Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 12 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **17. Januar 2001**

Aufgabe 40 – Normalenflächen mit $\det S = 0$ **von Kurven**

Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und v ein zu c normales Einheitsvektorfeld also $|v| = 1$, $\langle v, \dot{c}\rangle = 0$. Zusätzlich sei die Parallelitätsbedingung $\dot{v}(t) = a(t)\dot{c}(t)$ erfüllt. Die *v-Normalenfläche* von c sei durch $F(s,t) := c(t) + sv(t)$ definiert.

a) Für welche (s,t) ist F regulär? Zeigen Sie, daß alle s-Linien von F Krümmungslinien sind. $\det S =$? Die anderen Krümmungslinien? Bestimmen Sie $g(.,.) := \langle TF., TF.\rangle$.

b) Bestimmen Sie die Krümmungslinien mit den Ergebnissen der Aufgaben 16, 34, 37.

Aufgabe 41 – Abschätzungen für Kurven mit Krümmungsschranken

Es sei $c : [0,l] \to \mathbb{R}^n$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, deren Krümmung durch $|\kappa(t)| := |\ddot{c}(t)| \le 2K$ beschränkt sei.

a) Zeigen Sie, daß für die Bogenlänge l und die Sehnenlänge $s := |c(l) - c(0)| = \left|\int_0^l \dot{c}(t)dt\right|$ die (für kleine l interessante) Abschätzung $0 \le l - s \le Kl^2$ gilt.
Hinweis: Schreiben Sie $l = |\int_0^l c'(0)|$.

b) Welche Abschätzung gewinnen Sie aus a) für den Einheitskreis?

c) Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ und ist $v \neq 0$, $|w| = 1$, so gilt $|\sin\measuredangle(v,w)| \le |v - w|$.

d) Es sei $\varphi := \measuredangle\big(c(l) - c(0), \dot{c}(0)\big) \in (-\pi, \pi]$ der Winkel zwischen Sehne und Tangente. Zeigen Sie die für hinreichend kleine $l > 0$ gültige Abschätzung $|\varphi| \le \arcsin(Kl)$.
Hinweis: Benutzen Sie c) mit $v = \big(c(l) - c(0)\big)/l$.

Aufgabe 42 – Hyperbolische Isometrien, Drehungen um Fernpunkte

Wir betrachten die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2 \subset (\mathbb{R}^3, \langle.,.\rangle^L)$. Es seien

$$D(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S(r) := \begin{pmatrix} -\cosh r & 0 & \sinh r \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh r & 0 & \cosh r \end{pmatrix}$$

Drehung um $p = (0,0,1)$ und Spiegelung, die p mit $c(r) := (\sinh r, 0, \cosh r)$ vertauscht.

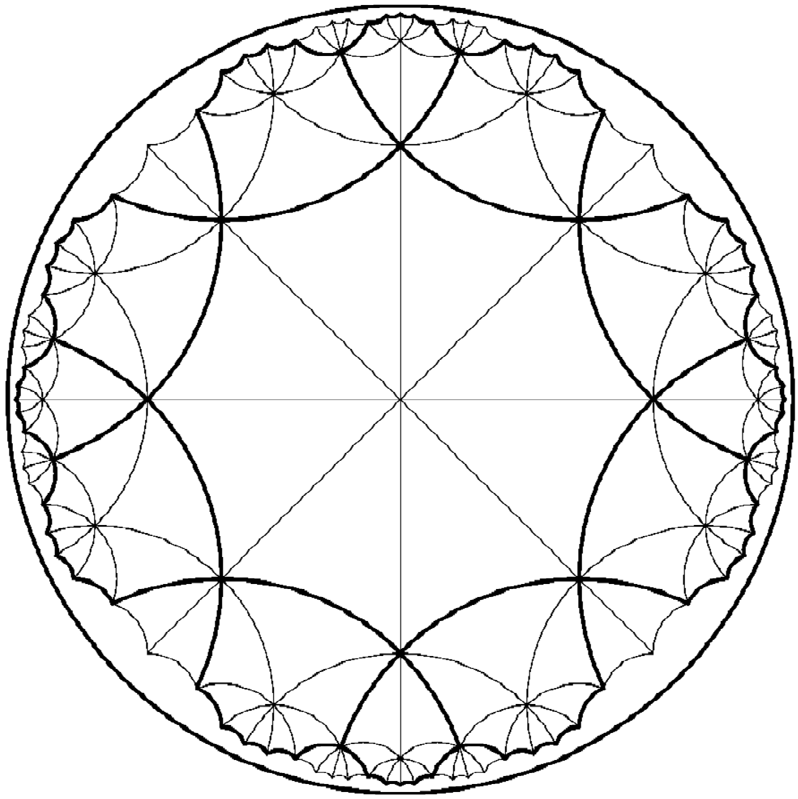
a) Berechnen Sie die Drehung $R_{r,\varphi} = S(r)D(\varphi)S^{-1}(r)$ um $c(r)$ mit Winkel φ.

