Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 8 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **6. Dezember 2000**

Aufgabe 26 – Geodätische auf Rotationsflächen, wichtige Rechenübung

Eine Kurve $u \mapsto (r,h)$ in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, die nach Bogenlänge parametrisiert ist (es gilt also $r'^2 + h'^2 = 1$), definiert eine *Rotationsfläche* $f : \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ durch $f(u,\varphi) = (r(u)\cos\varphi,\, r(u)\sin\varphi,\, h(u))$.

a) Warum sind die *Meridiane* $u \mapsto f(u,\varphi)$ geodätische Linien?

b) Berechnen Sie die geodätische Krümmung der *Breitenkreise* $\varphi \mapsto f(u,\varphi)$.

c) Es sei $c(t) := (u(t), \varphi(t))$ eine Kurve im Parametergebiet. Berechnen Sie die Riemannsche Metrik $g(\binom{\dot u}{\dot\varphi}, \binom{\dot u}{\dot\varphi})$ und $\Gamma(\binom{\dot u}{\dot\varphi}, \binom{\dot u}{\dot\varphi})$ (zur Erinnerung: $Tf \cdot \Gamma := T^2 f^{\tan}$).

d) Der *vertikale Drehimpuls* einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve $c(t)$ ist durch $I_3(t) = \langle f \circ c(t) \times \frac{d}{dt}(f \circ c)(t),\ (0,0,1)\rangle = r(c(t))\cos\psi(t)$ gegeben (ψ Schnittwinkel mit Breitenkreis). Zeigen Sie den *Satz von Clairaut*: c ist Geodätische genau dann, wenn I_3 konstant ist. Schneidet eine Geodätische also *einen* Breitenkreis mit einem bekannten Winkel, so kennt man den Schnittwinkel für *jeden* Breitenkreis.

e) Folgern Sie den *Sinussatz der sphärischen Geometrie* $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$ für ein Dreieck in $\mathbb{S}^2$, dessen Winkel α, β, γ den Seiten mit Länge a, b, c gegenüberliegen. Legen Sie dazu eine Ecke des Dreiecks auf die Drehachse.

Aufgabe 27 – Geodätische in SO(n), Wiederholung

Wir definieren $\mathrm{Exp} A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (dabei sei $A^0 := \mathrm{id}$).

a) Die Reihe $\mathrm{Exp}A$ konvergiert für jedes $A \in \mathrm{End}$, so daß $\mathrm{Exp} : \mathrm{End} \to \mathrm{End}$.

Wir definieren durch $c(t) = \mathrm{Exp}\, tA := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k$ eine Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathrm{End}$.

b) Berechnen Sie $\dot c$, $\ddot c$, und zeigen Sie mit der Differentialgleichung von $\dot c$ die Identität $c(s+t) = c(s)c(t)$.

c) Für $A \in \mathrm{Skew}$ folgern Sie nun aus dem letzten Teil die folgenden Behauptungen.

(*i*) Die Kurve $c(t)$ liegt in der Drehgruppe, $\mathrm{Exp}\, tA \in \mathbf{SO}(n)$,

(*ii*) $|\dot c|$ ist konstant bezüglich der Metrik $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(A^t B)$, und

(*iii*) *neu:* c ist Geodätische in $\mathbf{SO}(n)$, d.h. Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 28 – $\mathbb{S}^3$ als Gruppe von Einheitsquaternionen und SO(3), Interpretationsübung.

