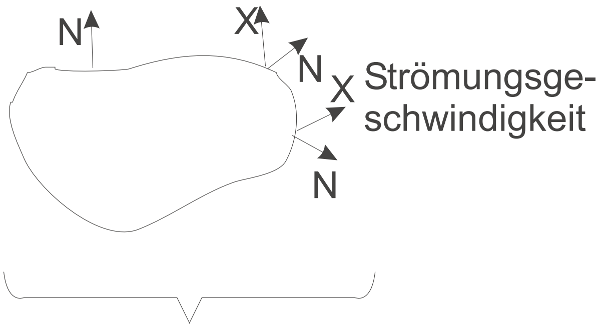
$$\begin{aligned}
\det(1+\tau\cdot\Big(A\Big)) &= \det\begin{pmatrix} 1+\tau a_{11} & \tau a_{12} & \dots & \tau a_{1d} \\ \tau a_{21} & 1+\tau a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tau a_{d1} & & & 1+\tau a_{dd}\end{pmatrix} \\
&= 1+\tau\cdot\sum_{j=1}^{d} a_{jj} + \tau^{?}\underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{uninteressant}}
\end{aligned}$$

$$\int divX \overset{\text{Satz}}{=} \int \langle X, N\rangle$$

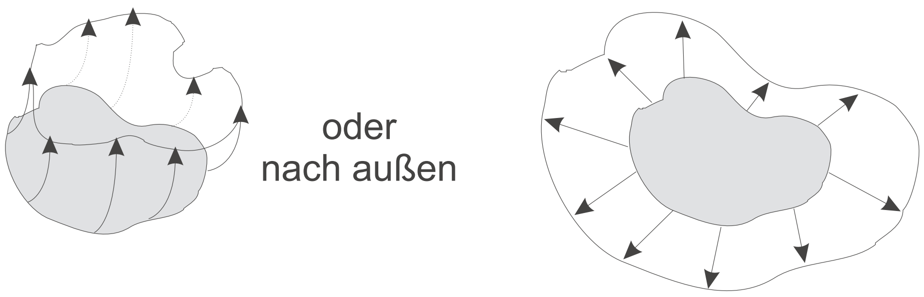
"Kurvenintegrale"



In diesem Gebiet wird ∫div X an Volumen pro Sekunde erzeugt



Volumen, das durch die Oberfläche pro Sekunde transportiert wird



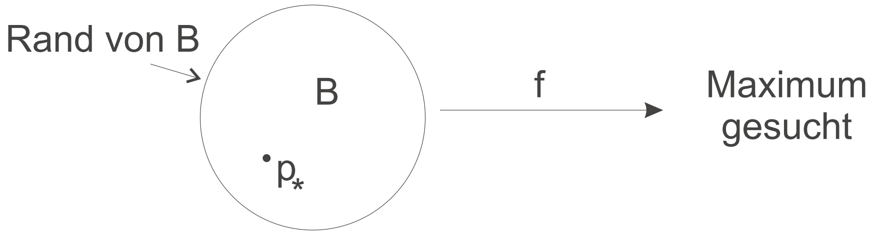
17 Extremwertbestimmung bei mehrdimensionalen Funktionen

Strategie:
Bestimme so viele notwendige Bedingungen für die gesuchten Extrempunkte, bis nur endlich viele übrig bleiben. Die müssen einzeln angesehen werden.

1-dim. Beispiel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Extremwerte?
$K := \{a; (f')^{-1}(0)\}$ Urbilder der Nullstellen der Ableitung
$f : K \to \mathbb{R}$ und K hat (nur) endlich viele Punkte

Erfolgszusage:
Man findet immer genügend viele notwendige Bedingungen dafür, dass ein Punkt p ein Maximumpunkt ist, indem man genügend viele Kurven $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to$ Def.-Bereich von f, $c(0) = p$ betrachtet.

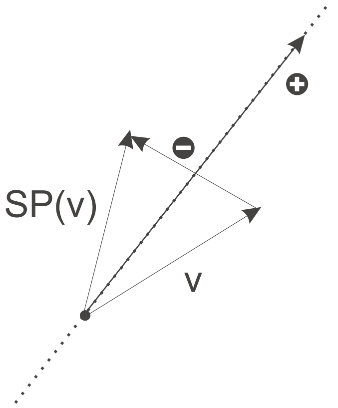
Sei $c(t) = p + \varepsilon \cdot v \qquad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$
Falls f in p ein Maximum hat so hat $(f \circ c)$ in 0 ein Maximum, d.h. $0 = ((f \circ c))^{\cdot}(0) = \langle \mathrm{grad} f(p), v \rangle$
Dies muß für jede solche Hilfskurve gelten, also für jedes $v \in \mathbb{R}^d$.
Das ist nur möglich falls $\mathrm{grad} f(p) = 0$ ist.

