# Übungen Differentialgeometrie I

**Blatt 1** **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **20. Oktober 2000**

**Aufgabe 1 – Kreise**

a) Geben Sie einen parametrisierten Kreis $c(t) \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $r > 0$ an, der mit konstanter Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}$ durchlaufen wird. Wie groß ist die Beschleunigung $a \in \mathbb{R}$?

b) Es seien $v \perp a \in \mathbb{R}^3$ zwei orthogonale Vektoren mit $v, a \neq 0$. Geben Sie einen Kreis $c(t)$ an mit $\dot{c}(0) = v$, $\ddot{c}(0) = a$, $|\dot{c}(t)| = \text{const}$.

c) Wie lautet ein Kreis $c(t)$ mit $\dot{c}(0) = v$, $\ddot{c}(0) = a$ wenn $v, a \in \mathbb{R}^3$ nur noch linear unabhängig vorausgesetzt sind?

**Aufgabe 2 – Zykloide**

a) Skizzieren Sie die *Zykloide*

$$c(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t \leq 4\pi$, mit $r = \frac{1}{2}$, 1, und 2. Geben Sie auch einige Tangenten an und erklären deren Konstruktion. Wieso kann eine differenzierbare Kurve Spitzen haben? Wie kann man die Kurve für $r = 1$ als Bahn eines Punktes des Einheitskreises auffassen, und welche Interpretation gibt es für andere Werte von $r$?

b) Berechnen Sie die Bogenlänge von $c(t)$ für $r = 1$ und $t \in [0, 2\pi]$.

Auf der Rückseite finden Sie ein anderes Beispiel für Rollkurven.

**Aufgabe 3 – Gitter in $\mathbb{R}^2$**

Zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ definieren ein *Gitter*

$$G := \{nu + mv \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Man kann $G$ auch als Translations-Untergruppe des $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$p \sim q \iff p - q \in G.$$

Die vollen Äquivalenzklassen der Form $G + q$ heißen *Bahnen* von $q$. Skizzieren Sie zwei Bahnen. Definieren Sie eine Metrik auf der Menge der Äquivalenzklassen (zeigen Sie die Dreiecksungleichung). Warum kann man je zwei Klassen durch eine rektifizierbare Kurve verbinden?

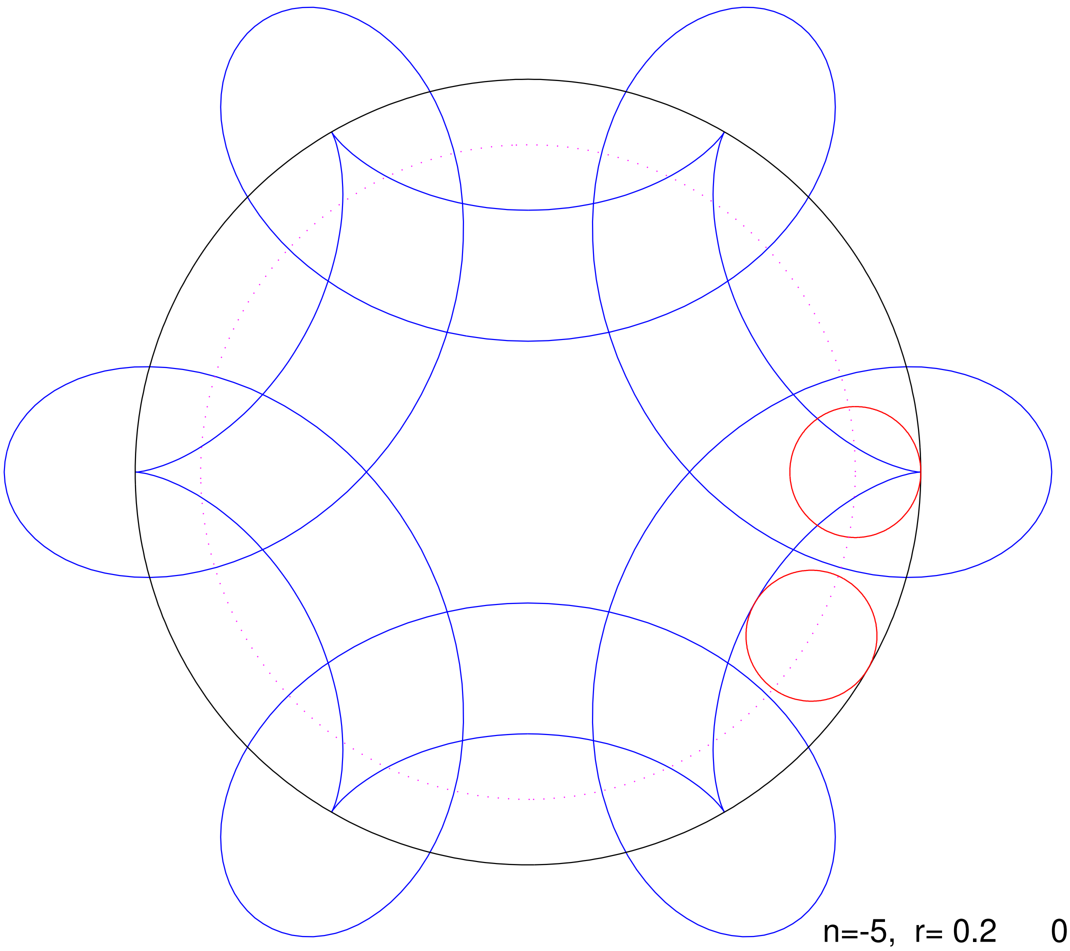
**Aufgabe 4 – Einheitskreise in Banachebenen**

a) Eine Norm für den $\mathbb{R}^2$ wird durch ein regelmäßigen Sechseck mit Mittelpunkt 0 definiert. Wie groß ist der Umfang dieses Einheitskreises? Bestimmen Sie weniger symmetrische Sechsecke mit dem selben Umfang.

