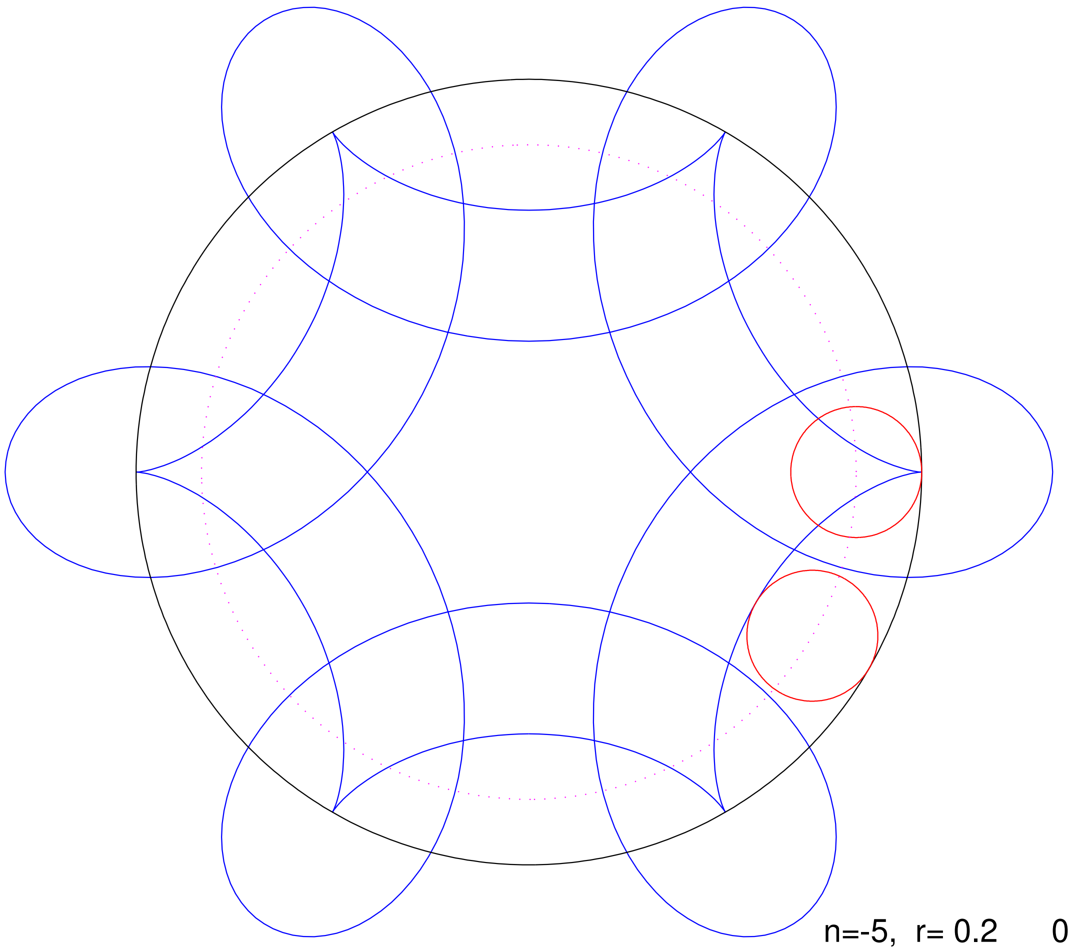
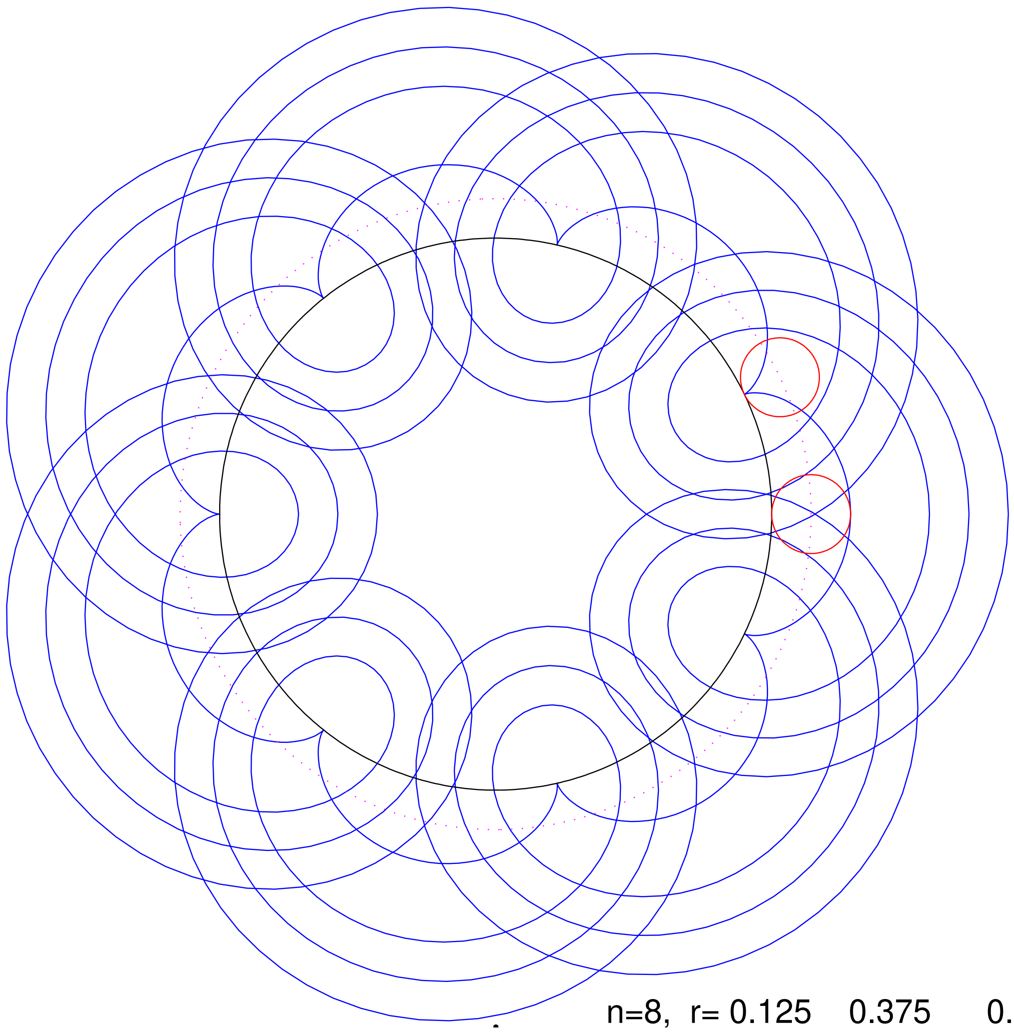
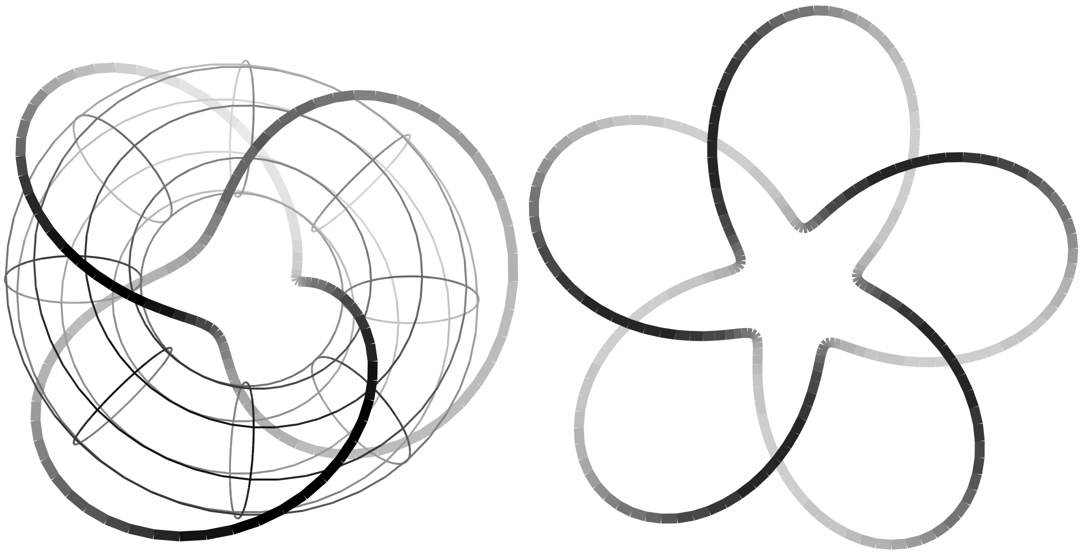


