Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 5 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **15. November 2000**

Aufgabe 16 – Begleitende Dreibeine und Röhren

Es sei $B(t) := (\dot c(t), v(t), w(t))$ ein begleitendes orthonormales Dreibein einer regulären C^2-Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$.

a) Für kleines ε hat die *Röhre* $F_\varepsilon(t,\varphi) := c(t) + \varepsilon(\cos\varphi\, v(t) + \sin\varphi\, w(t))$ reguläre Parameterlinien $t \mapsto f_\varepsilon(t,\varphi)$ und $\varphi \mapsto f_\varepsilon(t,\varphi)$. Zeigen Sie, daß diese Linien genau dann für alle (t,φ) senkrecht aufeinander stehen, wenn die Differentialgleichungen $\dot v(t) = a(t)\dot c(t)$ und $\dot w(t) = b(t)\dot c(t)$ gelten für zwei Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$.

b) Konstruieren Sie für eine gegebene Kurve c ein begleitendes orthonormales Dreibein B, das eine Röhre mit senkrechten Parameterlinien erzeugt. Als Ansatz wählen Sie dazu v, w beliebig und erfüllen dann durch Basiswechsel die Differentialgleichungen.

Aufgabe 17 – Eingebettete Tori in $\mathbb{R}^3$ und Satz des Pythagoras

Der Standardtorus $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ wird durch

$$F_{r,R}(s,t) := \begin{pmatrix} (R + r\cos s)\cos t \\ (R + r\cos s)\sin t \\ r\sin s \end{pmatrix}$$

für $R > r > 0$ nach $\mathbb{R}^3$ abgebildet.

a) Zeigen Sie daß die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ disjunkt sind. Welche Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ ist das Bild der Schar $(r,s,t) \mapsto F_{r,\sqrt{1+r^2}}(s,t)$ für $r > 0$, $s,t \in T^2$? (Siehe auch die nächste Frage)

b) Prüfen Sie nach, daß die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ Niveauflächen $\{f = R^2\}$ der außerhalb der z-Achse definierten Funktion $f(x,y,z) := (x^2+y^2+z^2+1)^2/(4(x^2+y^2))$ sind. Berechnen Sie, wo $\operatorname{grad} f \neq 0$ ist; gehen Tori durch diese Punkte?

c) Die Sphären $\{x^2 + y^2 + (z-m)^2 = 1 + m^2\}$ enthalten den Einheitskreis in der x,y-Ebene. Warum werden die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ von diesen Sphären senkrecht geschnitten?

d) Wir betrachten für eine beliebige Banachraum-Metrik d auf $\mathbb{R}^3$ die induzierte Metrik auf $F_{r,R}(T^2)$ oder direkt auf T^2. Warum lassen sich je zwei Punkte durch eine Kürzeste verbinden?

e) Warum sind die folgenden drei Metriken auf T^2 äquivalent: (i) die von $\mathbb{R}^3$ über F induzierte Metrik, (ii) die zur induzierten Metrik gehörende innere Metrik, sowie (iii) $d((s,t),(\sigma,\tau)) := |(s-\sigma) \bmod 2\pi| + |(t-\tau) \bmod 2\pi|$?

Aufgabe 18 – Bahnen von Isometrien

Die orientierungstreuen Isometrien der Ebene $(A,a) \in \mathbf{SO}(2)\times\mathbb{R}^2$ operieren auf $\mathbb{R}^4$ durch $(A,a) * (x,y) := (Ax + a, Ay + a)$, für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

a) Beschreiben Sie die Bahnen als eine *Quadrik* in $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, d.h. als Niveaufläche einer quadratischen Funktion.

b) Die Operation ist isometrisch in $\mathbb{R}^4$ (bezüglich einer geeignet zu wählenden Metrik).

c) Bestimmen Sie den Abstand zweier Bahnen.

d) Wie kann man die Menge aller Bahnen beschreiben?