b) Auch ein Parallelogramm (symmetrisch um $0 \in \mathbb{R}^2$) führt auf die gleiche Weise eine Norm ein. Wie groß ist sein Umfang?

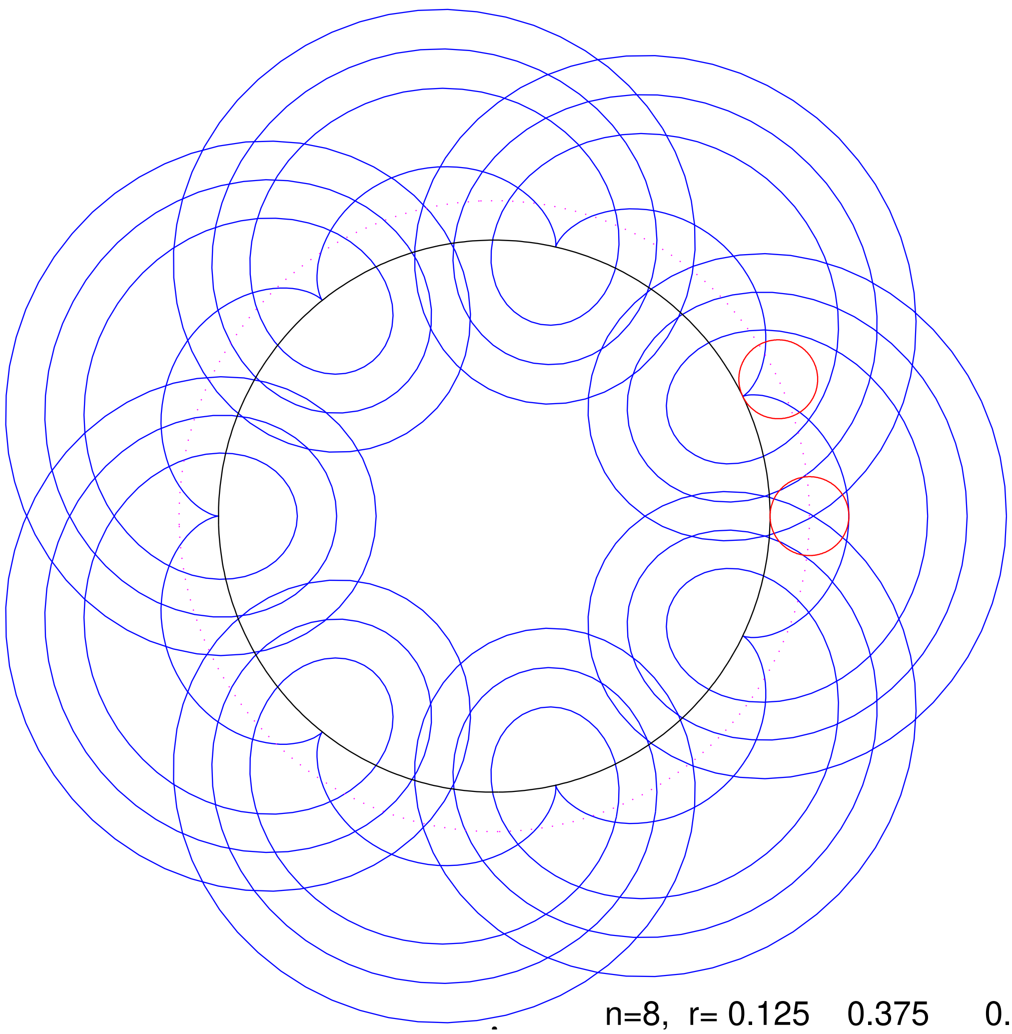
c) Zeigen Sie, daß eine Ellipse mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^2$ eine Norm definiert, die der Ellipse Umfang $2\pi$ gibt.

d) Es sei $C$ eine beliebige symmetrische konvexe Kurve, die wiederum eine Norm definiert. Finden Sie ein einbeschriebenes Sechseck, dessen Seitenlängen in dieser Norm alle 1 sind. Zeigen Sie, daß der Umfang jedes umbeschriebenen Parallelogramms wenigstens 8 ist. Warum gibt es flächenkleinste $C$ umschriebene Parallelogramme? (Also gilt $6 \leq 2\pi \leq 8$ in jeder Banachebene.)



n=-5,  r= 0.2      0.6

Rollkurven: $\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} \cos(n\cdot\phi) \\ \sin(n\cdot\phi) \end{pmatrix}$



n=8,  r= 0.125    0.375      0.5    0.625