Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 13 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **24. Januar 2001**

Aufgabe 44 – Tangentenfläche einer Kurve, Rückseite: einer Schraubenlinie

Die Fläche $F(s,t) = c(t) + s\dot{c}(t)$ bezeichnen wir als *Tangentenfläche* der nach Bogenlänge parametrisierten zweimal stetig differenzierbaren Kurve c mit $\ddot{c}(t) \neq 0$.

a) Für welche (s,t) ist F regulär? Warum wohl heißt die Kurve c *Gratlinie* der Tangentenfläche? Zeigen Sie, daß die s-Linien Krümmungslinien mit Hauptkrümmung 0 sind und damit $\det S = 0$ gilt. Wie hängt das Normalenfeld N von F längs dieser Krümmungslinien mit der Frenetbasis von c zusammen?

b) Berechnen Sie die andere Hauptkrümmung aus den Frenetdaten von c. Erleichtern Sie sich die Rechnung, indem Sie die reparametrisierte Fläche $\tilde{F}(s,t) := F(s-t,t)$ betrachten. Aus welcher anderen Aufgabe folgt das Ergebnis längs jeder s-Linie bis auf eine Konstante?

c) Wie lautet die Riemannsche Metrik für $\tilde{F}$?

d) Im Falle einer ebenen Kurve c stellen die t-Linien von $\tilde{F}$ (Reparametrisierung von F) Ihnen bekannte zu c gehörende Kurven dar, welche?

Aufgabe 45 – Kommutierende ebene Vektorfelder

Die Lieklammer zweier Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$ ist stets von der Form $[X,Y] = aX + bY$, warum? Wir setzen $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Lipschitz-stetige Funktionen voraus.

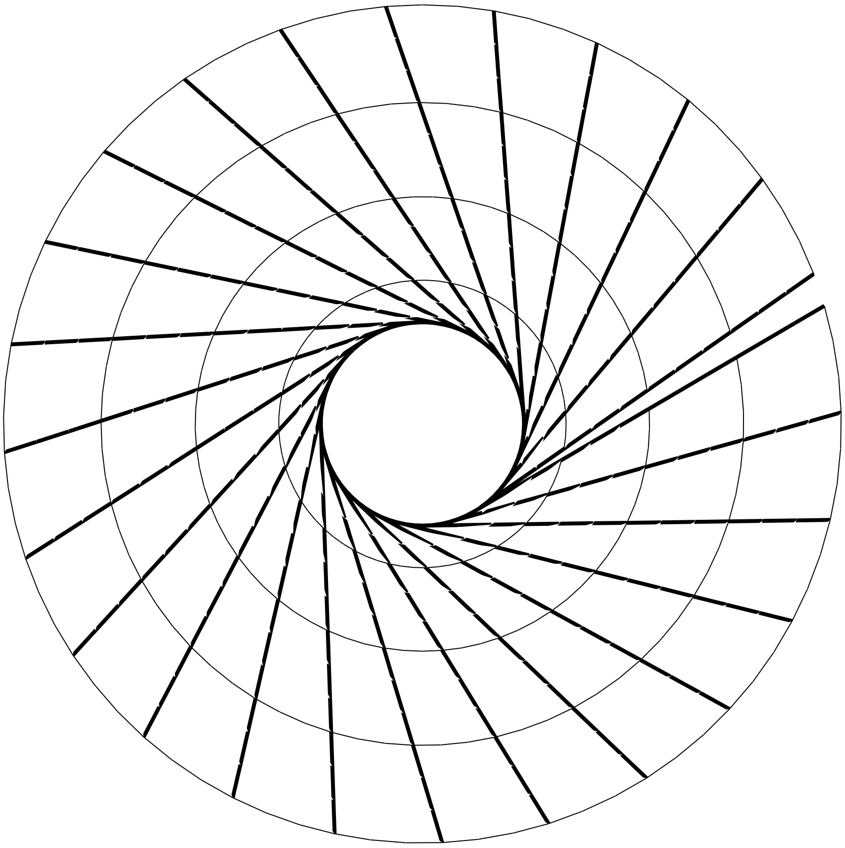
a) Wir nehmen an, daß in $p \in \mathbb{R}^2$ gilt $[X,Y]_p \neq 0$. Lösen Sie eine Differentialgleichung, um die Vektorfelder so zu reskalieren, daß sie in einer Umgebung $U(p)$ *kommutieren*; zeigen Sie also, daß es (nicht identisch verschwindende) Funktionen $f, g : U(p) \to \mathbb{R}$ gibt mit $[fX, gY] = 0$.

