Rainer KAENDERS, Bonn

Flächenbestimmung mit Ähnlichkeit als Alternative zur so genannten 'h-Methode'

„Es irrt der Mensch, solange er strebt.“ (Johann Wolfgang Goethe). Zahlen allerdings können – anders als Menschen – weder *gegen etwas laufen*, sich *annähern* noch *streben*. Eigenschaften von Zahlen, unter anderem ihr Wert, ändern sich, wenn man eine Zahl durch eine andere ersetzt.

Eine begrifflich tragfähige Entwicklung der Infinitesimalrechnung in der Schule ist durch den Wegfall jeglicher Definition eines Grenzwertes zu einer Herausforderung geworden. In Schulbüchern wird Sprache eingeführt, wie beispielsweise: „x+0,5 → 0,5+0,5 = 1 für x → 0,5; gelesen: x+0,5 *strebt* gegen 1 für x gegen 0,5.“ Doch Zahlen streben nicht. Weitere konzeptionelle Herangehensweisen fehlen. Besonders bei der Anwendung der so genannten 'h-Methode' werden diese begrifflichen Defizite offenbar, da man gerade an dieser Stelle einen sorgfältigen Umgang mit dem Grenzwertbegriff nicht umgehen kann. Wir schlagen einen Einstieg in die Infinitesimalrechnung vor, der über Ähnlichkeits- und Symmetriebetrachtungen von Flächen zu den wichtigsten Funktionen der Schulmathematik führt. Dabei halten wir uns an das Motto: „Ähnlichkeit ist das halbe Leben.“ (Leon van den Broek).

Aufbauend auf dem Riemann-Integral hat auch Christoph Kirfel (2014) einen vereinfachten Zugang zur Integralrechnung gefunden. Mit der Idee des flämischen Jesuiten Gregorius van St.-Vincent zum Logarithmus studiert Kirfel für seinen Ansatz das Transformationsverhalten von Rechtecken in Ober- und Untersummen bei speziellen Funktionen. Unser Ansatz benötigt dagegen keinen technischen Integralbegriff, sondern nutzt lediglich die Ähnlichkeiten und Symmetrien der gesamten Graphen dieser Funktionen, um die Flächen unter den Graphen direkt zu bestimmen.

1. Die so genannte h-Methode

Bei dieser ‚Methode‘ wird ein algebraischer Ausdruck eines Differenzenquotienten $(f(x+h)-f(h))/h$ so umgeformt, dass $h=0$ eingesetzt werden kann, ohne dass dies zu einer Division durch Null führt. Da $h=0$ allerdings zunächst explizit ausgeschlossen war, wird dieser Verstoß gegen die Logik mit einer eigenen Formulierung versehen: „h *strebt* gegen Null“. Zugleich werden in Beispielen und mittels mathematischer Software verschiedene kleine Zahlen für h eingesetzt. Doch die h-Methode wird dem infinitesimalen Charakter des Grenzübergangs genauso wenig gerecht, wie es etwa der Unendlichkeit der Primzahlen gerecht wird, wenn man mit einem Rechner immer wieder neue große Primzahlen entdeckt.

In der Regel wird die h-Methode bei $f(x) = x^n$ praktiziert. Hier wird häufig auch noch der ungeschickte Zugang über den binomischen Lehrsatz gewählt. Dabei erlaubt die geometrische Reihe einen einfachen direkten Zugang. Mit $x_1^n - x_0^n = (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \cdots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$ werden der Differenzenquotienten und auch die Monotonie der Funktion gut verstehbar.

Schon George Berkeley (1685-1753) (vgl. Sonar, 2011) war ein ausgesprochener Gegner der h-Methode, wobei damals *h* mit *o* bezeichnet wurde.

„Bisher habe ich vorausgesetzt, dass x fließt, dass x ein wirkliches Inkrement hat, dass o etwas ist, und ich bin immer an Hand dieser Voraussetzung, ohne die ich nicht einmal einen einzigen Schritt hätte machen können, vorgegangen. Aus dieser Voraussetzung erhielt ich das Inkrement von x^n*, durch sie konnte ich es mit dem Inkrement von x vergleichen und das Verhältnis der beiden Inkremente finden. Nun aber bitte ich darum, eine neue Annahme machen zu dürfen, die der ersten entgegengesetzt ist, d.h. ich werde annehmen, dass es kein Inkrement von x gibt, oder dass o nichts ist. Diese zweite Annahme vernichtet meine erste, sie ist mit ihr unverträglich und also auch mit allem, was sie voraussetzt. Ich bitte trotzdem darum,* nx^{n-1} *beibehalten zu dürfen, obwohl es ein Ausdruck ist, der mit Hilfe meiner ersten Annahme gewonnen wurde, der notwendig diese Annahme voraussetzt, und der ohne sie nicht gewonnen werden könnte. All das scheint eine höchst widerspruchsvolle Art der Beweisführung und eine solche, die man in der Theologie nicht erlauben würde.“*

Wie gehen wir mit dem Wegfall des Grenzwertbegriffs um? Die Definition des modernen Grenzwertbegriffs mit drei Quantoren ist schwer. Doch gibt es einfachere infinitesimale Betrachtungen. Beispielsweise können wir leicht für eine Zahl C folgern: $[\forall\, \kappa > 1\colon \frac{1}{\kappa} \cdot 4711 \le C \le \kappa \cdot 4711\,] \Rightarrow C = 4711.$

Es stellt sich die Frage, ob wir den Grenzübergang bei der Differentiation in speziellen Fällen durch solche Betrachtungen mit einem Quantor ersetzen und dem infinitesimalen Charakter der Sache wieder gerecht werden können.

