Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 7 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **29. November 2000**

Aufgabe 23 – Stereographische Projektion

Wir definieren zwei Abbildungen $\mathrm{St}_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n - \{(0,\pm 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch $x \mapsto (f(x)x, \pm(f(x)-1))$ für $f(x) := 2/(1+|x|^2)$. Die Umkehrabbildung ${\mathrm{St}_\pm}^{-1}$ projiziert $\mathbb{S}^n \pm (0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von einem Pol nach $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

a) Bestimmen Sie den *Kartenwechsel* ${\mathrm{St}_-}^{-1} \circ \mathrm{St}_+ : \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$.

b) Es sei $x(t)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $T\mathrm{St}_+\dot{x}(t)$ für $\frac{d}{dt}(\mathrm{St}_+ \circ x(t))$. Bestimmen Sie $\lambda(x)$ in $\langle T\mathrm{St}_+\dot{x}(t), T\mathrm{St}_-\dot{x}(t)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \lambda(x(t))\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}$. Folgern Sie die Winkeltreue von St_+.

Aufgabe 24 – $\mathbf{O}(n)$ und Satz über implizite Funktionen

a) Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz. Wir bezeichnen die Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$ mit End, die symmetrischen Endomorphismen mit Sym und die schiefsymmetrischen mit Skew. Für $X, Y \in \mathrm{End}$ definieren wir $\langle X, Y\rangle := \mathrm{Spur}(X^tY) = \sum_{i=1}^n \langle Xe_i, Ye_i\rangle$, wobei e_i für eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ steht. Zeigen Sie, daß $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt ist, und $\mathrm{End} = \mathrm{Sym} \oplus \mathrm{Skew}$ eine orthonormale Zerlegung darstellt; welche Dimensionen haben die Summanden?

Durch $F(A) := A^tA$ wird eine Abbildung $F : \mathrm{End} \to \mathrm{Sym}$ definiert.

b) $\mathrm{Kern}(TF|_{\mathrm{id}}) = \mathrm{Skew}$ und $\mathrm{Bild}(TF|_{\mathrm{id}}) = \mathrm{Sym}$.

c) Aus welchen Endomorphismen besteht die Niveaumenge $F^{-1}(\mathrm{id})$? Wir möchten Teil b) auf diese Menge ausdehnen. Schreiben Sie dazu durch $U \in F^{-1}(\mathrm{id})$ eine differenzierbare Kurve der Form $UX(t) \in \mathrm{End}$ mit $X(0) = \mathrm{id}$ und $X(t) \in \mathrm{End}$ vor; folgern Sie $\mathrm{rang}(TF) = \dim(\mathrm{Sym})$ längs $F^{-1}(\mathrm{id})$.

d) Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um lokal die Niveaumenge $F^{-1}(\mathrm{id}) \subset \mathrm{End}$ differenzierbar zu parametrisieren. Verwenden Sie dabei den Hilfssatz. (Vielleicht hilft es Ihnen, zunächst alles in $\mathbb{R}^{n^2}$ zu betrachten?)