n=-5, r= 0.2   0.6

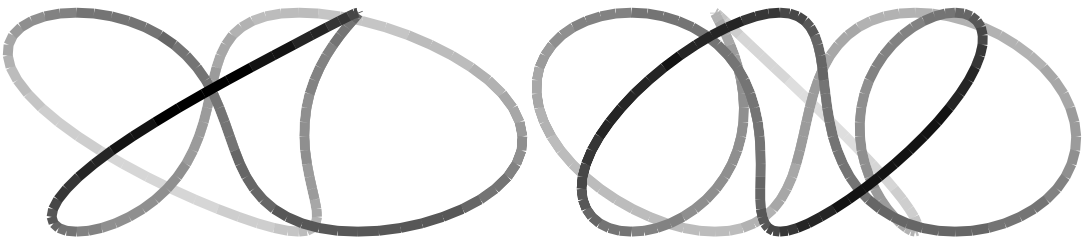
Innere und äußere Rollkurven: $\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} \cos(n\cdot\phi) \\ \sin(n\cdot\phi) \end{pmatrix}$

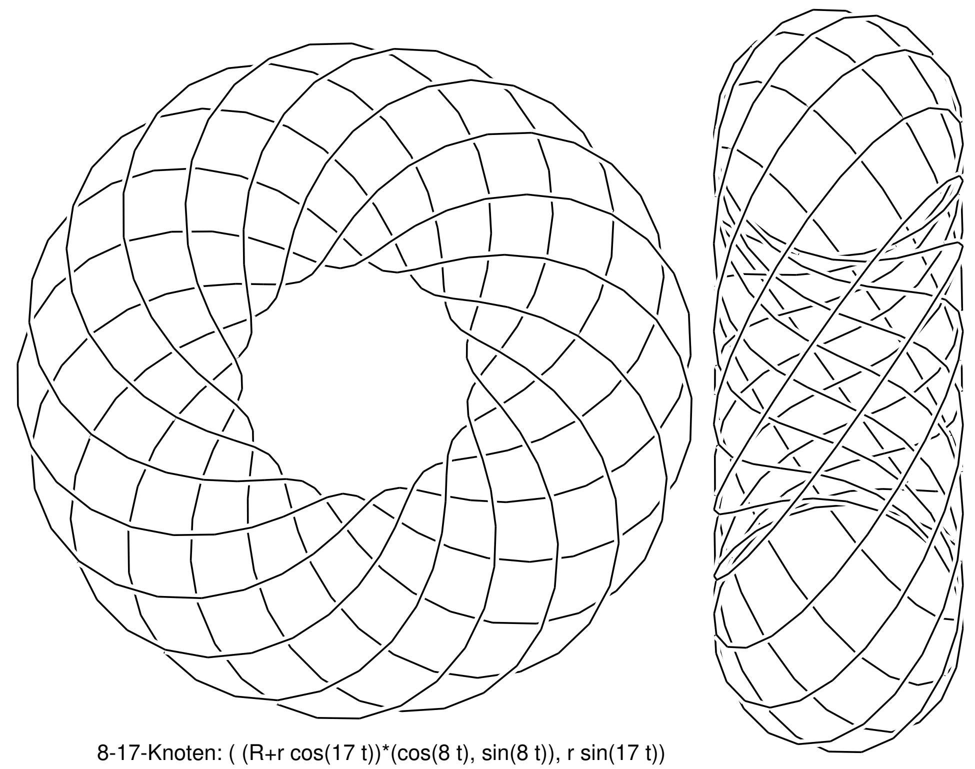


n=8, r= 0.125   0.375   0.5   0.625