Eine derartige Argumentation kennen wir auch von der Ableitung des Sinus. Ein einfacher Vergleich von Flächeninhalten (vgl. Priestley, 1979) liefert:

$\forall\, h > 0\colon\ \frac{1}{\cos(h)} \le \frac{\sin(h)}{h} \le \cos(h)$, woraus wir folgern $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 0.$

2. Flächenberechnung bei Potenzfunktionen durch Ähnlichkeit

In (Kaenders, 2014) haben wir eine Herangehensweise an die Quadratur der Parabel vorgestellt, wie sie unseres Wissens in der Literatur nicht zu finden ist und die auf der Feststellung (kognitiver Konflikt) beruht, dass je zwei Parabeln zueinander ähnlich sind. Auch die Graphen zweier Funktionen aus der Familie von Funktionen $f(x) = ax^n$ für $a > 0$ sind einander ähnlich.

Für festes x werden wir die Fläche $A(x) = A$ zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x) = ax^n$ und der x-Achse von 0 bis x quadrieren.

Dazu betrachten wir eine zentrische Streckung mit Faktor $\lambda > 1$ vom Ursprung des Koordinatensystems O aus und wählen eine Parallelstreckung parallel zur y-Achse von der x-Achse aus mit Faktor $\mu > 0$ dergestalt, dass die Bilder des Graphen der Funktion $f(x) = ax^n$ unter beiden Abbildungen übereinstimmen. Zentrische und parallele Streckung bilden wie folgt ab:

$$\big((x, f(x)\big) \mapsto (\lambda x, \lambda\, f(x)) \quad \text{und} \quad \big(x', f(x')\big) \mapsto (x', \mu f(x')).$$

Bei beiden hat der Graph von $f(x) = ax^n$ dasselbe Bild, falls Abszisse und Ordinate übereinstimmen: $x' = \lambda x$ und $\lambda f(x) = \mu f(x')$. Zusammengefasst erhalten wir die Bedingung: $\lambda f(x) = \mu f(\lambda x)$ oder kurz $\mu\lambda^{n-1} = 1$.

Die Bilder der Fläche A unter beiden Abbildungen stimmen allerdings nicht genau überein, auch wenn sie beide vom Graphen von μf nach oben begrenzt werden. Ihre Flächenmaße sind $\lambda^2 A$ und μA und sie unterscheiden sich durch einen schmalen Streifen der Breite $\lambda x - x$. Also – mit der Monotonie:

$$\mu f(x)\,(\lambda x - x) \leq \lambda^2 A - \mu A \leq \mu f(\lambda x)\,(\lambda x - x).$$

Ausklammern von x und Division durch $(\lambda - 1)$ ergibt:

$$f(x)\,x \leq \frac{\lambda^2 - \mu}{\mu(\lambda - 1)} A \leq f(\lambda x)\,x.$$

Doch mit $\mu\lambda^{n-1} = 1$ gilt: $\frac{\lambda^2-\mu}{\mu(\lambda-1)} = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n$. Also

$$\forall \lambda > 1: \qquad \frac{a\,x^{n+1}}{1 + \lambda + \cdots + \lambda^n} \leq A \leq \frac{a\,\lambda^n\,x^{n+1}}{1 + \lambda + \cdots + \lambda^n} \quad ,$$

was sich mit $\kappa = \lambda^n$ abschätzen lässt zu:

$$\forall \kappa > 1: \qquad \frac{1}{\kappa} \cdot \left(\frac{a}{n+1} x^{n+1}\right) \leq A \leq \kappa \cdot \left(\frac{a}{n+1} x^{n+1}\right),$$

Hieraus schließen wir, ähnlich wie in der Einleitung, dass $A = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$.

Mutatis mutandis funktioniert diese Methode für jeden reellen Exponenten $w \neq -1$ in $f(x) = ax^w$. Im Fall $w = -1$ ist $\lambda^2 = \mu$ und folglich können wir hier nicht durch den Faktor vor A dividieren.

Wollen wir umgekehrt eine Funktion der Form $F(x) = bx^{n+1}$ ableiten, so erkennen wir hierin zunächst eine Flächenfunktion unter dem Graphen von $f(x) = ax^n$ mit $a = (n+1)b$. Dann ist $F(x+h) - F(x)$ der Flächeninhalt eines Streifens der Breite h, dessen Höhe sich zwischen $f(x)$ und $f(x+h)$ bewegt. Das heißt: $f(x) \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$ bzw. $F' = f$.