Aufgabe 25 – Längentreue der Veroneseabbildung

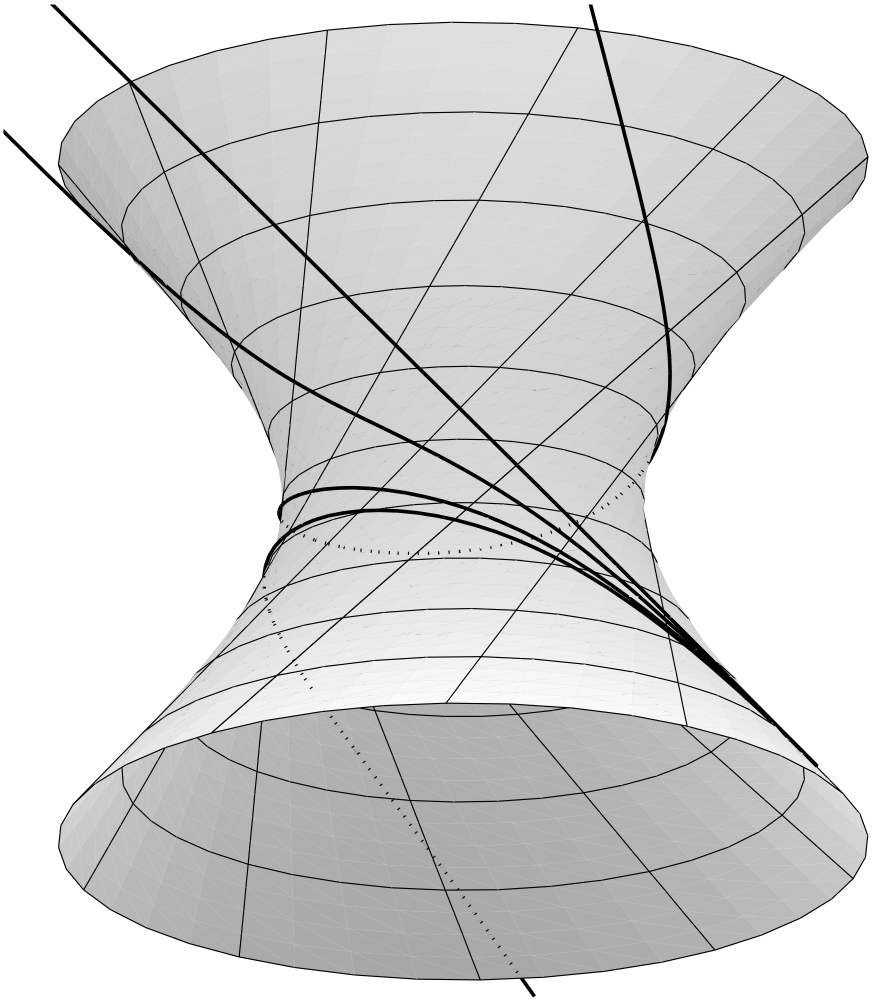
Die Isometriegruppe $G = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ von $\mathbb{S}^n$ ergibt als Bahnenraum den n-dimensionalen *projektiven Raum* $\mathbb{R}P^n$. Er besteht aus der Menge von Antipodenpunkten der Sphäre, oder aus den eindimensionalen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^{n+1}$. Durch $p_x \in \mathrm{Sym}(n+1)$, $p_x(v) := \langle v, x\rangle x$ wird auf den durch $x \in \mathbb{S}^n$ aufgespannten Unterraum projiziert.

a) Die Abbildung $V : \mathbb{R}P^n \to \mathrm{Sym}(n+1)$, $[x] \mapsto p_x$ ist wohldefiniert und injektiv.

b) Für jedes $U \in \mathbf{O}(n+1)$ gilt $p_{Ux} = U \circ p_x \circ U^{-1}$, und die Abbildung $S \mapsto \tilde{U}(S) := U \circ S \circ U^{-1}$ von $\mathrm{Sym}(n+1)$ in sich selbst ist eine Isometrie bezüglich des Skalarprodukts $\langle A, B\rangle_{\mathrm{End}} = \mathrm{Spur}(A^tB)$. Daher gibt es zu jeder Isometrie $U \in \mathbf{O}(n+1)$ von $\mathbb{R}P^n$ eine Isometrie $\tilde{U}$ von $\mathrm{Sym}(n+1)$ mit $V[U(x)] = \tilde{U}(V[x])$.

c) Es sei $x(t)$ eine C^1-Kurve in $\mathbb{S}^n$. Berechnen Sie $DV\dot{x}(t)$, und zeigen Sie, daß V eine Einbettung $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathrm{Sym}(n+1)$ ist, die bis auf eine Konstante längentreu ist, d.h. $\langle \frac{d}{dt}p_x, \frac{d}{dt}p_x\rangle_{\mathrm{End}} = \mathrm{const}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Sie heißt *Veronese-Einbettung*. Nach dem vorigen Teil wird jede Isometrie von $\mathbb{R}P^n$ auf der Einbettung durch eine Isometrie des umgebenden Raums $\mathrm{Sym}(n+1)$ realisiert.

d) Statt nach $\mathrm{Sym}(n+1)$ wollen wir nun nach $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2-1}$ einbetten. Aus $\mathrm{Sym}(n+1) \to \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ gewinnt man für das Beispiel des $\mathbb{R}P^2$ zunächst eine längentreue Abbildung $(x, y, z) \mapsto (x^2/\sqrt{2}, y^2/\sqrt{2}, z^2/\sqrt{2}, yz, xz, xy)$ in die Sphäre $\mathbb{S}^5(1/\sqrt{2})$ vom Radius $1/\sqrt{2}$. Das Bild liegt sogar in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^6$, so daß es eine isometrische Einbettung $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^4(1/\sqrt{3}) \subset \mathbb{R}^5$ gibt, für die alle Isometrien von $\mathbb{R}P^2$ durch $\mathbf{O}(5)$ repräsentiert werden. Können Sie die Zwischenschritte angeben?



Geodätische auf dem Hyperboloid und dem Torus. Bei steiler Anfangsrichtung laufen sie um die Torusröhre, bei flacher Anfangsrichtung oszillieren sie um den äußeren Breitenkreis.