Also

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\cos t} \cos(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$$

Partielle Integration

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\,dt = \underbrace{\sin(t)\cdot\cos(t)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)\cdot\overset{(-)}{\sin}(t)}_{-(1-\cos^2(t))}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) = \frac{\pi}{2}$$

Also gilt

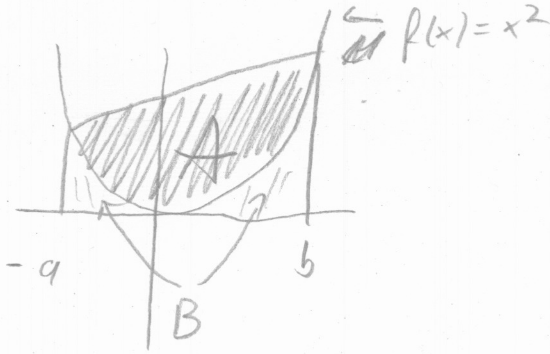
Einheitskreis

Flächeninhalt von $\bigcirc = 2\cdot A = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$

3) $$\int_{0}^{a} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{3}a^3$$

Aber nicht nur Flächen unterhalb von Funktionsgraphen lassen sich über Integrale bestimmen

4) Berechne den Flächeninhalt ~~…~~ A



Flächeninhalt vom Viereck $= \frac{1}{2}(a^2+b^2)\cdot(a+b)$

Davon muss abgezogen werden der Flächeninhalt in $B = \frac{1}{3}a^3+\frac{1}{3}b^3$.

Also

$$A = \frac{1}{2}(a^2+b^2)(a+b) = \frac{1}{6}(a+b)^3$$

5) $$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = ?$$

Antwort: $F(x) = -\frac{1}{x}$ Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=2} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

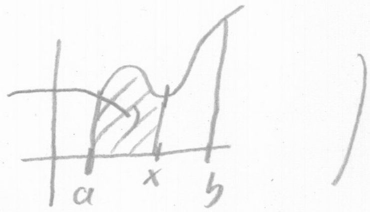
6) $$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -(-1)-(-1) = 2$$

~~8~~7) $$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \log(x)\Big|_{x=1}^{x=a} = \log(a)-\log(1) = \log(a)$$

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

und $F(x) := \int_a^x f(y)\,dy$ für $x\in[a,b]$

(d.h. $F(x)$ ist der Flächeninhalt von )

Dann gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Beweis: Fixiere $x_0\in[a,b]$

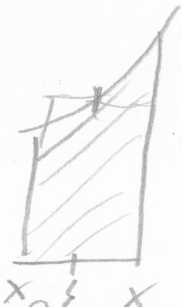
Betrachte Differenzenquotient

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$$

$F(x)-F(x_0)$ = Flächeninhalt von 

$= (x-x_0)\cdot f(\xi)$

für ein $\xi\in[x_0,x]$



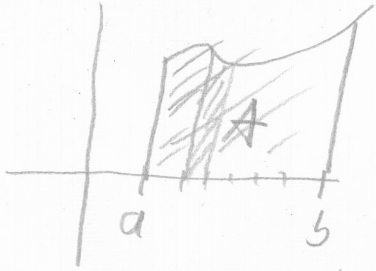
$$\Rightarrow \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)\cdot f(\xi)}{x-x_0} = f(\xi)$$

Geht $x\to x_0$, so geht $\xi\to x_0$, d.h.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$ wie gewünscht.

Flächeninhalt

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, überall nicht-negativ.



Teile $[a,b]$ in n gleich große Teilintervalle mit Teilungspunkten

$$a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},\ a+3\frac{b-a}{n},\ \dots,\ b$$

Approximiere A durch n "parallele Streifen" von Höhe = Funktionswert am rechten Eckpunkt

Bsp: $n=2$

$n=3$

A_n = Flächeninhalt der parallelen Streifen

$$= f(a+c)\cdot c + f(a+2c)c + \dots + f(b)c \quad \text{mit } c=\frac{1}{n}(b-a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(a+ic)c$$

Setze also $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$

$$=: \int_a^b f(x)\,dx$$

Differentialgleichungen

Schreibweise $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt} f(t)$

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

(Physik: $\dot{y}$ = Ableitung nach t, wobei t = "Zeit")

In Anwendungen ist für eine gesuchte Funktion $y(t)$ häufig eine Beziehung zwischen y und $\dot{y}$ bekannt.

