Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 3 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **2. November 2000**

Aufgabe 8 – Evoluten

Es sei $c(t)$ eine reguläre ebene C^2-Kurve mit *innerer* Normale $n(t) = D^{90}\dot{c}(t)/|\dot{c}(t)|$, Krümmung $\kappa(t) \neq 0$, und Krümmungsradius $r(t) = 1/\kappa(t)$. Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte $\gamma(t) := c(t) + r(t)n(t)$ heißt *Evolute* von c.

a) Zeigen Sie, daß die Gerade $\lambda \mapsto c(t) + \lambda n(t)$ in Normalenrichtung durch $c(t)$ die Tangente der Evolute in $\gamma(t)$ bildet.

b) Wenn (t_1, t_2) ein Intervall ist, auf dem $r(t)$ wächst (oder $\dot{\kappa}(t) < 0$), dann gilt Länge$(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = r(t_2) - r(t_1)$.

c) Folgern Sie daraus, daß für $t_1 < t_2$ der Krümmungskreis K_{t_1} innerhalb von K_{t_2} liegt.

Aufgabe 9 – SO(4)-Aktion und Aktion von Untergruppen

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$(s,t) \mapsto U_{s,t} := \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s & 0 & 0 \\ \sin s & \cos s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}^2, +)$ nach $\mathbf{SO}(4)$ ist.

b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch die Abbildung $t \mapsto A_t := U_{at,bt}$ ein Gruppenhomomorphismus, und zwar von $(\mathbb{R}, +)$ nach $\mathbf{SO}(4)$.

c) Warum haben die Bahnkurven $c(t) := A_t p$ für $p \in \mathbb{R}^4$ konstante Krümmung?

Aufgabe 10 – Schraubenlinien und Schraubungen

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$t \mapsto S_t(p) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ in die Isometrien des $\mathbb{R}^3$ ist und daß jede Bahnkurve (Schraubenlinie oder *Helix*) $c(t) = S_t(p)$ konstante Krümmung hat.

b) Zu jeder regulären Kurve c heißt die Kurve $\dot{c}/|\dot{c}|$ in $\mathbb{S}^2$ *Tangentenbild* von c. Was ist das Tangentenbild einer Schraublinie $t \mapsto S_t(p)$? Unter welcher Bedingung an p enthält das Tangentenbild ein Paar aufeinander senkrechter Punkte $\dot{c}/|\dot{c}|(\tau_1) \perp \dot{c}/|\dot{c}|(\tau_2)$?

c) Finden Sie damit zwei aufeinander senkrechte Ebenen $E_1 \perp E_2$, die eine Helix senkrecht schneiden. Verwenden Sie diese beiden Ebenen, um eine geschlossene Kurve *konstanter* Krümmung in $\mathbb{R}^3$ anzugeben, die kein Kreis ist ($\ddot{c}$ stetig, $\dddot{c}$ nicht).

Aufgabe 11 – Krümmungsberechnung

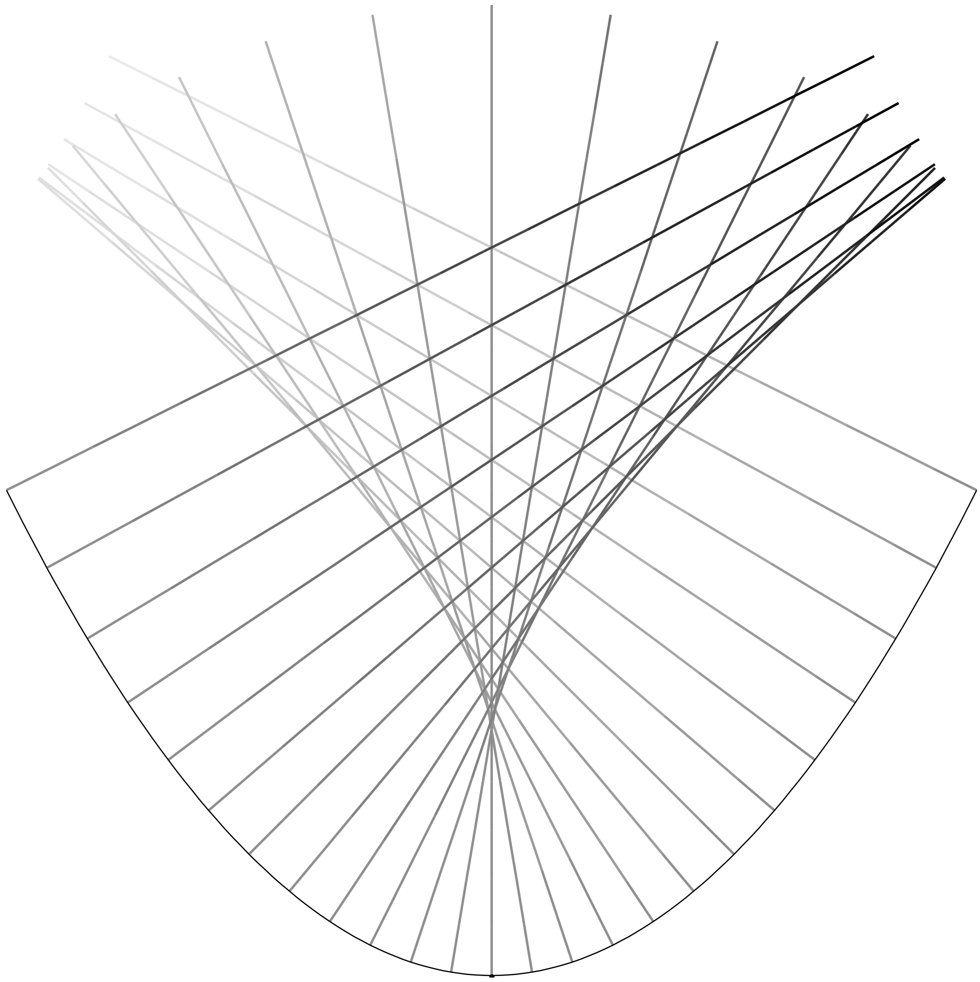
a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ der Parabel $c(t) = (t, t^2)$. (Überzeugen Sie sich, daß die auf der Rückseite gezeigte Evolute dem Ergebnis entspricht.)