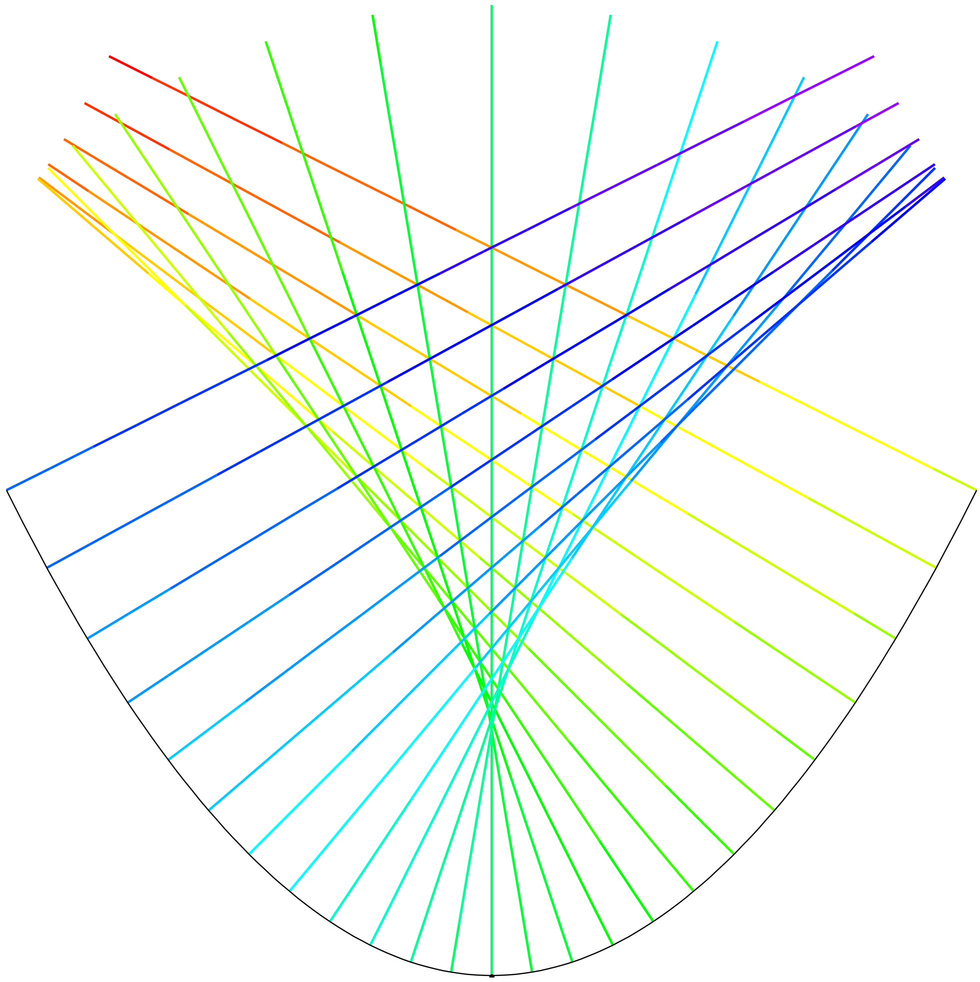


2-3-Torusknoten und 2-5-Torusknoten von oben, von vorn

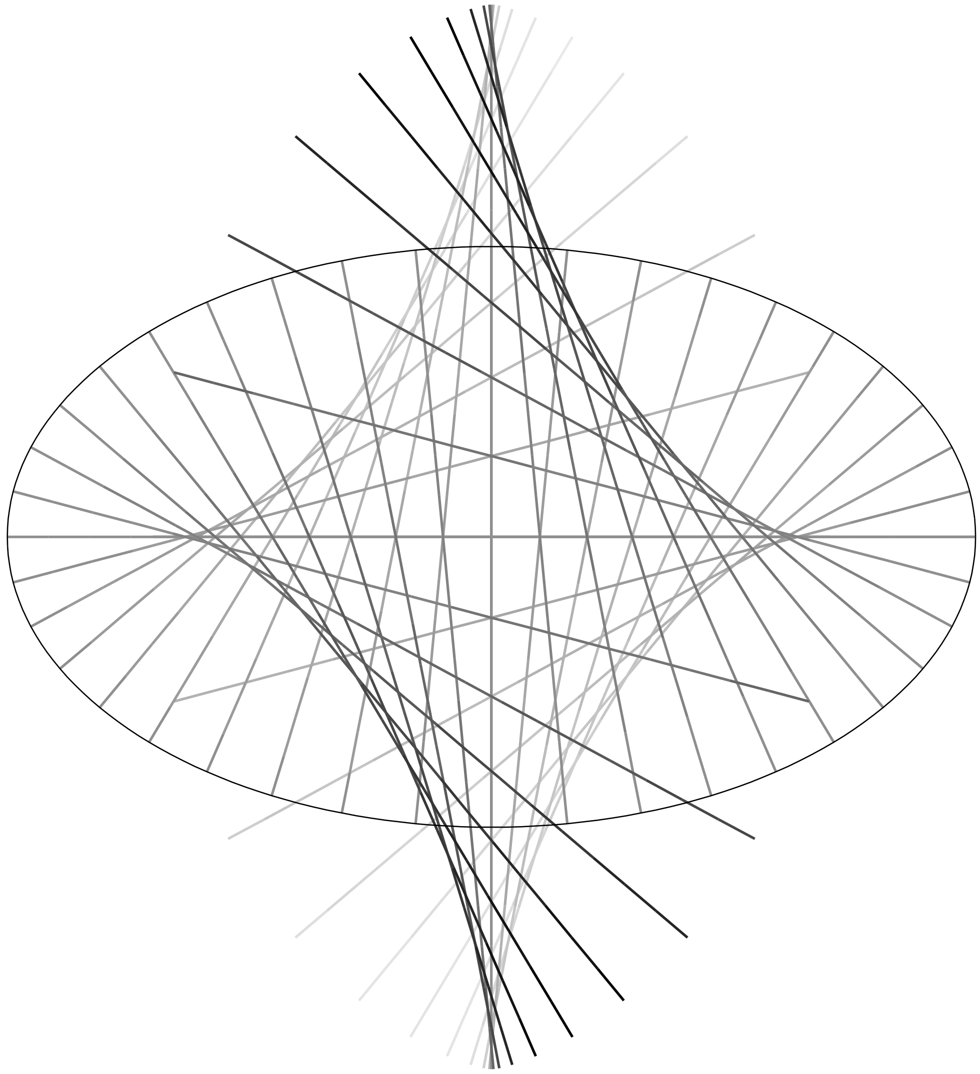


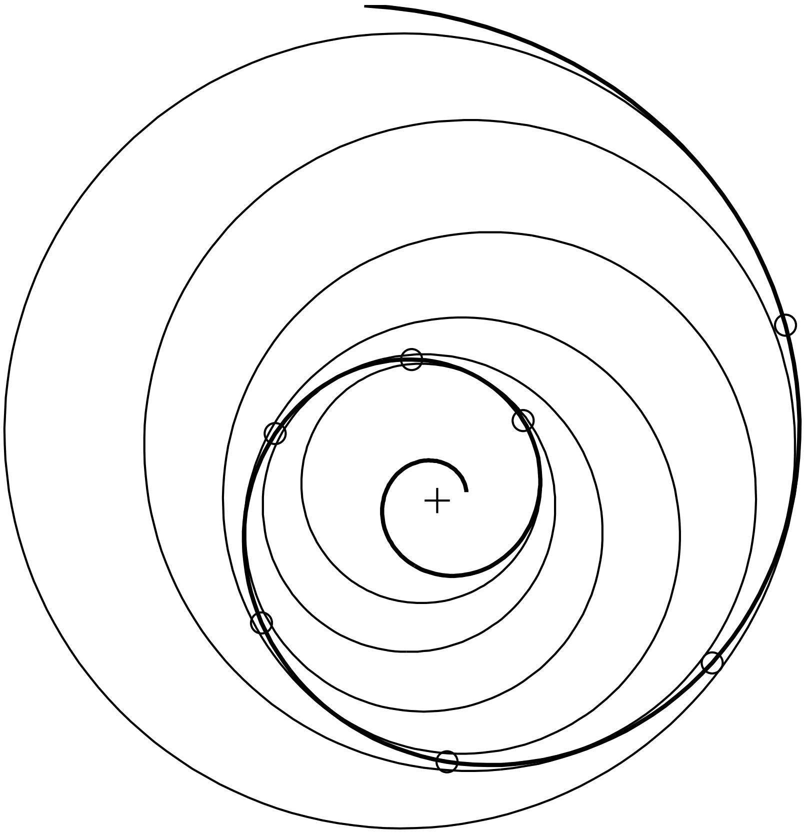


8-17-Knoten: ((R+r cos(17 t))*(cos(8 t), sin(8 t)), r sin(17 t))

