Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 2 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **27. Oktober 2000**

Aufgabe 5 – Ellipsen

Die Kurve $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, für $a > b > 0$ und $0 \le t < 2\pi$, heißt *Ellipse*, die beiden Punkte $F_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ sind ihre *Brennpunkte*.

a) Zeigen Sie, daß die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist, und zwar $|c(t) - F_+| + |c(t) - F_-| = 2a$. Hierauf beruht die sogenannte Gärtnerkonstruktion, die eine Ellipse durch einen Faden mit Endpunkten $F_\pm$ erzeugt.

b) Rechnen Sie nach, daß die Winkel zwischen Kurventangente und *Brennstrahlen* konstant sind, $\angle(c(t) - F_+, -\dot c(t)) = \angle(c(t) - F_-, \dot c(t))$. Daher werden von F_+ ausgehende Lichtstrahlen an der Ellipse nach F_- reflektiert. Spiegelt man F_- an allen Tangenten, so erhält man einen Kreis vom Radius $2a$ um F_+, den *Leitkreis*.

c) Evtl. eine Woche später: Der kleinste Krümmungskreis (Def. nach Ende der Bogenlängendiskussion) liegt innerhalb, der größte außerhalb der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Aufgabe 6 – Projektion auf konvexe Mengen

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^d \setminus K$ sei $\pi(p)$ der nächste Punkt in K.

a) Es sei H die Hyperebene durch $\pi(p)$, die senkrecht auf der Verbindungsstrecke von p nach $\pi(p)$ steht. Dann liegt K auf einer Seite von H; daher heißt H Stützhyperebene.

b) Zeige: Durch jeden Randpunkt von K geht eine Stützhyperebene.

c) Zeige, daß die Projektion π den Abstand verringert, es gilt also $|\pi(p) - \pi(q)| \le |p - q|$ für alle $p, q \in \mathbb{R}^d \setminus K$. (Also: $c : I \to \mathbb{R}^d$ rektifizierbar $\Rightarrow \pi \circ c$ rektifizierbar.)

Aufgabe 7 – Bahnenabstand für isometrische Gruppenoperationen

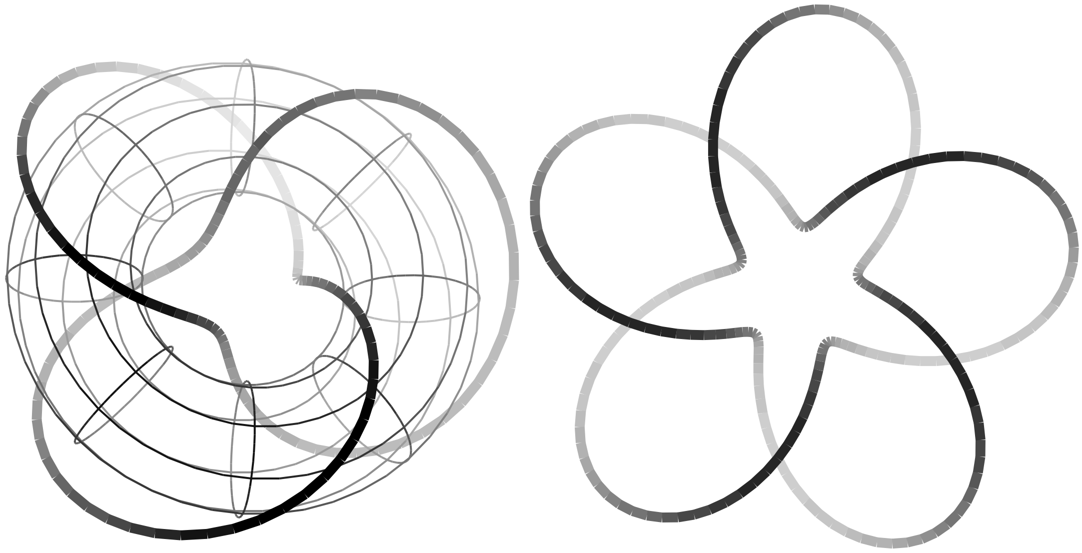
Falls man (wie in Aufgabe 3) einen metrischen Raum M hat, eine Gruppe G und eine Abbildung $* : G \times M \to M$ mit $(g, m) \mapsto g * m$, so sagt man G *operiert* auf M, wenn $(gh) * m = g * (h * m)$ für alle $g, h \in G$ und $m \in M$ gilt. Die Teilmengen $G * m := \{g * m \mid g \in G\}$ für festes $m \in M$ heißen *Bahnen* oder Orbiten. Wir setzen weiter voraus, daß G *isometrisch* operiert, d.h. es gilt $d(m, n) = d(g * m, g * n)$ für alle $g \in G$ und $m, n \in M$.

a) Wenn M vollständig ist, kompakte Abstandskugeln besitzt und die Bahnen abgeschlossen sind, gibt es einen Punkt $m_0 \in G{*}m$ mit $d(m_0, n) = \inf\{d(g{*}m, n) \mid g \in G\}$.

