Rainer KAENDERS, Bonn

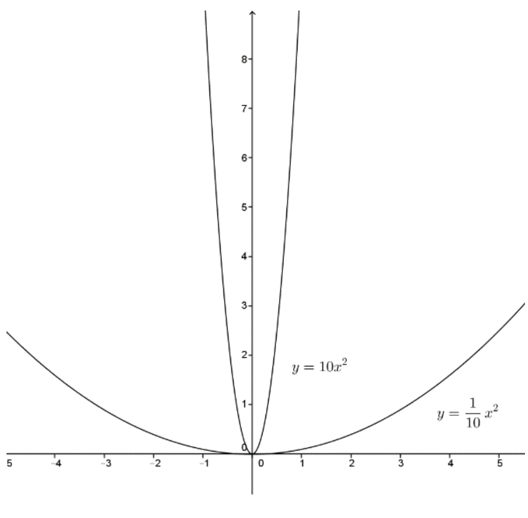
Von einem kognitiven Konflikt zur Quadratur der Parabel

Gibt es schmale und breite Parabeln? Diese Frage erzeugt einen kognitiven Konflikt, der einen Zugang zur Quadratur der Parabel ermöglicht, welcher uns aus der Literatur nicht bekannt ist. Zunächst stellen wir zwei klassische Methoden von Archimedes zur Quadratur der Parabel vor. Dann verfolgen wir eine Analogie zu einer Idee des flämischen Jesuiten Gregorius van St-Vincent (1584-1667) zum Logarithmus und zur Berechnung des Volumens eines allgemeinen Kegels von Frits Beukers (1953). Dies liefert uns einen überraschenden und für die Mittelstufe geeigneten Zugang zur Parabelquadratur, der Gelegenheiten zur Verallgemeinerung bietet. An diesem Beispiel wird deutlich, wie reich die Vielfalt an möglichen Qualitäten mathematischer Bewusstheit (Kaenders & Kvasz, 2011) ist. Wir sehen Möglichkeiten, kontextuelle (Hebelgesetz), manipulative (nachrechnen in Koordinaten), instrumentelle (mit DGS), diagrammatische (Archimedische Dreiecke, Zeichnung der Waage), experimentelle (Flächen in DGS angeben lassen), logische und theoretische Bewusstheit zu erlangen – von intuitiver, strategischer, imitativer und sozialer Bewusstheit mal ganz abgesehen.

In der Schule spielen Parabeln als Graphen quadratischer Funktionen eine wichtige Rolle – auch, wenn man inzwischen das Wort 'Parabel' (wie übrigens auch das Wort 'Primzahl') in den Kernlehrplänen des Landes NRW und anderswo vergeblich sucht. Die Beschäftigung mit der Parabel gehört seit Jahrtausenden aus guten Gründen zum Grundkanon jedes einführenden Mathematikkurses.

1. Kognitiver Konflikt

Wenn in der Schule die Parabel als Graph einer quadratischen Funktion eingeführt wird, liegt es nahe, von schmalen hohen und von breiten flachen Parabeln zu sprechen. Etwa die Graphen von $y = 10\,x^2$ oder $y = \frac{1}{10}x^2$ scheinen verschiedener Gestalt zu sein.