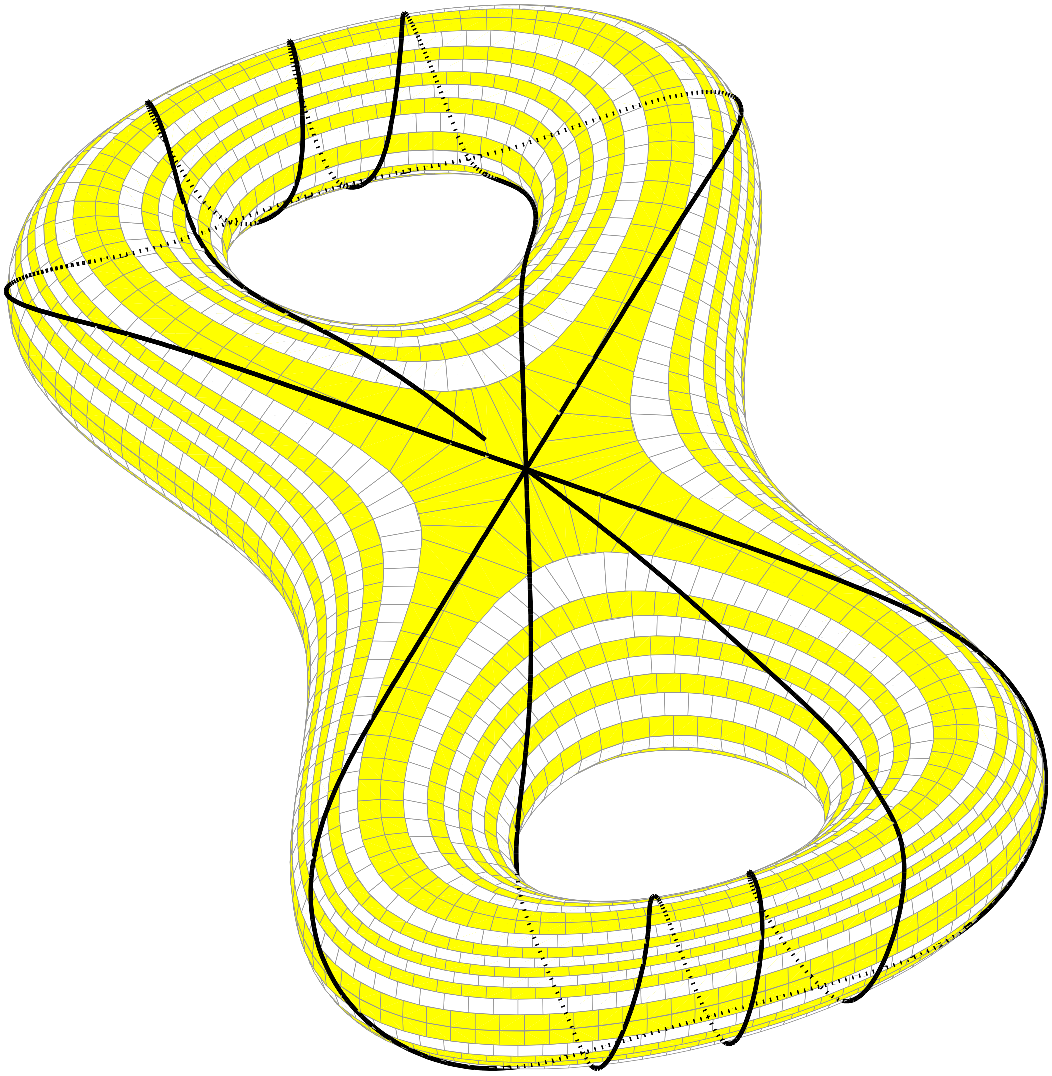
Es gibt eine nicht-kommutative Multiplikation, die $\mathbb{R}^4$ zum Schiefkörper der *Quaternionen* $\mathbb{H}$ macht. Es sei $\{1, i, j, k\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^4$. Die Multiplikation wird durch die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung der folgenden Regeln erklärt: $1u = 1$ für $u \in \{1, i, j, k\}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, sowie $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Analog zu $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ definieren wir auch eine Konjugation durch die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung von $\bar 1 = 1$ und $\bar u = -u$ für $u \in \{i, j, k\}$. Schließlich setzen wir $\mathrm{Re}\, x := (x + \bar x)/2$ und $\mathrm{Im}\, x := x - \mathrm{Re}\, x$; wir identifizieren den Imaginärteil $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$.

