Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 9 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **13. Dezember 2000**

Aufgabe 29 – Riemannsche Metrik einer Fläche in Gaußscher Form
Eine Riemannsche Metrik g sei auf $U \subset \mathbb{R}^2$ in *Gaußscher Form*

$$g_{(u,v)}(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}) = X_1 Y_1 + G^2(u,v) X_2 Y_2$$

gegeben; dabei sei $G : U \to \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar. Wie wir später noch sehen werden, läßt sich jede Metrik auf hinreichend kleinen Flächenstücken in Gaußsche Form bringen.

a) Rechnen Sie mit $2g(\Gamma(X,Y), Z) = -(T_Z g)(X,Y) + (T_X g)(Y,Z) + (T_Y g)(Z,X)$ die Christoffelabbildung $\Gamma(X,Y)$ aus.
b) Die u-Parameterlinien $u \mapsto (u, \mathrm{const})$ sind geodätisch.
c) Was ist die geodätische Krümmung der v-Linien?
Hinweis. Es ist leichter, ein Einheitsnormalenfeld $n \perp \dot{c}$ zu bestimmen als die Parameterlinien nach Bogenlänge umzuparametrisieren.

Aufgabe 30 – Geodätische auf dem Rotationstorus
Gegeben sei eine Drehfläche $F(u,\varphi) = \big(r(u)\cos\varphi, r(u)\sin\varphi, h(u)\big)$ mit $r'^2 + h'^2 = 1$ und $r > 0$. Weiter sei $c(t) = (u(t), \varphi(t))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in dieser Fläche mit $r'(u(0)) < 0$ und $r(u(0))\cos\psi(0) = \lambda > 0$. Wir nehmen an, daß die Menge $\{u > u(0) \mid r(u) = \lambda\}$ nicht leer ist, und bezeichnen mit m ihr Minimum. Der entsprechende Breitenkreis sei $F \circ b$ mit $b : \varphi \mapsto (m, \varphi)$.

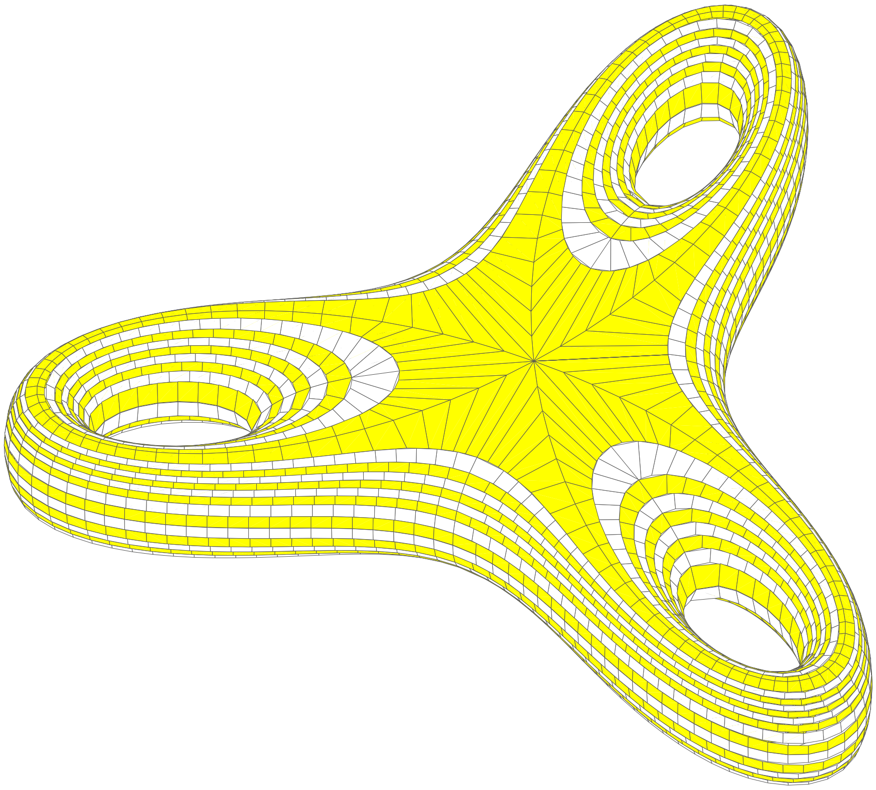
a) Zeigen Sie unter Benutzung des Satzes von Clairaut, daß $F \circ c$ dem Breitenkreis $F \circ b$ beliebig nahe kommt.
b) Falls b geodätisch ist, schneiden sich $F \circ c$ und $F \circ b$ nicht, so daß $F \circ c$ asymptotisch zum geodätischen Breitenkreis $F \circ b$ wird. Welche Eigenschaft hat der Radius eines solchen geodätischen Breitenkreises?
c) Diskutieren Sie nun die Geodätischen auf dem Rotationstorus mit $r(u) = R + \rho\cos u$, $h(u) = \rho\sin u$ für $R > \rho > 0$. Zeigen Sie, daß genau die drei auf der Rückseite von Blatt 8 angegebenen Fälle vorkommen.
d) Geben Sie eine Rotationsfläche an, für die eine Geodätische asymptotisch zu zwei verschiedenen Breitenkreisen wird (vorwärts und rückwärts).