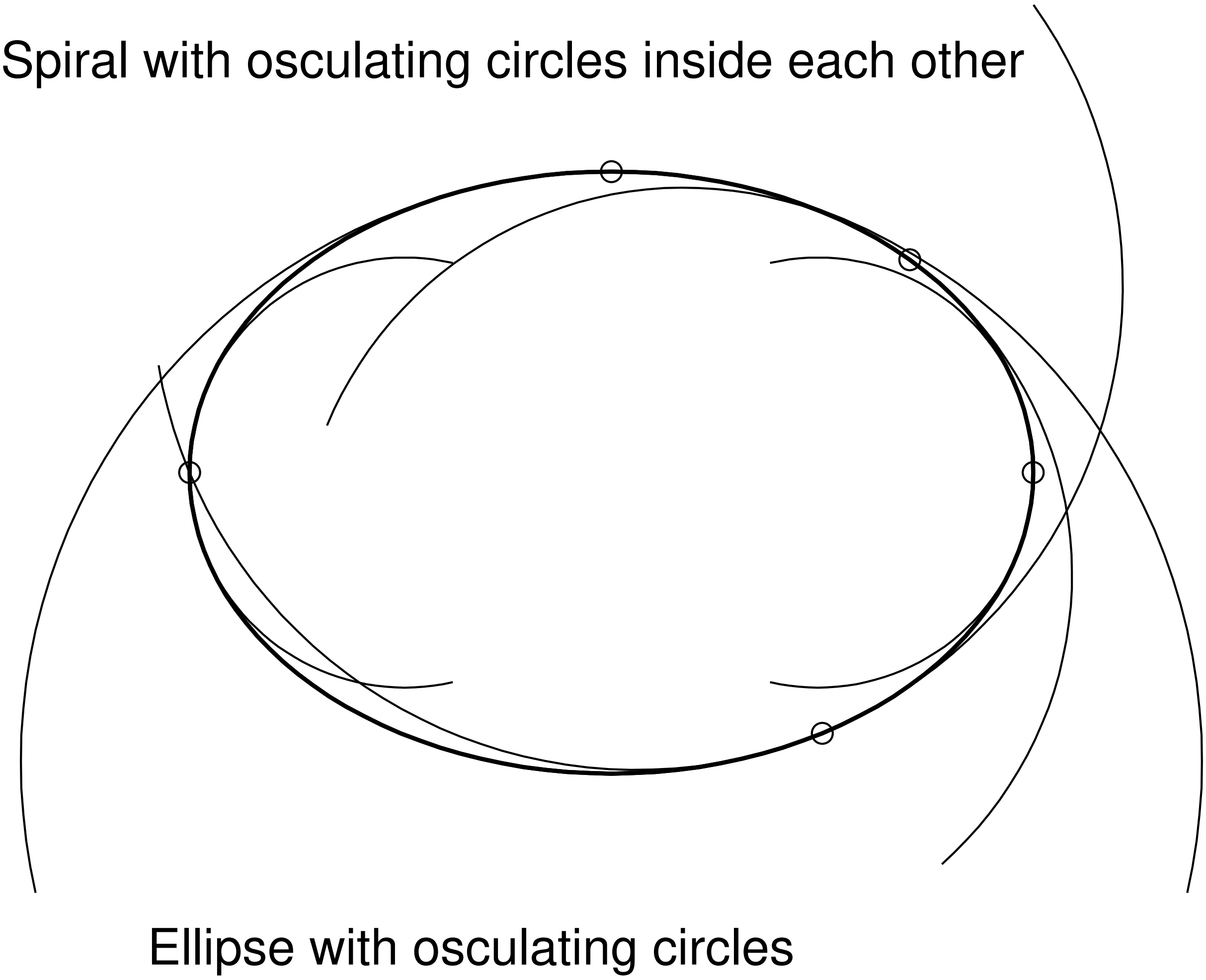


Die Normalen einer Kurve hüllen deren Evolute ein. Interpretiert man die Grauwerte der Normalen als “Höhe”, so sieht man eine Fläche, deren Konturlinie gerade die Evolute ist.