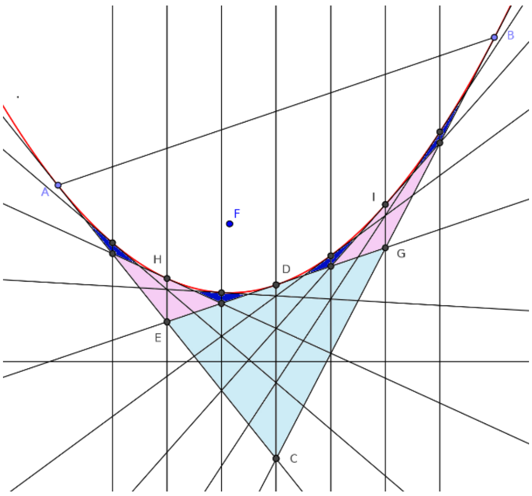


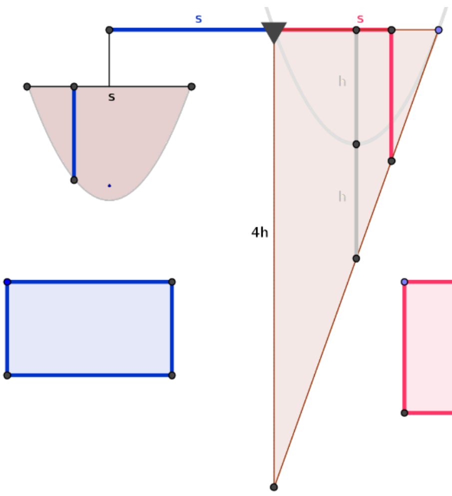
Auf der anderen Seite kennen wir seit Pappus von Alexandria die Definition der Parabel mittels *Leitgerade* und

Brennpunkt. Die schulische Definition einer Parabel wird damit zum Satz. Da jedes Paar aus einer Geraden und einem Punkt durch eine Ähnlichkeitstransformation auf ein anderes Paar bestehend aus Gerade und Punkt abgebildet werden kann, sind je zwei Parabeln ähnlich. Es gibt also nur eine Parabelform. Unsere Intuition sorgt für einen kognitiven Konflikt, dessen Äquilibration uns zu tieferen Einsichten bezüglich der Parabel führt.

2. Archimedes

Die Quadratur der Parabel hat eine lange Tradition (vgl. Führer, 1989, 2006)[1]. Schon Archimedes hat sie auf verschiedene Weisen durchgeführt, von denen zwei im Vortrag im Detail vorgeführt wurden. Bei der ersten hat er die Eigenschaften von Dreiecken, die wir heute *archimedisch* nennen, zur Exhaustion der Parabelfläche genutzt (vgl. Aarts, 2008) und bei der anderen hat er das Hebelgesetz verwendet (vgl. Winter, 1994). Die beiden Abbildungen geben eine Idee dieser Vorgehensweisen.





3. Leitideen

Für die Entdeckung der neuen Methode zur Quadratur der Parabel spielten zwei Leitideen eine entscheidende Rolle:

a) Nennt man $L(a,b)$ die Fläche unter dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{x}$ von $x = a$ bis $x = b$, mit $0 < a < b$, so hat schon der flämische Jesuit Gregorius van St-Vincent (1584-1667) erkannt, dass für jedes $c > 0$ gilt: $L(ca, cb) = L(a,b)$. Daraus folgt unmittelbar die wichtigste Eigenschaft des Logarithmus (vgl. Edwards, 1979):

---

[1] Kollegin Katja Krüger hat uns freundlicherweise auf diese Publikationen aufmerksam gemacht.

$$L(1,x) + L(1,y) = L(1,x) + L(x,xy) = L(1,xy).$$

Dies steht für die Leitidee, sich die funktionalen Eigenschaften einer Fläche – wie $L(a,b)$ – zunutze zu machen.

b) Die zweite Leitidee ist die Berechnung des Kegelvolumens, wie man sie bei Beukers (2009) findet. Ein Kegel der Höhe h, Grundfläche G und Volumen V, wird mit einem beliebigen Faktor $\lambda > 1$ vergrößert. Dabei wird die Grundfläche zu $\lambda^2 G$ und das Volumen zu $V(\lambda) = \lambda^3 V$. Dann passt der ursprüngliche Kegel in den vergrößerten Kegel, sodass die Kegelspitzen zusammenfallen und die Grundflächen der beiden Kegel parallel sind. Betrachtet man das Volumen der Differenzscheibe (‚*plakje kaas*') der beiden Kegel, so kann man diese abschätzen durch die Dicke der Scheibe und die entsprechenden Grundflächen:

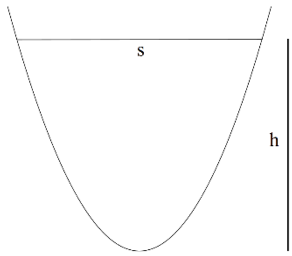
$$(\lambda h - h)G \leq \lambda^3 V - V \leq (\lambda h - h)\lambda^2 G$$

Ausklammern von h und Division durch $(\lambda - 1)$ ergibt:

$$hG \leq \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} V \leq \lambda^2 hG,$$

woraus mit $\frac{\lambda^3-1}{\lambda-1} = 1 + \lambda + \lambda^2$ die bekannte Formel $V = \frac{1}{3}hG$ folgt.

