Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 4 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **8. November 2000**

Aufgabe 12 – Frenet-Theorie

Es sei $c(t)$ eine Kurve mit Krümmung $\kappa(t)$ und Torsion $\tau(t)$.

a) Falls $\tau(t) = 0$, aber $\kappa \neq 0$, so ist c eine *ebene* Kurve, d.h. es gibt einen konstanten Vektor v mit $\langle v, c(t) - c(0) \rangle = 0$.

b) Falls $\kappa(t) \neq 0$ und $\tau(t)/\kappa(t) = \cot \alpha$ für ein festes $\alpha \neq 0$, so ist c eine *Böschungslinie*. Das heißt, es gibt einen (vertikalen) Vektor v mit $\langle \dot{c}(t), v \rangle = \sin \alpha$.

Aufgabe 13 – Parallele Kurven

Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve und $n(t) = \mathrm{Rot}(90°)\dot{c}(t)$ ihr Einheitsnormalenfeld. Wir definieren die *Parallelkurvenschar* $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}^2$ durch $(s, t) \mapsto c(t) + sn(t)$.

a) Charakterisieren Sie die *kritischen Punkte* von f – das sind diejenigen Punkte (s, t), in denen $df(s, t)$ nicht den Höchstrang 2 hat – durch die Krümmung $k(t)$ der Kurve c. Welche Kurve beschreiben deren Bilder (die *kritischen Werte* von f)?

b) Es sei $c_\varepsilon(t) = f(\varepsilon, t)$ die *Parallelkurve* von c im Abstand ε. Bestimmen Sie die Krümmungsradien $1/\kappa_\varepsilon$ von c_ε und zeigen Sie, daß alle Kurven c_ε dieselbe Evolute besitzen.

Aufgabe 14 – Evolventen

Evolventen einer nach der Bogenlänge parametrisierten regulären ebenen Kurve c sind die Kurven $c_\alpha(t) := c(t) - (t - \alpha)\dot{c}(t)$. Diese Kurven beschreiben die Bahn des freien Endpunkts eines undehnbaren, straff gespannten Fadens beim Abwickeln von c.

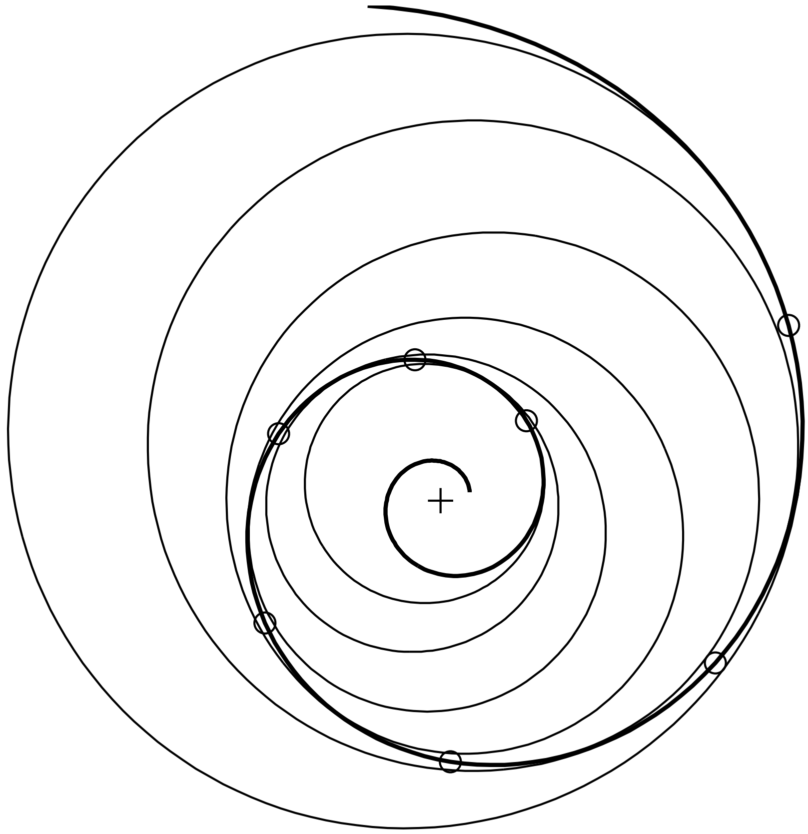
a) Zeigen Sie, daß zwei Evolventen c_α und c_β parallel sind und alle Evoluten die Ausgangskurve c ergeben.

b) Geben Sie die Evolventen c_α des Einheitskreises $(\cos t, \sin t)$ explizit an, und berechnen Sie den Krümmungsradius $1/\kappa_\alpha$ von c_α; wo ist die Krümmung definiert? Skizzieren Sie zwei Kreisevolventen.
Hinweis: In einer späteren Aufgabe werden wir Kreisevolventen zur Beschreibung von Zahnrädern benutzen.

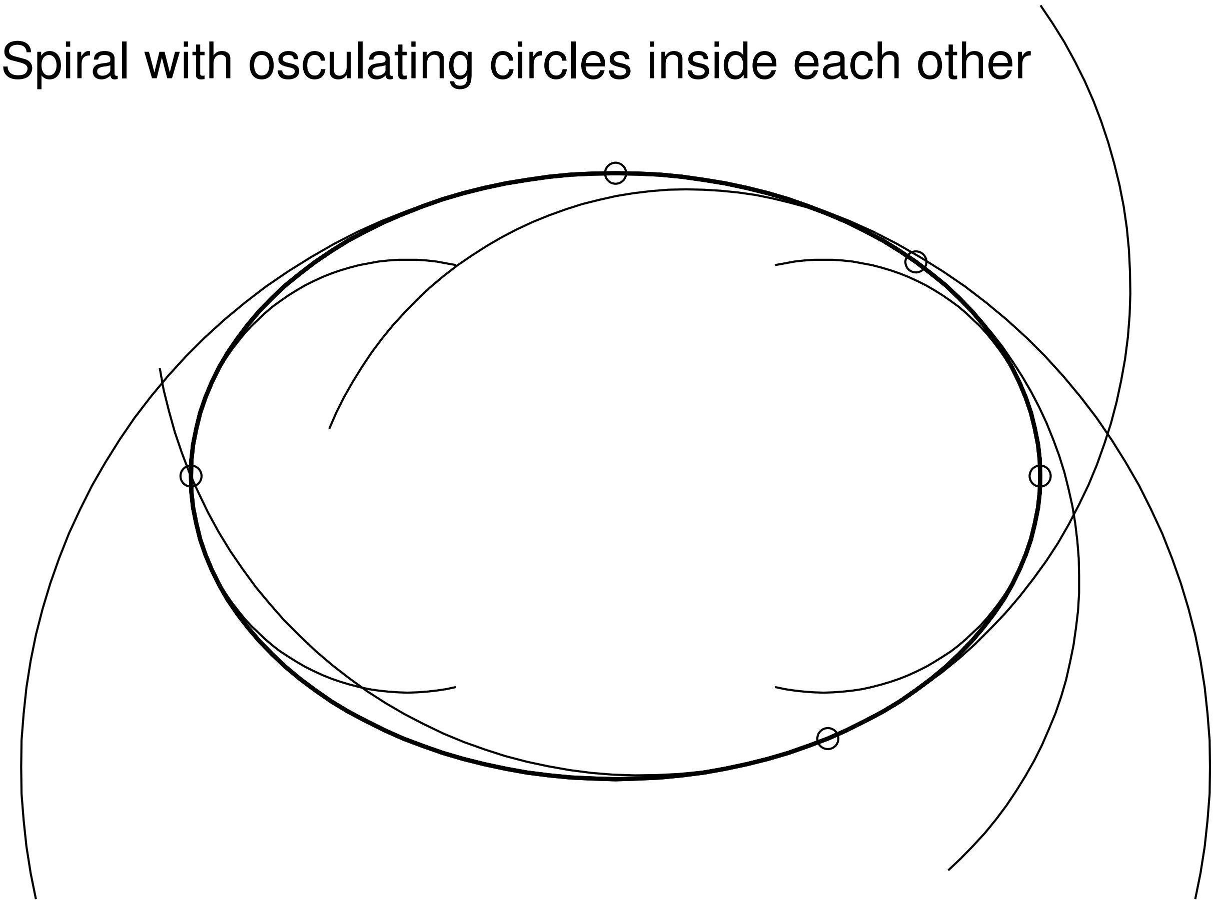
Aufgabe 15 – Mengen von Geraden bzw. von Ebenen als metrische Räume

a) Definieren Sie eine Metrik auf der Menge der (i) Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$, (ii) Ebenen des $\mathbb{R}^3$ durch 0, (iii) Geraden des $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Beschreiben Sie zunächst diese Mengen in übersichtlicher Weise. Es ist erwünscht, aber nicht verlangt, Metriken zu finden, die mit den Isometrien des $\mathbb{R}^3$ vertauschen. Im Fall (iii) ist uns eine solche Metrik in expliziter Form nicht bekannt, wir werden später aber deren Existenz beweisen.

b) Geben Sie z.B. für (ii) eine rektifizierbare Verbindung zwischen zwei Elementen an. Sind die abgeschlossenen Kugeln kompakt?



Spiral with osculating circles inside each other



Ellipse with osculating circles

Beachten Sie, wie hervorragend die Krümmungskreise approximieren.