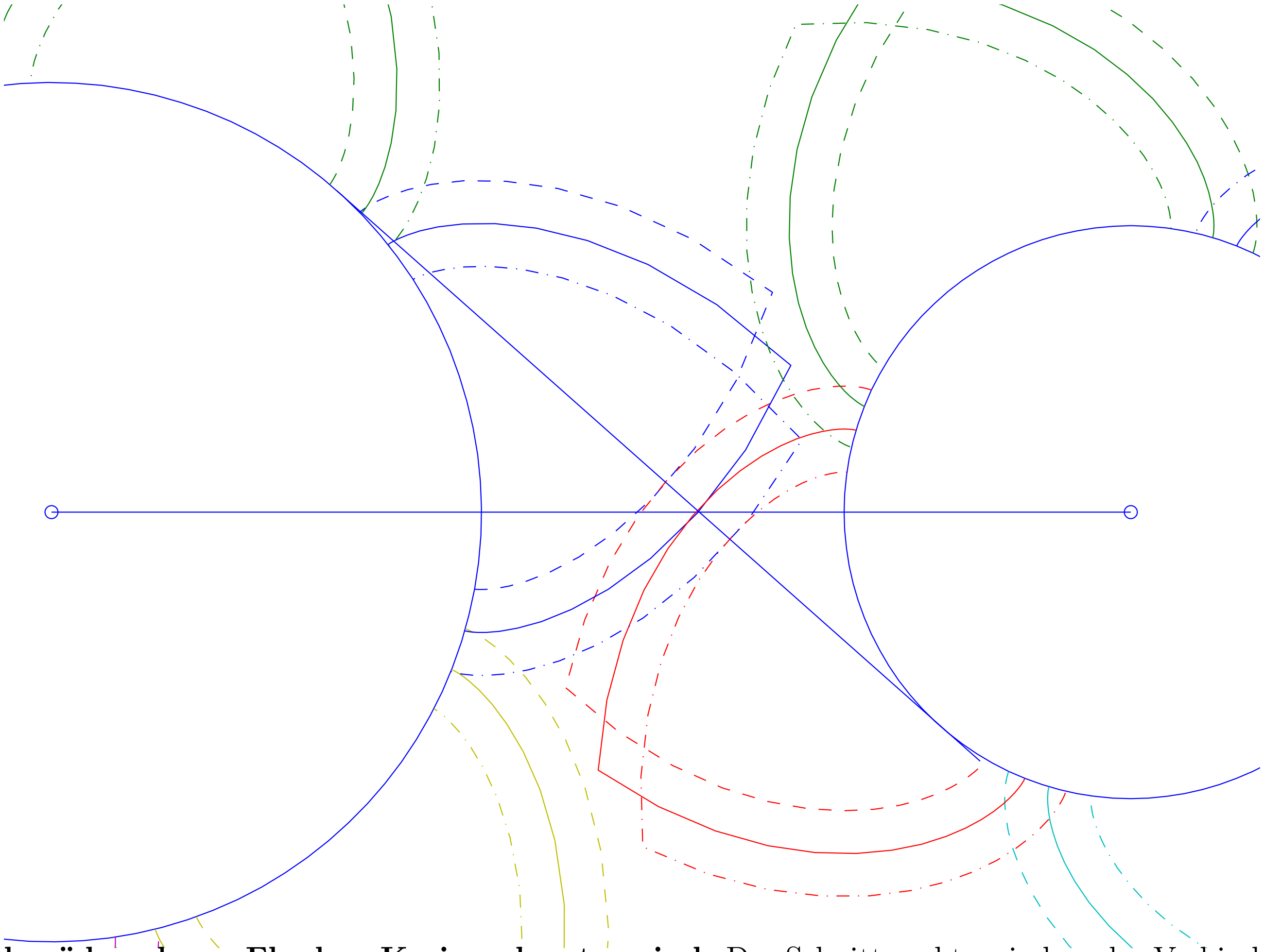


Spiral with osculating circles inside each other

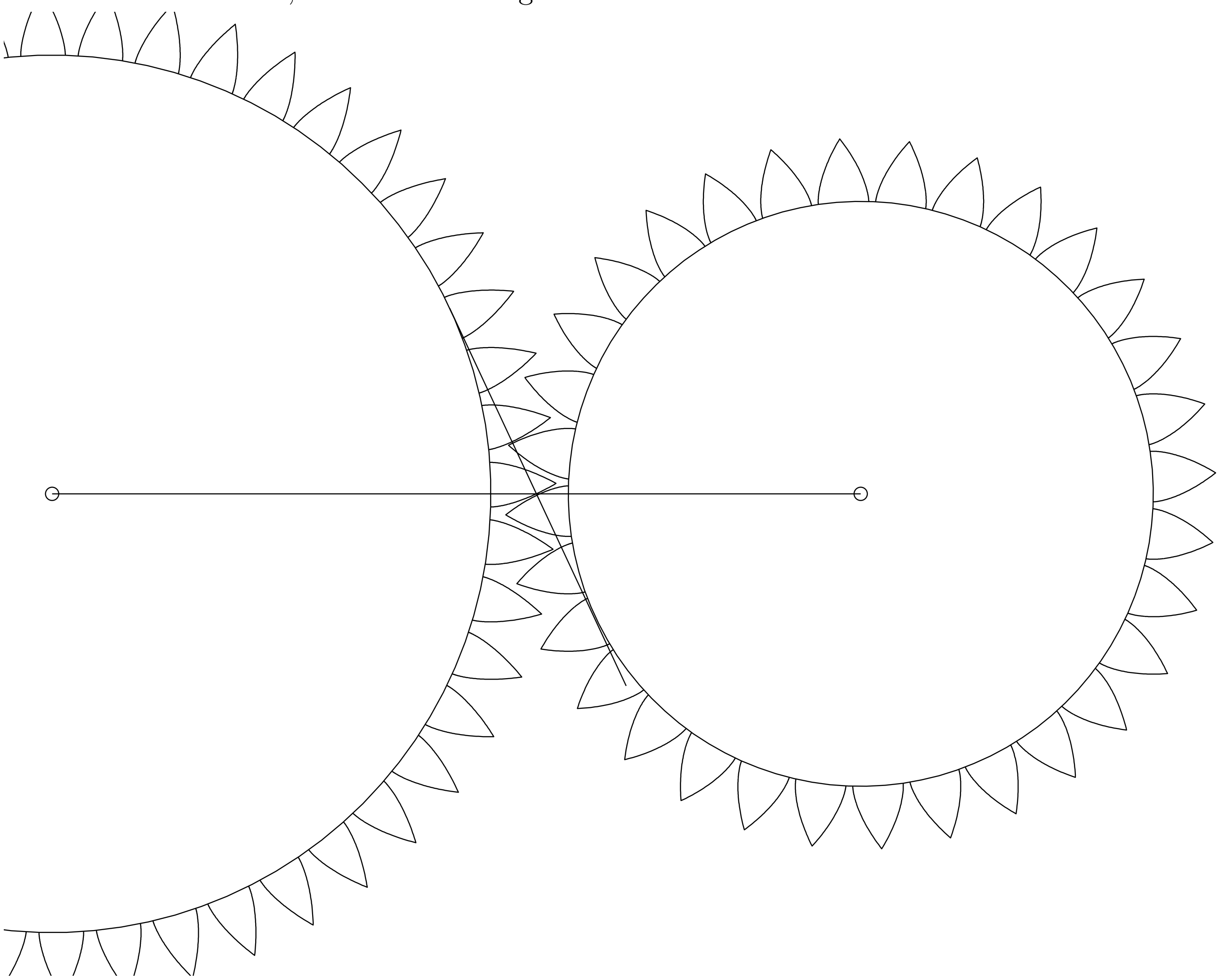


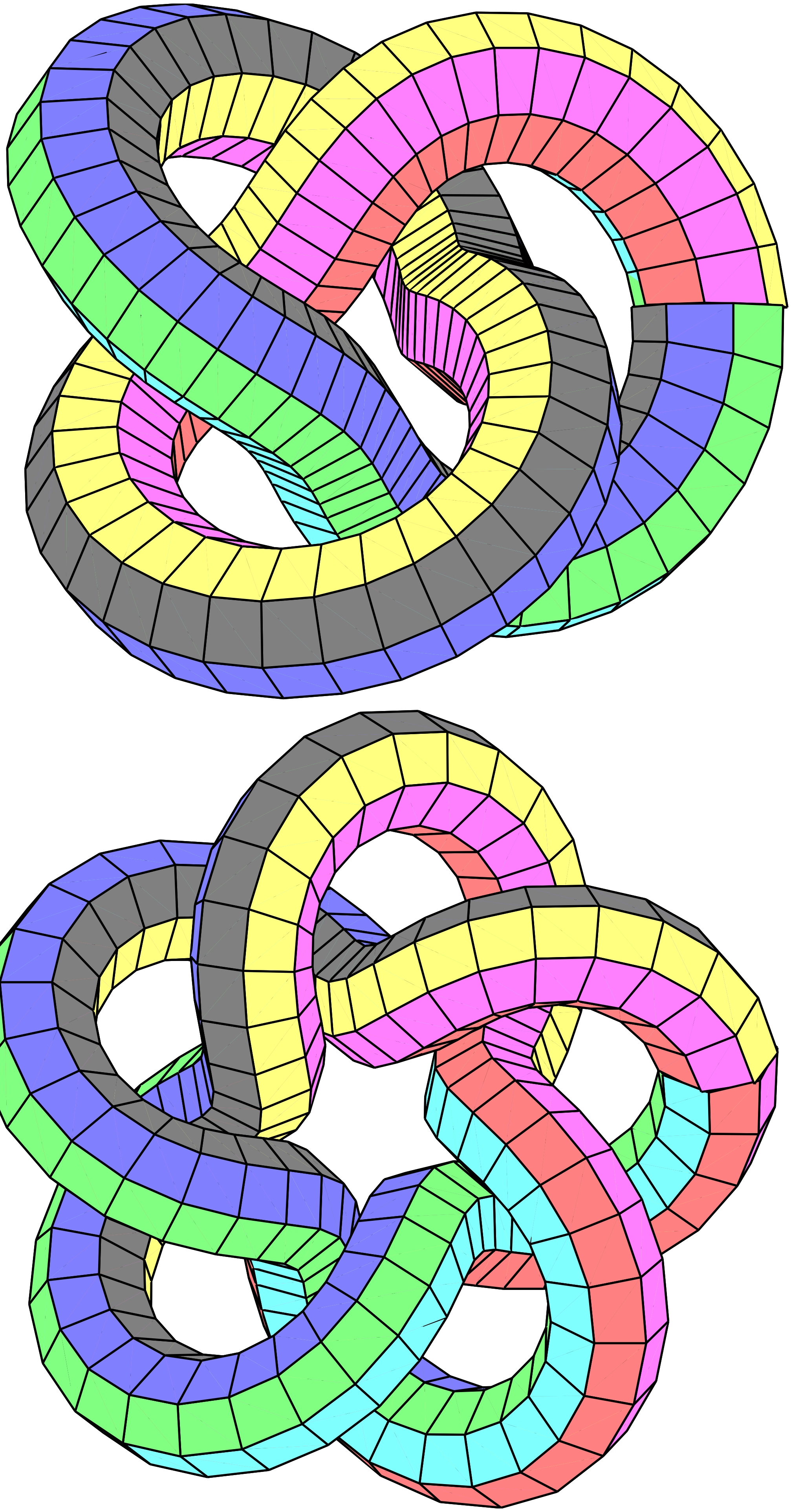
Ellipse with osculating circles

Beachten Sie, wie hervorragend die Krümmungskreise approximieren.

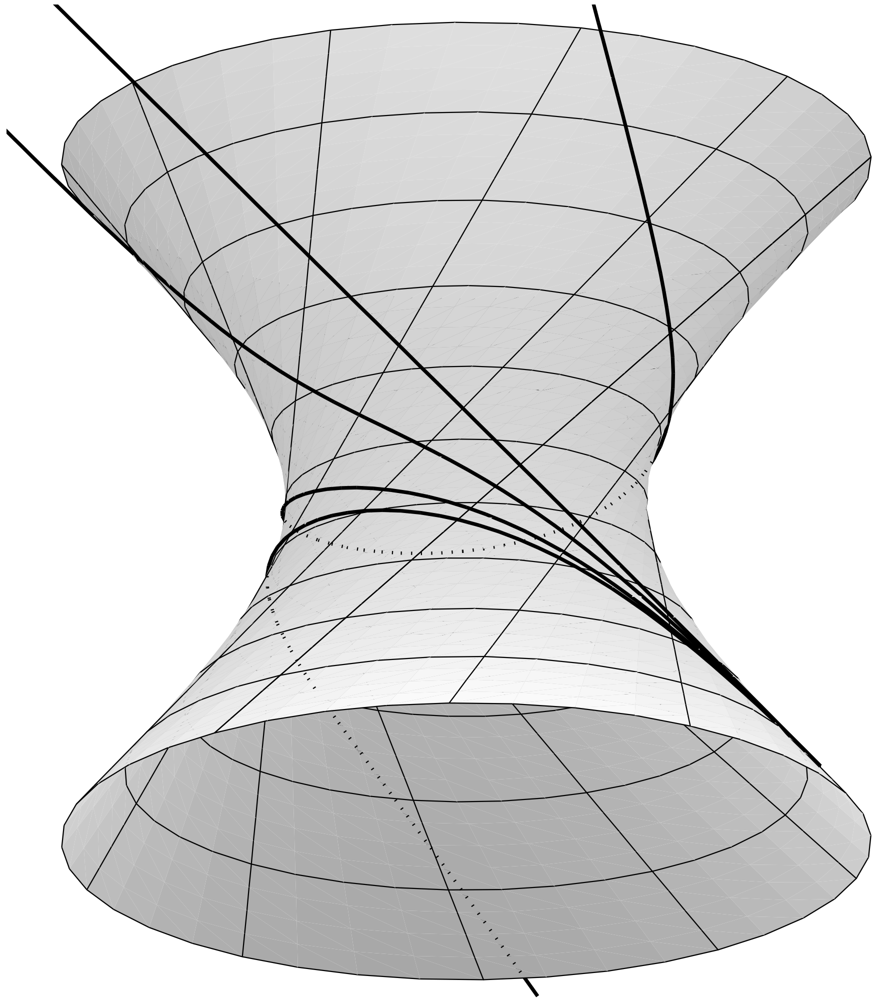


Zahnräder, deren Flanken Kreisevolventen sind. Der Schnittpunkt zwischen der Verbindung der Mittelpunkte und der Normalen der (parallelen) Zahnflanken heißt **Wälzpunkt**. Die Parallelflanken rücken so schnell vor wie auf dem Zahnkreis, wo sie senkrecht aufsetzen. Daher ist das Übersetzungsverhältnis **konstant**. — Die Zähne müssen genügend klein sein, damit der folgende Zahn schon Kontakt hat, wenn der vorhergehende herausdreht.

