Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 10 Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann 20. Dezember 2000

Aufgabe 32 – Geodätische auf dem Kegel

Es sei $C(\alpha) \subset \mathbb{R}^3$ ein Rotationskegel mit Öffnungswinkel 2α.

a) Bilde einen Sektor in $\mathbb{R}^2$ längentreu auf den Kegel ab ("Abwicklung") und beschreibe damit die Geodätischen auf dem Kegel (ohne den Punkt an der Spitze).

b) Wirf ein Lasso über die Kegelspitze, dessen Schlinge Länge l hat. Nimm idealisierend an, daß das Seil keine Dicke hat (und daher gewichtslos ist), daß es reibungslos auf dem Kegel gleitet (auch in der Öse); wir ziehen genau radial von der Spitze weg. Für welche Werte von α sitzt das Lasso fest, für welche rutscht es nach oben ab?

c) Betrachte in dem ebenen Sektor das Urbild eines Breitenkreises des Kegels und wähle ein paralleles Einheitsvektorfeld längs dieser Urbildkurve. Bilde dies parallele Vektorfeld mit der (Ableitung der) Abwicklung auf ein Vektorfeld längs des Breitenkreises ab. Wie groß ist der Winkel zwischen dem Anfangsvektor und dem Endvektor (gleicher Fußpunkt)? Zeige, daß die Ableitung des Vektorfeldes proportional zum Tangentialfeld des Breitenkreises ist.

Aufgabe 33 – Katenoid und Helikoid

Wir definieren zwei Flächen $K, W : \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$K(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \cosh h \cos\varphi \\ \cosh h \sin\varphi \\ h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W(\varphi, h) = \begin{pmatrix} \sinh h \sin\varphi \\ -\sinh h \cos\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

K ist injektiv auf $[0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und Rotationsfläche der Kettenlinie, weshalb die Fläche als *Kettenfläche* oder *Katenoid* bezeichnet wird. W heißt *Wendelfläche* oder *Helikoid*.

a) K und W definieren dasselbe Riemannsche Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und dieses ist winkeltreu zum Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

b) Beide Flächen haben dieselbe Normalenabbildung $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$.

c) Berechnen Sie die Weingartenabbildungen S_K und S_W und zeigen Sie $\operatorname{Spur} S_K = \operatorname{Spur} S_W$ und $\det S_K = \det S_W$. Welche Beziehung besteht zwischen S_K und S_W?

Aufgabe 34 – Krümmungslinien auf Röhren vgl. Aufgabe 16

a) Auf jeder Fläche gilt: Eine ebene nicht gerade Geodätische ist Krümmungslinie.
Betrachte nun die Röhre $F_\epsilon(t, \varphi) := c(t) + \varepsilon(\cos\varphi\, v(t) + \sin\varphi\, w(t))$ wobei $\dot c, v, w$ ein c begleitendes orthonormales Dreibein sei, das wie in Aufgabe 16 $\dot v = a\dot c$, $\dot w = b\dot c$ erfüllt.

b) Die Kreise $\varphi \mapsto F_\varepsilon(t, \varphi)$ sind Geodätische und Krümmungslinien der Röhre.

c) Warum sind die Linien $t \mapsto F_\varepsilon(t, \varphi)$ Krümmungslinien? Welchen Winkel bilden sie mit den Kreisen? Was ist ihr Krümmungsradius als Funktion von $a, b, \varepsilon, \varphi$?

d) Geben Sie *ohne weitere Rechnung* die Weingartenabbildung der Röhre an.

Aufgabe 35 – Rotationsflächen konstanter Krümmung ($\det S$ bzw. Spur S)

$F(u, \varphi) := (r(u)\cos\varphi, r(u)\sin\varphi, h(u))$ sei eine Rotationsfläche wie in Aufgabe 26. Die Relation $h'^2 = 1 - r'^2$ erlaubt es, die Weingartenabbildung S in eine Form zu bringen, die nur Ableitungen von r enthält (laut Vorlesung oder durch Rechnen).

a) Schreiben Sie $\det S = \text{const}$ und $\operatorname{Spur} S = \text{const}$ als Differentialgleichung für $r(u)$.

b) Löse die Differentialgleichung für r im Fall $\det S = 0$, skizziere die Rotationsflächen.

c) Löse die Differentialgleichung für r, falls $\det S = \pm 1$. Verstehe h gut genug, um die Meridiankurven skizzieren zu können (für jedes Vorzeichen von $\det S$ nur ein Beispiel).

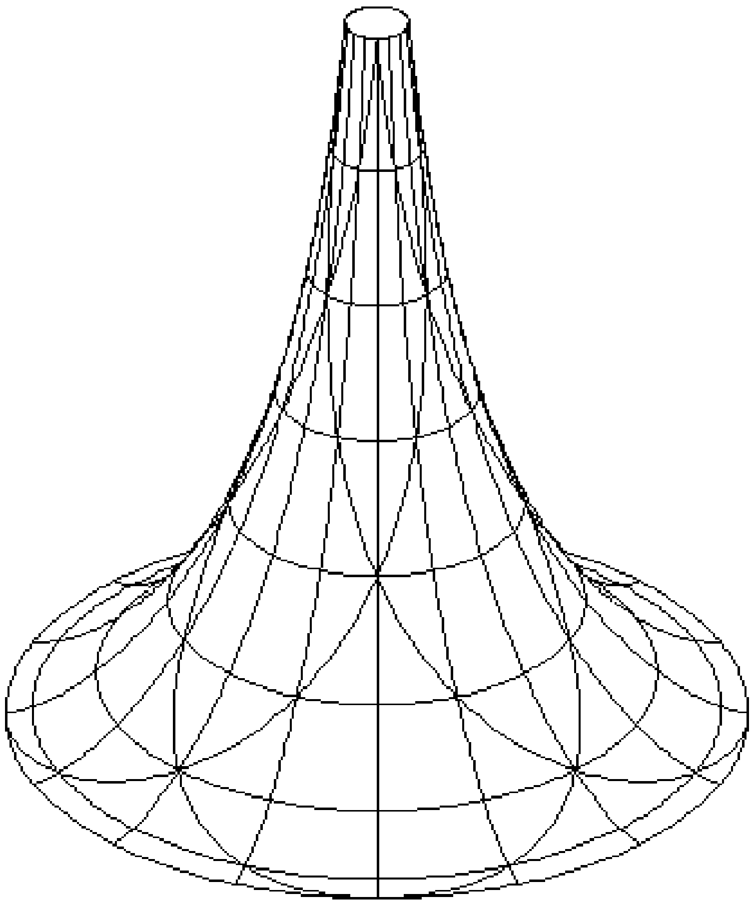

Bild der **Pseudosphäre**, Rotationsfläche mit $\det S = -1$ mit sechs *Asymptotenlinien*; diese haben die Eigenschaft, daß sie an jeder Stelle tangential sind zu einer der beiden Schnittkurven der Tangentialebene mit der Fläche. Daher gibt die Krümmung dieser Kurven dem Auge keinen Hinweis auf die Krümmung der Fläche. Sie sind daher als Parameterlinien zur Darstellung einer Fläche ungeeignet: