Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 11 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **10. Januar 2001**

Aufgabe 36 – Asymptotenlinien auf Flächen im $\mathbb{R}^3$

Auf einer parametrisierten Fläche F sei eine Kurve $c = F \circ \gamma$ gegeben. Der Tangentialvektor $\dot{c}(t)$ ist *Asymptotenrichtung*, wenn die Normalkrümmung in t verschwindet, d.h. $0 = \langle \ddot{c},\, N \circ \gamma \rangle = \langle D^2 F_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}),\, N \circ \gamma \rangle = -\langle DF\,\dot{\gamma},\, DF \cdot S\dot{\gamma} \rangle = -g(\dot{\gamma}, S \cdot \dot{\gamma})$.
Gilt dies für alle t, so heißt c *Asymptotenlinie.*

a) Geraden auf Flächen sind stets Asymptotenlinien, und geodätische Asymptotenlinien sind Geraden.
b) In Punkten mit $\det S > 0$ gibt es keine Asymptotenrichtung.
c) In Punkten mit $\det S < 0$ gibt es genau zwei Asymptotenrichtungen, deren Winkelhalbierende die beiden Krümmungsrichtungen sind. Der Winkel zwischen den Asymptotenrichtungen bestimmt das Verhältnis κ_1/κ_2 der Hauptkrümmungen.

Aufgabe 37 – Schnitt zweier Flächen längs Krümmungslinien

Wir nehmen an, daß sich zwei parametrisierte Flächen F_1 und F_2 längs einer Kurve $c(t)$, $c = F_i \circ \gamma_i$ (für $i = 1{,}2$) *unter konstantem Winkel schneiden.* N_i sei ein Normaleneinheitsfeld von F_i und $\tilde{N}_i(t) := N_i \circ \gamma_i(t)$ die Einschränkung längs der Schnittkurve. Ist c nun Krümmungslinie in der einen Fläche, dann auch in der anderen. Um diesen Satz zu beweisen, zeigen Sie bitte die folgenden Schritte.

a) Die Kurve c ist genau dann Krümmungslinie auf F_i, wenn es Funktionen κ_i gibt mit $\frac{d}{dt}\tilde{N}_i(t) = \kappa_i(t)\dot{c}(t)$.
b) $\frac{d}{dt}\langle \tilde{N}_1(t),\, \tilde{N}_2(t) \rangle = 0$.
c) Zum Beweis der Behauptung zerlegen Sie $\frac{d}{dt}\tilde{N}_2$ bezüglich des Dreibeins $\{\dot{c}, \tilde{N}_1, \tilde{N}_2\}$.

Aufgabe 38 – Das Poincaré-Modell des $\mathbb{H}^n$

Es sei $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle^L = -1,\ x_0 > 0\}$ der n-dimensionale hyperbolische Raum mit der von der Lorentz-Bilinearform $\langle x, y \rangle^L := \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_0 y_0$ induzierten Metrik.

a) Wir hatten die *stereographische Projektion* St des offenen Einheitsballes B^n in der Hyperebene $\{x_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vom Punkt $(0, \dots 0, -1)$ nach H definiert durch
$$St(x) := \frac{1}{1 - \langle x, x \rangle^L} \cdot (2x; 1 + \langle x, x \rangle^L).$$
Geben Sie die Umkehrabbildung an.
b) Das Poincaré-Modell ist winkeltreu (konform): es gibt eine Funktion $\lambda : B^n \to \mathbb{R}$ mit $\langle TSt\ X, TSt\ X \rangle^L = \lambda^2(p)\langle X, X \rangle$ für $p \in B^n$ und X Tangentialvektor an B^n in p.

Aufgabe 39 – Pflasterungen der hyperbolischen Ebene

a) Es seien $0 < \alpha, \beta < \pi$, $\gamma = \pi/2$ die Winkel eines rechtwinkeligen hyperbolischen Dreiecks. Berechnen Sie die Seitenlängen und zeigen Sie, daß das Dreieck genau dann existiert, wenn $\alpha + \beta < \pi/2$. Es gibt daher für alle m, n mit $1/m + 1/n < 1/2$ ein Dreieck mit Winkeln $\alpha = \pi/m$, $\beta = \pi/n$, das die hyperbolische Ebene pflastert.
b) Betrachten Sie nun ein regelmäßiges hyperbolisches n-Eck mit Seitenlänge a und (Innen-)Winkel φ. Berechnen Sie $a(\varphi)$, sowie Inkreisradius r und Umkreisradius R, indem Sie das n-Eck in $2n$ Dreiecke zerlegen. Für welche $n, k \geq 3$ finden Sie eine Pflasterung mit n-Ecken, so daß sich k verschiedene n-Ecke in den Ecken treffen? Vergleichen Sie mit der euklidischen Situation.

Aus Band III der Gesammelten Mathematischen Abhandlungen Felix Kleins, S.126, stammt folgendes Bild eines hyperbolischen 14-Ecks. Es ist gepflastert mit kongruenten schwarzen und weißen Dreiecken mit Winkeln $\pi/2, \pi/3, \pi/7$. Die Winkel des regelmäßigen 14-Ecks sind daher $2\pi/7$. Es ist eine Identifizierung der Kanten angegeben. Auf diese Weise ensteht eine geschlossene Fläche – analog wie durch Identifizierung gegenüberliegender Kanten eines Parallelograms ein Torus entsteht. Durch Kleins Kantenidentifizierung werden jeweils sieben Ecken zu einem vollen 2π-Winkel identifiziert; die Eulerzahl der Kleinschen Fläche ist also

$$\chi := (f = 1) - (k = 7) + (e = 2) = -4.$$

(Xeroxkopie: Klein Bd III S.126)