Aufgabe 31 – Konform äquivalente Metriken und harmonische Funktionen
Zwei Riemannsche Metriken g, h auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißen *konform äquivalent*, wenn eine Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}_+$ existiert mit $g_p(X,Y) = \lambda^2(p) h_p(X,Y)$.

a) An jeder Stelle $p \in U$ stimmen die für die beiden Skalarprodukte $g|_p$ und $h|_p$ definierten Begriffe *Winkel, symmetrischer (bzw. schiefsymmetrischer) Endomorphismus* überein; Eigenwerte dagegen ändern sich, wie?

Im folgenden sei $h = \langle\, ,\, \rangle$ die Standardmetrik des $\mathbb{R}^n$ und g dazu konform äquivalent.

b) Berechnen Sie $\mathrm{grad}_g f$ aus $\mathrm{grad}_h f$. Verifizieren Sie, daß die Christoffelabbildung für g gegeben ist durch: $\lambda\,\Gamma(X,Y) = T_X\lambda\, Y + T_Y\lambda\, X - \langle X, Y\rangle \mathrm{grad}_{\langle,\rangle}\lambda$. Finden Sie die Formel für die Spur der Christoffelabbildung, $\mathrm{Spur}\,\Gamma(X,.) = \sum_i g(\Gamma(X,e_i), e_i)$, wobei e_i eine Orthonormalbasis (besser für g oder für h?) durchläuft.
c) Es sei $n = 2$; die (positive) 90°-Drehung kürzen wir zur Erinnerung an die Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$ ab mit J. Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt *g-harmonisch*, falls die Ableitung TV des Vektorfeldes $V := J \cdot \mathrm{grad}_g f$ an jeder Stelle $p \in U$ g-symmetrisch ist. Zeige: Für $g = h$ gilt $\Delta f = \mathrm{Spur}\, T\mathrm{grad} f = 0$, und: Die Definition "$f$ ist g-harmonisch" sagt für alle zu h konformen Metriken $g = \lambda^2 \cdot h$ dasselbe.



Niveauflächen von höherem Geschlecht, veranschaulicht mit Höhenschichten. In allen drei Beispielen geht man aus von einer Kurve, letztes Mal $\cos t \cdot (1; \sin t)$, oben $\sin(3t) \cdot (\cos t; \sin t)$, und unten zwei sich kreuzenden Ellipsen. Die Flächen kann man sich als Verdickungen dieser Kurven vorstellen, als deren Knetgummi Version. Beschreibe die ausgewählten Kurven zunächst mit den Additionstheoremen durch eine Gleichung $f(x,y) = 0$; in diesen drei Beispielen: $f_2(x,y) := x^2 \cdot (1-x^2) - y^2$, $f_3(x,y) = (1-x^2)(9-(1-x^2)(24-16(1-x^2)))$, $f_5(x,y) = (x^2+y^2/4-1) \cdot (x^2/4+y^2-1)$. Schließlich wird daraus eine Funktion $F(x,y,z) := f(x,y)^2 + z^2 - const^2$ gemacht, die dargestellten Flächen sind die Niveaus $F^{-1}(0)$. Der Wert von *const* muß genügend klein sein, weil sonst die gewünschten Löcher verschwinden. – Für die Höhenstreifen wird die Differentialgleichung der Höhenlinien (numerisch) gelöst. Die Darstellung ist nicht zur allgemeinen Darstellung von Flächen geeignet, weil der Streifen um die höchste Kurve $z = const$ zu speziell an die Kurve angepaßt werden muß.