# Übungen Differentialgeometrie I

**Blatt 6** **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **22. November 2000**

**Aufgabe 20** – **Einschaliges Hyperboloid als Rotationsfläche**

Es sei $c = (c_1, c_2, c_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\dot c_3 > 0$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$.

a) Wir betrachten die *Rotationsfläche*, die durch Drehung von $c$ um die $z$-Achse entsteht. Der Schnitt der Fläche mit der $x, z$-Ebene ($x > 0$) heißt *Meridiankurve.* Geben Sie die die Meridiankurve $m(t)$ an sowie eine Parametrisierung der Rotationsfläche.

b) Als Beispiel betrachten wir die Gerade $c(t) = e_2 + t(e_1 + e_3)$. Die Rotation von $c$ erzeugt eine Schar von Geraden auf der Rotationsfläche; bestimmen Sie eine weitere Schar von Geraden. Bestimmen Sie die Meridiankurve, und beschreiben Sie die Fläche auch als Niveau einer quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

**Aufgabe 21** – **Differentialgleichungen für Höhen- und Böschungslinien**

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert eine Fläche als Niveau $\{f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir setzen $\text{grad} f \neq 0$ auf der Fläche voraus.

a) Definieren Sie ein ein horizontales Vektorfeld $H$ auf $U$, das tangential an die Fläche ist. Welche Differentialgleichung beschreibt dann die *Höhenlinien* $f(x, y, \text{const.}) = 0$? Ist sie lösbar?

b) Um die *Fallinien* der Fläche analog zu beschreiben, definieren Sie ein an die Fläche tangentiales Vektorfeld $F$, das senkrecht auf $H$ steht.

c) Kurven auf einer Fläche, deren Tangente einen konstanten Winkel $90° - \alpha$ mit der Vertikalen $e_3$ einschließt, heißen *Böschungslinien.* Diese Kurven haben konstante Steigung $\tan \alpha$ und wurden früher möglichst zur Trassierung steiler Eisen- und Zahnradbahnen benutzt. Geben Sie das entsprechende Vektorfeld $B(\alpha)$ an.

d) Als Beispiel rechnen Sie bitte $f(x, y, z) = z - xy$. Wählen Sie eine geeignete Normalisierung der Vektorfelder zur Integration.

**Aufgabe 22** – **Hopf-Kreise in $\mathbb{S}^3$**

Auf $\mathbb{R}^4$ operiert $\mathbb{C}$ durch Multiplikation, wenn wir $\mathbb{R}^4$ als den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ auffassen.

a) Welche $4 \times 4$-Matrix stellt die Multiplikation mit $i$ bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (i, 0)$, $e_3 = (0, 1)$, $e_4 = (0, i)$ dar?

Wir schreiben $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R} \bmod 2\pi$ und betrachten $\mathbb{S}^3$ mit der inneren Metrik.