b) Berechnen Sie die Krümmungsradien der Zykloide $c(t) := (t + \sin t, -\cos t)$ von Aufgabe 2. Was passiert in den Spitzen? Prüfen Sie die Gleichung $\gamma(t) = c(\pi+t)+(-\pi, 2)$ für die Evolute γ nach. Was stellt die Evolute also dar?

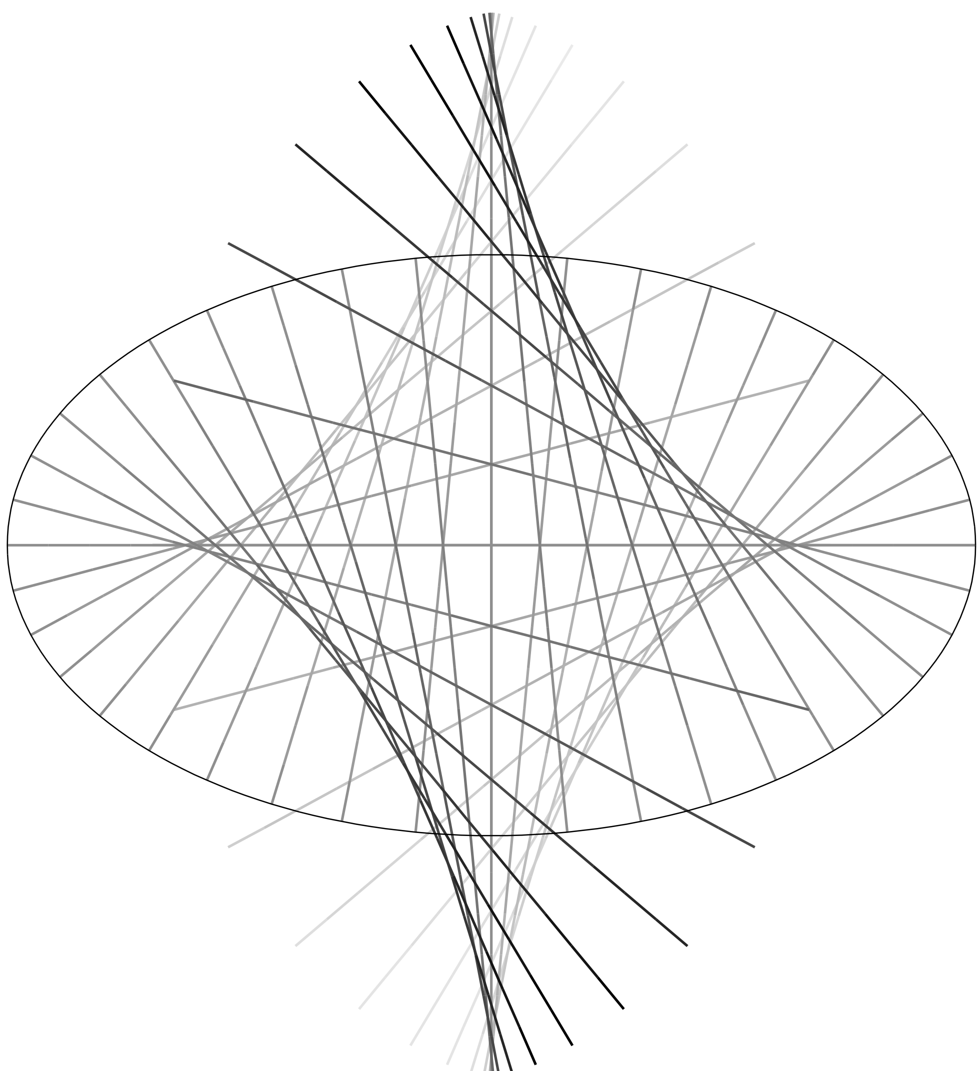
c) Haben die auf der Rückseite von Blatt 2 abgebildeten Torusknoten

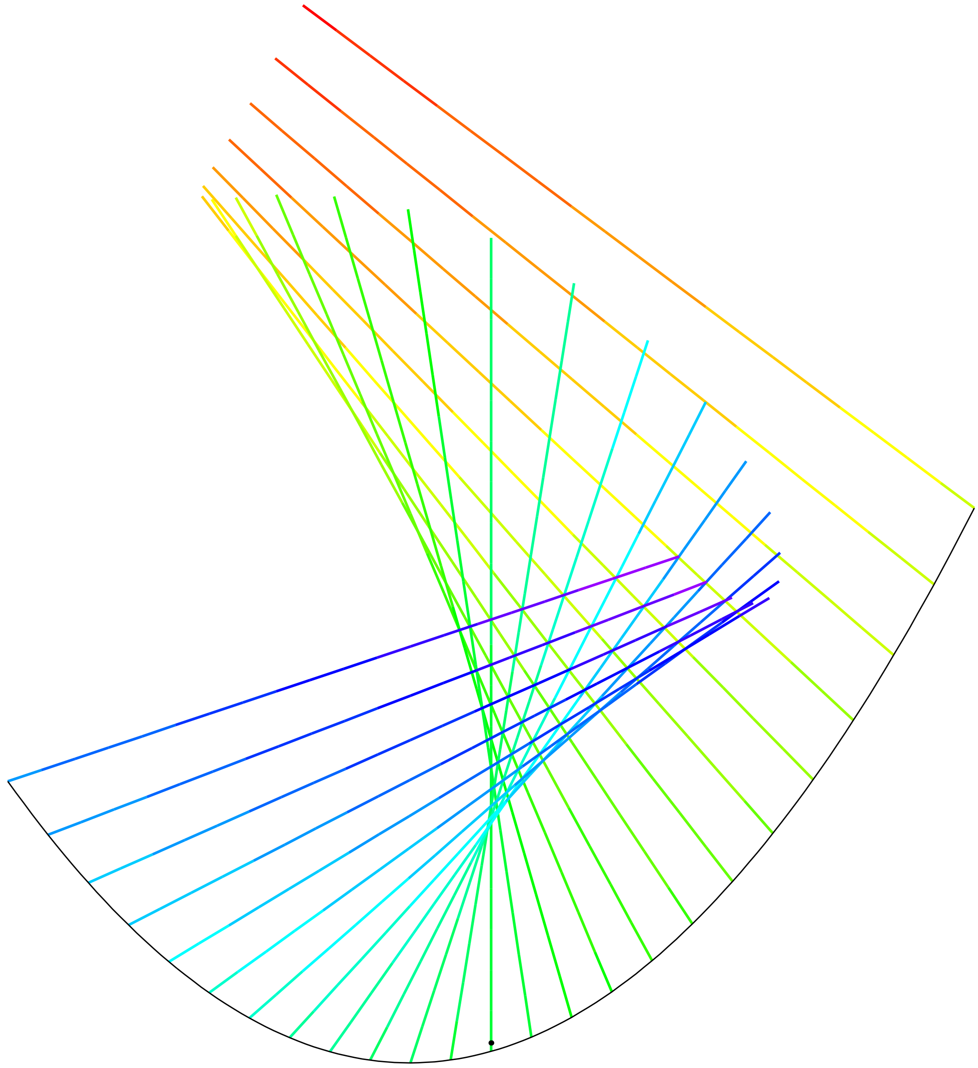
$$c(t) = ((R + r\cos mt)\cos nt,\ (R + r\cos mt)\sin nt,\ r\sin mt)$$

konstante Krümmung ($m, n \in N$, $r, R > 0$)?



Die Normalen einer Kurve hüllen deren Evolute ein. Interpretiert man die Grauwerte der Normalen als "Höhe", so sieht man eine Fläche, deren Konturlinie gerade die Evolute ist.





Eine gedrehte Darstellung des vorhergehenden Bildes. Die räumliche Interpretation wird so erleichtert.

Krümmungskreise der Ellipse, zum Vergleich mit dem vorhergehenden Bild der Normalen, die die Evolute einhüllen.