4. Äquilibrium



Bezeichnen wir nun mit $P(h,s)$ eine Parabel, die bei Höhe h die Breite s hat, dann wissen wir, dass es zu jeder Zahl $\mu > 0$ eine Zahl $\lambda > 0$ geben muss, so dass gilt: $P(\mu h, s) = P(\lambda h, \lambda s)$. Man rechnet leicht nach, dass im Fall der Parabel für die beiden Zahlen gilt: $\lambda \cdot \mu = 1$.

5. Quadratur der Parabel

Sei nun $A := A(h,s)$ der Flächeninhalt eines durch eine senkrecht zur Symmetrieachse stehende Sekante begrenzten Parabelsegments, das auf Höhe h die Breite s hat. Nun betrachten wir ein beliebiges $\lambda > 1$ und das zugehörige $\mu := \frac{1}{\lambda}$. Es gilt dann $A(\lambda h, \lambda s) = \lambda^2 A$ und $A(\mu h, s) = \mu A$.

Wir wissen, dass $P(\lambda h, \lambda s) = P(h, \mu s)$. Daher passt $P(h, \mu s)$ genau in $P(\lambda h, \lambda s)$ und lässt dabei nur einen Differenzstreifen unbedeckt, den wir abschätzen können:

$$(\lambda h - \mu h)s \leq \lambda^2 A - \mu A \leq (\lambda h - \mu h)\lambda s.$$

Ausklammern von h und Division durch $(\lambda - \mu)$ liefert:

$$hs \leq \frac{\lambda^2 - \mu}{\lambda - \mu} A \leq \lambda hs,$$

woraus mit $\frac{\lambda^2-\mu}{\lambda-\mu} = \frac{\lambda^3-1}{\lambda^2-1} = \frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+1}$ das schon von Archimedes abgeleitete Gesetz $A = \frac{2}{3} hs$ folgt, und wir die Parabel quadriert haben.

6. Verallgemeinerungen

In moderner Sichtweise zeigt die archimedische Methode der Exhaustion die Jordan-Messbarkeit und damit die Existenz des Flächeninhaltes eines Parabelsegments. Wir hingegen gehen von der Existenz der Fläche aus.

Flächen- und Volumenberechnungen durch Ähnlichkeitstransformationen und Scherungen gibt es viele (vgl. Führer, 2006). Unsere Methode, die darin besteht, die ähnlichen Bilder einer Figur unter einer zentrischen und einer linearen Streckung miteinander zu vergleichen, funktioniert allgemeiner. Zunächst kann man so auch bei einem beliebigen Parabelsegment vorgehen, womit man ebenfalls das Verhältnis $\frac{2}{3}$ zwischen den Flächeninhalten des Parabelsegmentes und des zugehörigen archimedischen Dreiecks erhält. Auch bei einer orthogonalen Hyperbel, von der es ja aus ähnlichen Gründen auch nur eine Form gibt, kann man die Fläche eines Segmentes so berechnen.

In dieser Vorgehensweise erkennen wir eine Vorbereitung auf die Differentialrechnung; die Ableitungen der Funktionen $V(\lambda)$ und $A(\lambda)$ nach λ bei $\lambda = 1$ werden geometrisch berechnet und verschiedene Qualitäten mathematischer Bewusstheit dieses Gebietes werden vorbereitet.

Literatur

Aarts, J.M. (2008): *Geometry*. Series: Universitext, Heidelberg: Springer.

Beukers, F. (2009): *Pi.* Zebra-reeks. Amsterdam: Epsilon uitgaven.

Edwards, C. H. (1979): *The Historical Development of the Calculus*. Heidelberg: Springer.

Führer, L. (2006): *Heuristik und Geschichte der elementaren Volumenberechnung*. mathematica didactica, 29:1.

Führer, L. (1989): *Fünf Wege zur Parabelfläche*. In: mathematik lehren 37, 35–39.

Kaenders, R.H. & Kvasz, L. (2010): *Mathematisches Bewusstsein.* In K. Lengnink & al. (Hrsg.): Mathematik verstehen - philosophische und didaktische Perspektiven. Wiesbaden: Vieweg.

Winter, H. (1994): *Mathematik entdecken.* 4. Auflage. Berlin: Vieweg.