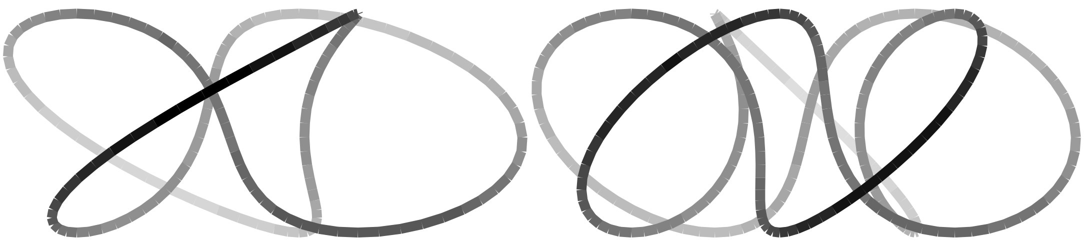
b) Folgern Sie, daß $d(G * m, G * n) := \min\{d(g * m, n) \mid g \in G\}$ eine Metrik auf der Menge der Bahnen definiert.

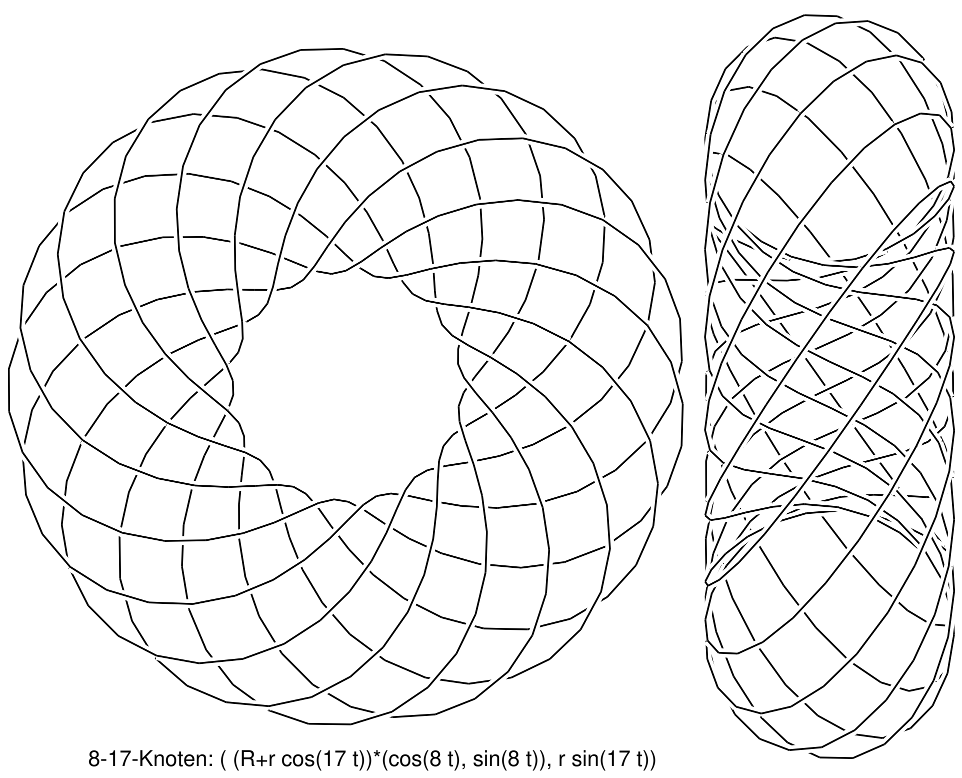
c) Falls $c : [0, 1] \to M$ eine rektifizierbare Kurve von m nach n ist, so ist $t \mapsto G * c(t)$ eine rektifizierbare Kurve im Raum der Bahnen von $G * m$ nach $G * n$. Benutzen Sie Teil a), um Länge$(c) \ge$ Länge$(G * c)$ zu zeigen.

d) Betrachten Sie die Rotationen in $\mathbb{R}^2$ um 0. Was ist der Orbitraum und seine Metrik?



2-3-Torusknoten und 2-5-Torusknoten von oben, von vorn





8-17-Knoten: ((R+r cos(17 t))*(cos(8 t), sin(8 t)), r sin(17 t))