Bsp: 1) $\dot{y}(t) = c\,y(t)$ "Die Ableitung ist proportional zur Größe"
$c \in \mathbb{R}$

2) $\dot{y}(t) = c(y_0 - y(t))$, $c, y_0 \in \mathbb{R}$

"Die Ableitung ist proportional zur Differenz von fester Größe y_0 zu $y(t)$"

3) $\dot{y}(t) = y - t$

Allgemein:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), t)$$, wobei f eine Funktion von y, t

"gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung"

es gibt nur Ableitungen nach t.

$y(t)$ tritt nur mit erster Ableitung auf

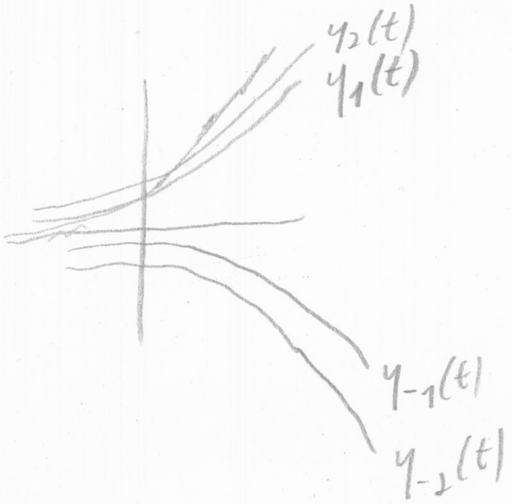
Im allgemeinen lassen sich keine expliziten Lösungen angeben.

Manchmal doch:

Bsp: 1) $\dot{y}(t) = c\,y(t)$

$\Rightarrow y(t) = e^{ct}$ Lösung

Nicht die einzige Lösung: $y_a(t) = a\,e^{ct}$ für $a \in \mathbb{R}$ ebenfalls



~~[illegible]~~

3) $\dot{y}(t) = -\,y(t)^2$ hat die Lösungen $\dfrac{1}{t+a}$, $a \in \mathbb{R}$

4) $\dot{y}(t) = y(t) \cdot f(t)$ mit f stetig

besitzt die Lösungen

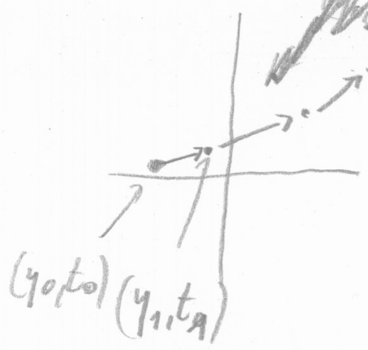
$$y(t) = a\,e^{F(t)}, \text{ wobei}$$

$F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist

Satz: Die Funktion $f(y,t)$ sei differenzierbar in beiden Variablen. Der Anfangswert (y_0, t_0) liege im Definitionsbereich von $f(y,t)$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ mit $y(t_0) = y_0$

Beweisidee im Beispiel

Starte mit



$h>0$

Dann ist $y(t_0+h) \approx y(t_0) + h\cdot \dot{y}(t_0)$

und $\dot{y}(t_0) = f(y_0, t_0)$

Erhalte $t_1 := t_0 + h$, $y_1 = y(t_0) + h\cdot f(y_0, t_0)$

$t_2 = t_1 + h$, $y_2 = y(t_1) + h \cdot f(y_1, t_1)$

$\vdots$

und der Streckenzug zwischen den Punkten

(y_0, t_0), (y_1, t_1), ...

ist ungefähr die gesuchte Funktion y.

Genauer für $h \to 0$ konvergiert der Streckenzug gegen y.

Bsp: $f(y,t) = y$, $(y_0, t_0) = (1, 0)$

$f(y_0, t_0) = 1$

$(y_1, t_1) = (2, 1)$,