3. Quadratur der Hyperbel

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ bezeichne $L(a,b)$ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f zwischen $x = a$ und $x = b$. Aus obigen Betrachtungen folgt, dass $\mu L(\lambda a, \lambda b) = \lambda^2 L(a,b)$ ist. Mit $\mu = \lambda^2$ gilt: $L(\lambda a, \lambda b) = L(a,b)$. Zusammen mit der Additivität der Flächeninhalte ergibt sich auch auf unsere Weise die wichtigste Eigenschaft des Logarithmus (vgl. Edwards, 1979):

$$L(1,x) + L(1,y) = L(1,x) + L(x,xy) = L(1,xy).$$

Dieses Gesetz wird dem flämischen Jesuit Gregorius van St-Vincent (1584-1667) zugeschrieben, der es über die Exhaustion mit Rechtecken erkannt hatte (vgl. auch Kirfel, 2014).

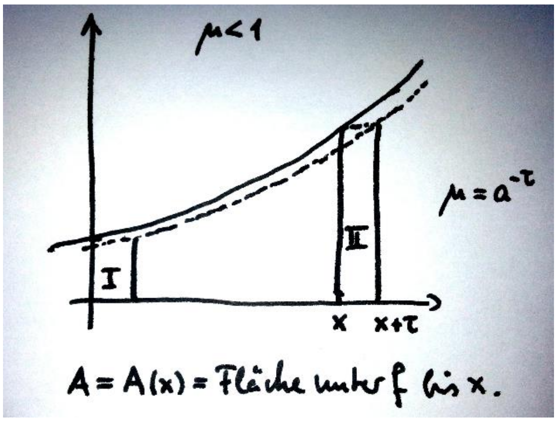
4. Quadratur der Exponentialfunktion

Der Graph der Exponentialfunktion besitzt eine andere Symmetrie. Dazu betrachten wir eine Translation in x-Richtung um $\tau > 0$ und wählen nun eine Parallelstreckung mit Faktor $\mu > 0$ parallel zur y-Achse von der x-Achse aus dergestalt, dass die Bilder des Graphen der Funktion $f(x) = a^x$ unter beiden Abbildungen übereinstimmen.

$$\big(x, f(x)\big) \mapsto (x+\tau, f(x)) \quad \text{und} \quad \big(x', f(x')\big) \mapsto (x', \mu f(x')).$$

Bei beiden hat der Graph von $f(x) = a^x$ dasselbe Bild, falls Abszisse und Ordinate übereinstimmen: $x' = x + \tau$ und $f(x) = \mu f(x')$, d.h. $\mu = a^{-\tau}$.

Die Bilder der Fläche A unter beiden Abbildungen stimmen allerdings nicht überein, auch wenn sie von demselben Bild des Graphen von f nach oben begrenzt werden.



Die Flächen stimmen auf zwei Streifen (linker Streifen I, rechter Streifen II) Die Differenz der beiden Streifen ist $A - \mu A$. Dies schätzen wir ab:

$$(\mu a^x - \mu a^\tau)\tau \leq A - \mu A \leq (\mu a^{x+\tau} - \mu a^0)\tau$$

Division durch $\mu\tau$ ergibt: $a^x - a^\tau \leq \frac{a^\tau - 1}{\tau} A \leq a^{x+\tau} - a^0$, womit wir die Konvergenz des schwierig zu behandelnden Grenzwertes $\lim_{\tau \to 0} \frac{a^\tau - 1}{\tau}$ erhalten, den wir $\ln(a)$ nennen. Die gesuchte Fläche ist dann $A(x) = \frac{1}{\ln(a)}(a^x - 1)$.

4. Resumé

Bei unseren Betrachtungen gehen wir von der Existenz und von einfachen Eigenschaften der Flächenmaße aus, die sich später bei der technischen Einführung des Riemann-Integrals direkt aus der Konstruktion ergeben. Das Riemann-Integral wie auch die allgemeine Grenzwertdefinition könnte man der Hochschulmathematik überlassen, wenn man denn an anderer Stelle dem infinitesimalen Charakter der Betrachtungen gerecht würde.

In unserer Herangehensweise kommt der Fundamentalsatz auf natürliche Weise ins Spiel. Die Standardfunktionen der Schule sind alle auf diese Weise behandelbar, wenn man die erwähnte Behandlung der trigonometrischen Funktionen hinzunimmt. Ähnlichkeits- oder allgemeiner Symmetriebetrachtungen stellen die grundsätzlichen Eigenschaften dieser Funktionen heraus. Die zu Unrecht aus dem Schulstoff verdrängten Ungleichungen werden rehabilitiert.

Literatur

Edwards, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. Springer Heidelberg.

Kaenders, R.H. (2014): *Von einem kognitiven Konflikt zur Quadratur der Parabel*. Beiträge zum Mathematikunterricht.

Kirfel, Ch. (2014): *Integration by geometrical means – a unified approach.* Mathematics Teaching 239.

Priestley, W.M. (1979): *Calculus, an historical approach.* Springer-Verlag New York.
Sonar, Th. (2011): *3000 Jahre Analysis.* Springer Verlag Berlin-Heidelberg.