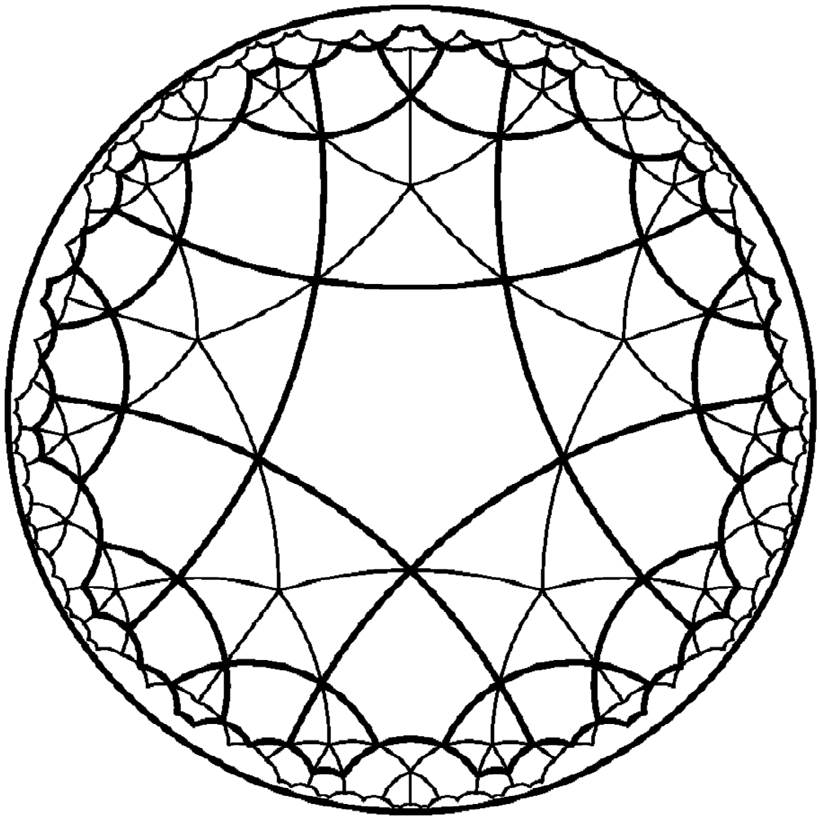
b) Bestimmen Sie $\varphi(t,r)$ so, daß die Bahnkurve $t \mapsto R_{r,\varphi(t,r)}(0,0,1)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

c) Sie können nun die Schar $P(t) = \lim_{r\to\infty} R_{r,\varphi(t,r)}$ von Lorentz-Isometrien ausrechnen. Zeigen Sie, daß die Isometrien $P(t)$ die von der Geodätischen $c(r)$ aufgespannte Ebene in $\mathbb{R}^3$ auf Ebenen abbilden, die alle die Asymptote $\mathbb{R}(1,0,1)$ des Hyperboloids enthalten. In diesem Sinne ist $P(t)$ eine Lorentz-Drehung um den *Fernpunkt* $\lim_{r\to\infty}(\sinh r, 0, \cosh r)$. Übrigens ist der entsprechende Grenzwert von Drehungen in $\mathbb{R}^2$ eine Translation.

Aufgabe 43 – Platonische Polyeder, speziell Würfel in $\mathbb{H}^3$

Betrachte im *Tangentialraum* eines Punktes $p \in \mathbb{H}^3$ ein Platonisches Polyeder mit Mittelpunkt 0; die Vektoren zu den Eckpunkten seien die Anfangsrichtungen von Geodätischen. Jede Kugel um p in $\mathbb{H}^3$ schneidet diese Geodätischen in den Ecken eines *hyperbolischen Platonischen Polyeders* mit Mittelpunkt p. Die Symmetriegruppen des euklidischen und des hyperbolischen Polyeders stimmen also überein. Die Symmetrieebenen zerlegen z.B. einen hyperbolischen Würfel W in 48 gleiche (nicht regelmäßige) hyperbolische Tetraeder. Dessen Kantenlängen sind: Inkugelradius r, Umkugelradius R; Inkreisradius ρ, halbe Kantenlänge $a/2$ und halbe Diagonale $D/2$ eines Seitenquadrates von W, schließlich die halbe Diagonale $d/2$ eines Mittenquadrates. Die Winkel der Tetraederdreiecke sind am Würfelmittelpunkt bekannt und stimmen mit denen des euklidschen Würfels überein (wieso?), daneben tauchen viele rechte Winkel auf. Berechnen Sie, als Funktionen von R, die übrigen Längen sowie die Winkel der Seiten- und Mittenquadrate.





Zwei **platonische Pflasterungen** der hyperbolischen Ebene: Im oberen Bild mit gleichseitigen 45°-Dreiecken, von denen sich acht (um eine Ecke herum) zu einem regelmäßigen Achteck zusammensetzen; im unteren Bild aus 90°-Fünfecken sowie doppelt so großen (dünner gezeichneten) 72°-Fünfecken. – Das obere Bild führt durch Identifizierung zu einer platonischen Fläche vom Geschlecht 2: Lege zwei der Achtecke übereinander und identifiziere jedes zweite Paar übereinander liegender Kanten. Danach hat man eine Sphäre mit vier paarweise gegenüber liegenden Löchern. Identifiziere jedes Löcher-Paar zu einer Sphäre mit zwei Henkeln. (*platonisch* heißt: Jede Symmetrie einer Pflasterkachel liefert eine Symmetrie der geschlossenen Fläche.)