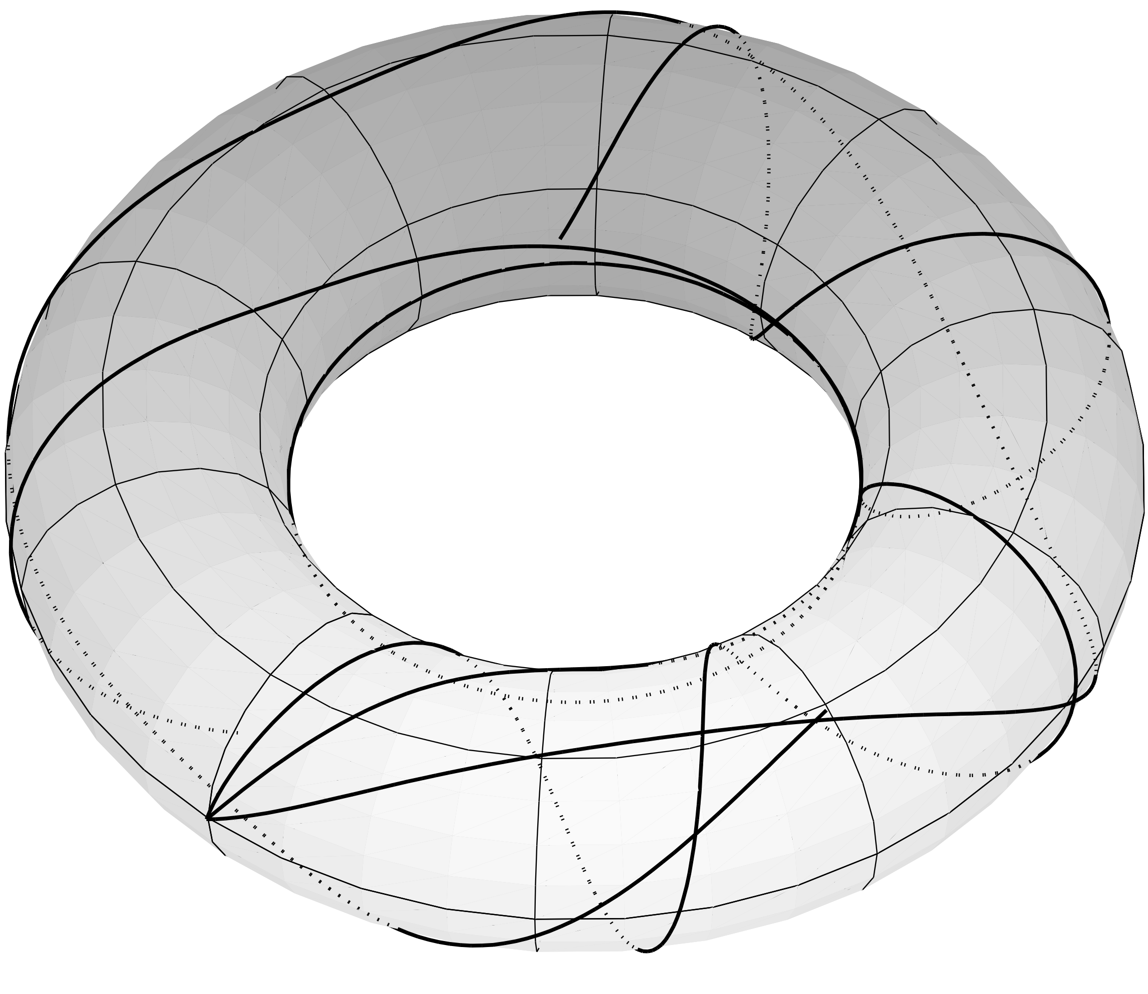


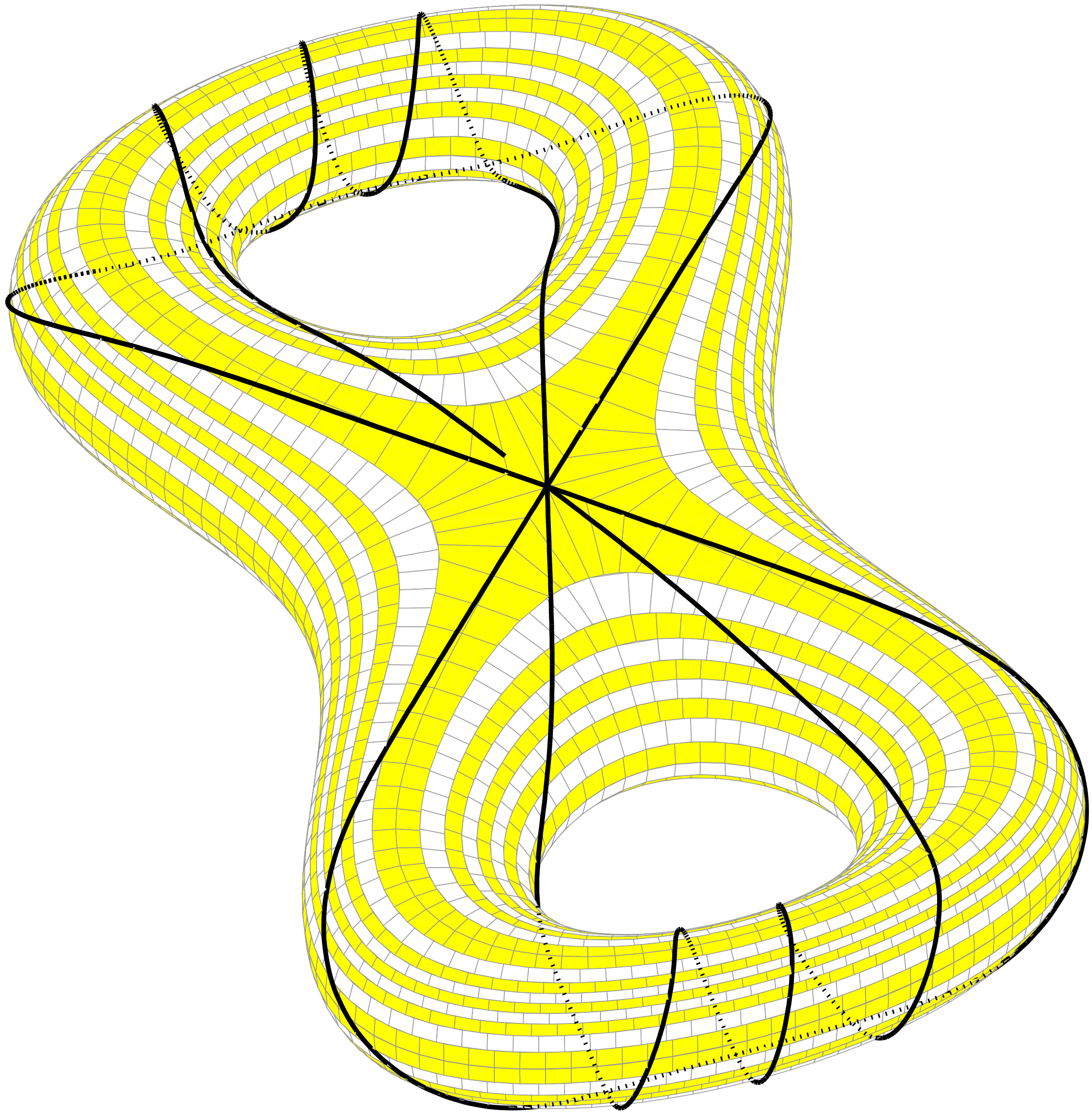


Normal tubes around torus knots. The normal planes of a space curve intersect small tubes around the curve in circles. The long parameter lines *orthogonal* to these circles are in general not closed, see both pictures.