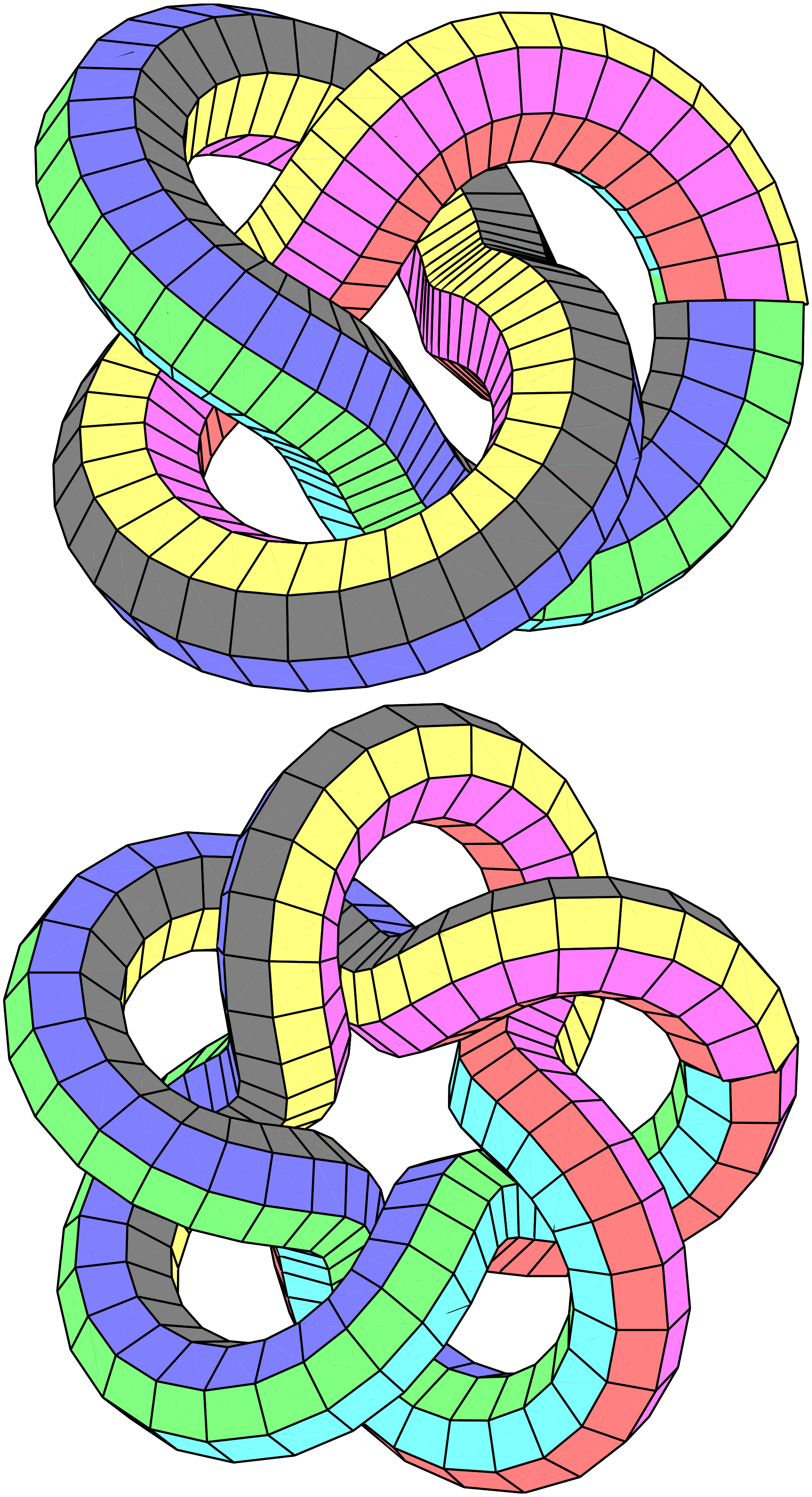
b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{S}^1$ durch die *Hopf-Operation* $\varphi * p := e^{i\varphi}p = p\cos\varphi + (ip)\sin\varphi$ isometrisch auf $\mathbb{S}^3$ operiert. Ihre Bahnen sind die *Hopf-Kreise* (oder *-Fasern*) in $\mathbb{S}^3$. Wie operiert $\varphi = \pi/2 \in \mathbb{S}^1$?

c) Betrachten Sie ein $q \in \mathbb{S}^3$, das als $\mathbb{R}^4$-Vektor senkrecht auf $p, ip \in \mathbb{S}^3$ steht. Geben Sie alle solchen $q$ an. Zeigen Sie, daß jeder Großkreis $c(s) = p\cos s + q \sin s$ von den Hopf-Kreisen $\varphi * c(s) = e^{i\varphi}(s)$ senkrecht geschnitten wird (in wievielen Punkten?).

d) Verläuft $c : I \to \mathbb{S}^3$ senkrecht zu den Hopf-Kreisen, so ist die Länge von $c$ gleich der Länge von $\varphi * c$ im Bahnenraum (mit innerer Metrik).

e) Folgern Sie aus c) und d), daß zwei Hopf-Kreise höchstens $\pi/2$ voneinander entfernt sind und es zu jedem Hopf-Kreis genau einen im Abstand $\pi/2$ gibt.

f) Beschreiben Sie die Menge der Hopf-Kreise, die von einem gegebenen Hopf-Kreis den Abstand $r \in (0, \pi/2]$ haben, als stetige Kurve. Bestimmen Sie den Umfang dieses Abstandskreises. Wie können Sie also die Menge der Bahnen als eine 2-Sphäre auffassen? (Wenn die 2-Sphäre die Bahnen isometrisch repräsentiert, welchen Radius hat sie?) Daher spricht man üblicherweise von der *Hopf-Faserung* über $\mathbb{S}^2$ mit Fasern $\mathbb{S}^1$.



**Normal tubes** around torus knots. The normal planes of a space curve intersect small tubes around the curve in circles. The long parameter lines *orthogonal* to these circles are in general not closed, see both pictures.