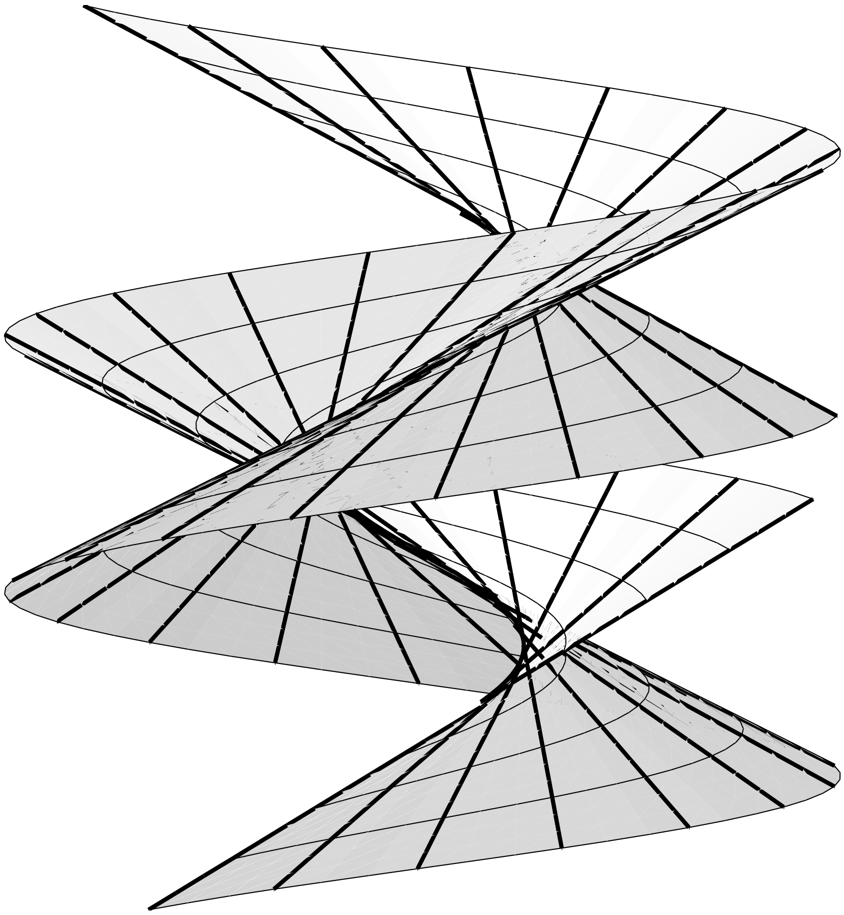
b) Kann man auch zwei gegebene Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$ so reskalieren, daß sie kommutieren?

Aufgabe 46 – Beispiel nicht-integrabler Daten für eine Fläche

Wir definieren rotationssymmetrische Daten für eine Fläche, und zwar wählen wir die Standardmetrik als vom Fußpunkt unabhängige Riemannsche Metrik $g_{r,\varphi} := \langle .,. \rangle$ und die nur vom Radius r abhängige Weingartenabbildung $S_{r,\varphi} := (1+r^2)\,\mathrm{id}$. Spezialisieren Sie die Flächengleichungen hierfür und zeigen Sie, daß diese Daten längs radialer Strahlen zu einer Fläche integriert werden können, die jedoch, außer im Aufpunkt ($r = 0$), nicht g, S als Metrik und Weingartenoperator hat.

Diese Aufgabe soll Ihnen belegen, wie das Verfahren zum Beweis von Bonnets Hauptsatz der Flächentheorie stets eine Fläche liefert; sie besitzt die gewünschten Daten allerdings nur dann, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind; diesen Existenzbeweis zeige ich noch.





Tangentenfläche der Schraubenlinie von oben und von der Seite. Im oberen Bild sieht man nur die *vorderen* Hälften der Tangenten (und etwas weniger als eine Translationsperiode); im unteren Bild sind die *hinteren* Hälften weniger schwarz, und der von diesen überstrichene Teil der Tangentenfläche ist etwas dunkler dargestellt. Längs der Schraubenlinie berühren sich der Vorwärts- und der Rückwärtsteil der Tangentenfläche.