a) Es gilt $\overline{xy} = \bar y \bar x$ und $x\bar x = \bar x x = |x|^2$, wobei die Norm von demjenigen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ induziert wird, das $\{1, i, j, k\}$ zu einer Orthonormalbasis macht.

b) Zeigen Sie $|xy| = |x||y|$ (Teil a) benutzen) und folgern Sie, daß die *Einheitsquaternionen* $\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{H} \mid |x| = 1\}$ eine Gruppe bilden.

c) Zu $x \in \mathbb{S}^3$ definieren wir $K_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ durch $K_x(y) := xyx^{-1}$. Zeigen Sie zunächst, daß $y^2 = -|y|^2$ genau für $y \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ (also $y = \mathrm{Im}\, y$) gilt. Folgern Sie $K_x(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$. Warum ist K_x eine Isometrie von $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$?

d) Also wird durch $x \mapsto K_x$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{S}^3$ nach $\mathbf{O}(3)$ gegeben. Wieso liegt K_x sogar in $\mathbf{SO}(3)$? Warum spannt $\mathrm{Im}\, x \in \mathbb{R}^3$ die Drehachse von K_x auf (für $x \neq \pm 1$)? Wie groß ist der Drehwinkel (rechnen Sie nur $x = a + bi$, $y = j$ und argumentieren dann)? Damit ist $\mathbf{SO}(3)$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^3$.



Geodätische auf einer Fläche erfüllen die Differentialgleichung $(c'')^{tang} = 0$. Auf einer Niveaufläche $h(x,y,z) = const$ heißt das: $c''(s) \sim \mathrm{grad}h|_{c(s)}$. Den Proportionalitätsfaktor findet man durch Differenzieren:
$0 = (h \circ c)''(s) = \langle \mathrm{grad}h|_c, c' \rangle'(s) = \langle T\mathrm{grad}h|_c \cdot c', c' \rangle(s) + \langle \mathrm{grad}h|_c, c'' \rangle(s)$, also

$$c''(s) = -\langle T\mathrm{grad}h|_c \cdot c', c' \rangle(s) \cdot \mathrm{grad}h/|\mathrm{grad}h|^2(s).$$

Auf dieser Fläche vom Geschlecht 2 sind zwei (numerisch ziemlich) geschlossene Geodätische gezeichnet.
Niveaufunktionen mit vorhersehbaren Niveauflächen von höherem Geschlecht erkläre ich nächstes Mal.
Für die **Numerik** beschreibe ich einen Zeitschritt von s nach $s + ds$. Die Differentialgleichung wird abgekürzt: $c''(s) = B(c(s), c'(s))$. Aus Anfangsdaten $c(s), c'(s)$ berechne $c''(s) = B(c(s), c'(s))$ und gehe mit einem halben Zeitschritt in die "Mitte":
$cm = c(s) + c'(s) \cdot ds/2 + c''(s) \cdot ds^2/8, \quad vm = c'(s) + c''(s) \cdot ds/2.$
Berechne $bm = B(cm, vm)$.
Nach diesem Halbschritt folgt ein korrigierter Ganzschritt:
$ce = c(s) + c'(s) \cdot ds + (c''(s) + 2bm) \cdot ds^2/6, \quad ve = c'(s) + bm \cdot ds.$
Schließlich wird ce wieder auf das Niveau $h = h_0 (= h(c(s)))$ projiziert:
$c(s + ds) = ce + (h_0 - h(ce)) \cdot \mathrm{grad}h(ce)/|\mathrm{grad}h(ce)|^2$, (Newton)
dann wird ve auf die Tangentialebene projiziert und die Länge korrigiert:
$vt = ve - \langle ve, \mathrm{grad}h(c(s + ds)) \rangle \cdot \mathrm{grad}h/|\mathrm{grad}h|^2, \quad c'(s + ds) = vt/|vt|.$