Geodätische auf dem Hyperboloid und dem Torus. Bei steiler Anfangsrichtung laufen sie um die Torusröhre, bei flacher Anfangsrichtung oszillieren sie um den äußeren Breitenkreis.

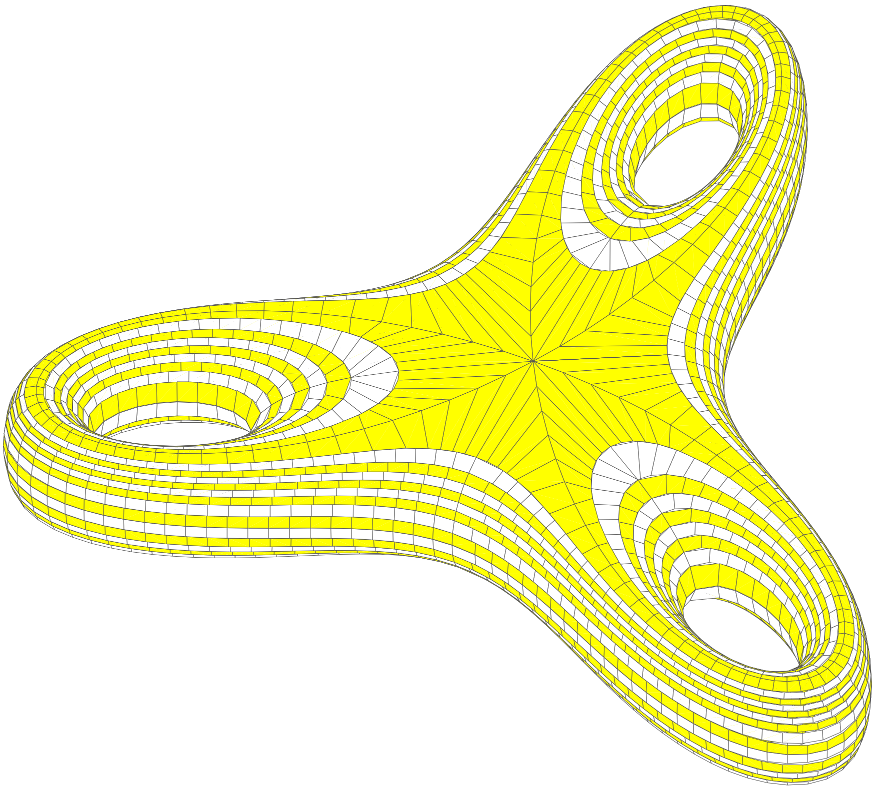




Geodätische auf einer Fläche erfüllen die Differentialgleichung $(c'')^{tang} = 0$. Auf einer Niveaufläche $h(x, y, z) = const$ heißt das: $c''(s) \sim \mathrm{gradh}|_{c(s)}$. Den Proportionalitätsfaktor findet man durch Differenzieren:
$0 = (h \circ c)''(s) = \langle \mathrm{gradh}|_c, c' \rangle'(s) = \langle \mathrm{Tgradh}|_c \cdot c', c' \rangle(s) + \langle \mathrm{gradh}|_c, c'' \rangle(s)$, also

$$c''(s) = -\langle T\mathrm{gradh}|_c \cdot c', c' \rangle(s) \cdot \mathrm{gradh}/|\mathrm{gradh}|^2(s).$$

Auf dieser Fläche vom Geschlecht 2 sind zwei (numerisch ziemlich) geschlossene Geodätische gezeichnet.
Niveaufunktionen mit vorhersehbaren Niveauflächen von höherem Geschlecht erkläre ich nächstes Mal.
Für die **Numerik** beschreibe ich einen Zeitschritt von s nach $s + ds$. Die Differentialgleichung wird abgekürzt: $c''(s) = B(c(s), c'(s))$. Aus Anfangsdaten $c(s), c'(s)$ berechne $c''(s) = B(c(s), c'(s))$ und gehe mit einem halben Zeitschritt in die "Mitte":
$cm = c(s) + c'(s) \cdot ds/2 + c''(s) \cdot ds^2/8, \quad vm = c'(s) + c''(s) \cdot ds/2.$
Berechne $bm = B(cm, vm)$.
Nach diesem Halbschritt folgt ein korrigierter Ganzschritt:
$ce = c(s) + c'(s) \cdot ds + (c''(s) + 2bm) \cdot ds^2/6, \quad ve = c'(s) + bm \cdot ds.$
Schließlich wird ce wieder auf das Niveau $h = h_0 (= h(c(s)))$ projiziert:
$c(s + ds) = ce + (h_0 - h(ce)) \cdot \mathrm{gradh(ce)}/|\mathrm{gradh(ce)}|^2$, (Newton)
dann wird ve auf die Tangentialebene projiziert und die Länge korrigiert:
$vt = ve - \langle ve, \mathrm{gradh(c(s + ds))} \rangle \cdot \mathrm{gradh}/|\mathrm{gradh}|^2, \quad \mathrm{c'(s + ds) = vt/|vt|}.$



Niveauflächen von höherem Geschlecht, veranschaulicht mit Höhenschichten. In allen drei Beispielen geht man aus von einer Kurve, letztes Mal $\cos t \cdot (1; \sin t)$, oben $\sin(3t) \cdot (\cos t; \sin t)$, und unten zwei sich kreuzenden Ellipsen. Die Flächen kann man sich als Verdickungen dieser Kurven vorstellen, als deren Knetgummi Version. Beschreibe die ausgewählten Kurven zunächst mit den Additionstheoremen durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$; in diesen drei Beispielen: $f_2(x, y) := x^2 \cdot (1 - x^2) - y^2$, $f_3(x, y) = (1 - x^2)(9 - (1 - x^2)(24 - 16(1 - x^2)))$, $f_5(x, y) = (x^2 + y^2/4 - 1) \cdot (x^2/4 + y^2 - 1)$. Schließlich wird daraus eine Funktion $F(x, y, z) := f(x, y)^2 + z^2 - const^2$ gemacht, die dargestellten Flächen sind die Niveaus $F^{-1}(0)$. Der Wert von *const* muß genügend klein sein, weil sonst die gewünschten Löcher verschwinden. – Für die Höhenstreifen wird die Differentialgleichung der Höhenlinien (numerisch) gelöst. Die Darstellung ist nicht zur allgemeinen Darstellung von Flächen geeignet, weil der Streifen um die höchste Kurve $z = const$ zu speziell an die Kurve angepaßt werden muß.