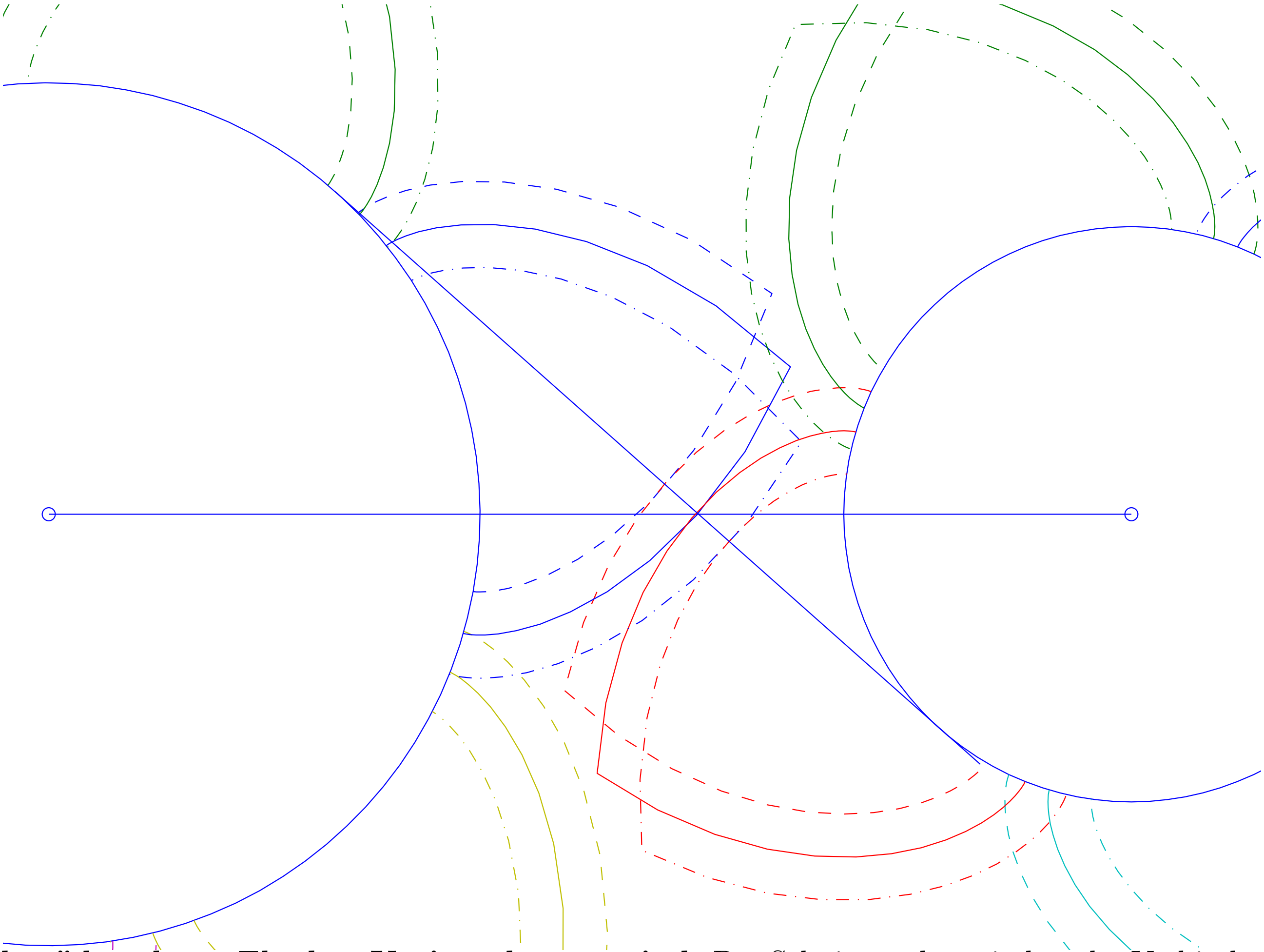
Aufgabe 19 – Zahnräder

Auf der Rückseite sind Kreisevolventen-Zahnräder skizziert. Im letzten Jahrhundert wurden für schwere Maschinen Zahnräder eingesetzt, die konstante Winkelgeschwindigkeit erhalten; solche Zahnräder vermeiden Schwingungen. Eine andere Anforderung stellt man an Zahnräder von Uhren: ihre Flanken sollen ohne Rutschen aneinander abrollen, um den Verschleiß klein zu halten.

a) Zeigen Sie: für Kreisevolventen-Zahnräder ist das Übersetzungsverhältnis $\omega_1 : \omega_2$ zeitlich konstant, und zwar ist es $R_2 : R_1$.

b) Mit welcher (veränderlichen) Geschwindigkeit rutschen die Flanken aufeinander?

c) Falls die Flanken sich so gleichmäßig abnutzen, daß sie Evolventen bleiben, kann man dann durch Änderung des Achsabstandes die Zahnräder nachjustieren?



Zahnräder, deren Flanken Kreisevolventen sind. Der Schnittpunkt zwischen der Verbindung der Mittelpunkte und der Normalen der (parallelen) Zahnflanken heißt **Wälzpunkt**. Die Parallelflanken rücken so schnell vor wie auf dem Zahnkreis, wo sie senkrecht aufsetzen. Daher ist das Übersetzungsverhältnis **konstant**. — Die Zähne müssen genügend klein sein, damit der folgende Zahn schon Kontakt hat, wenn der vorhergehende herausdreht.