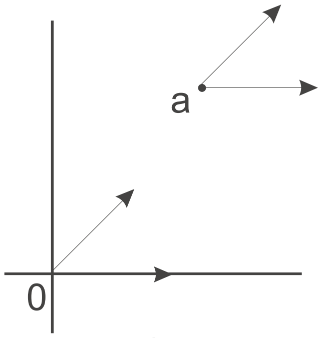


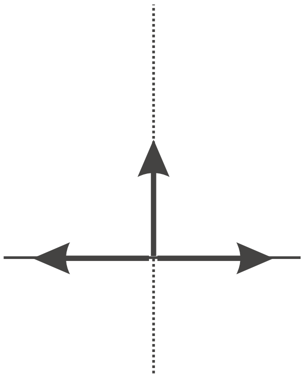
Annahme: $f(p_*) > f(\partial B)$ dann sind nur noch innere Punkte Kandidaten
Kandidaten $\Rightarrow$ $\underbrace{\mathrm{grad}\ f(p) = 0}_{\text{endlich viele Lösungen}}$ notwendig für Maximum

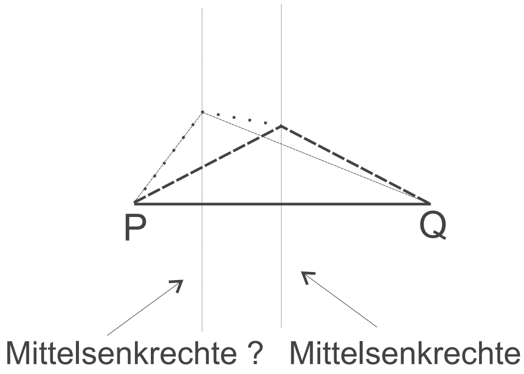
18 Geometrie

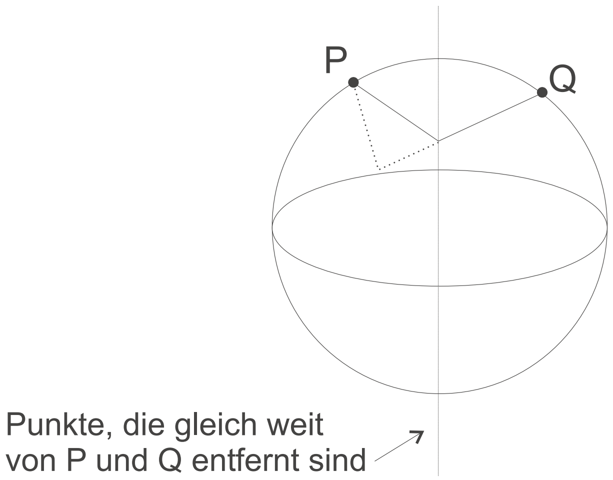
Lukas 26.6.00

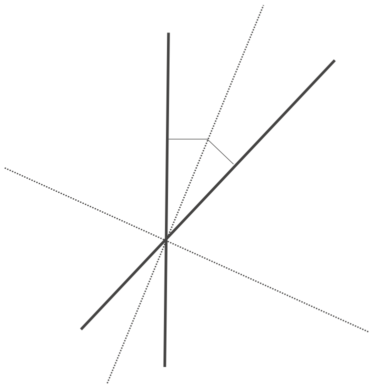


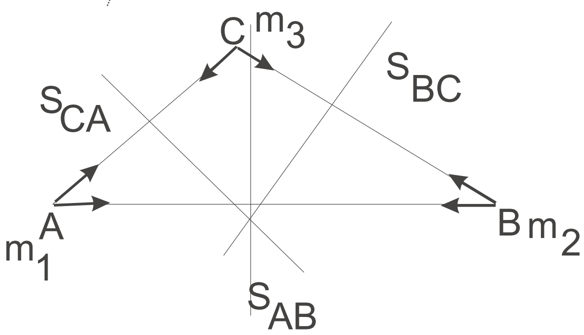


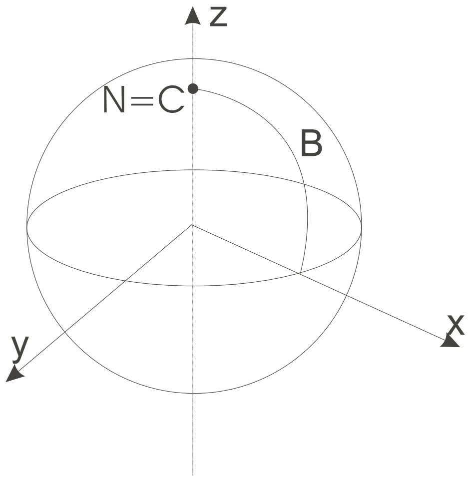


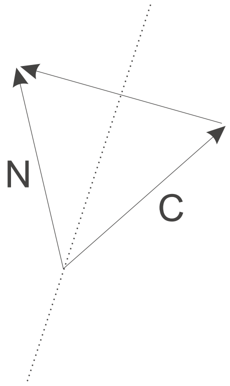



P
Q
Punkte, die gleich weit
von P und Q entfernt sind




C
m3
SBC
SCA
A
m1
B
m2
SAB





Lukas 3.7.00

Index