Geraden in der Ebene

Erinnerung: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ reelle Ebene

Seien $a,b \in \mathbb{R}$. Dann beschreibt $y = ax+b$ eine Gerade in $\mathbb{R}^2$:

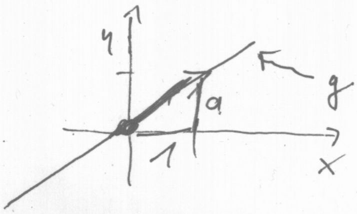
$$g = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = ax+b\}$$

Wieso?

Ang. $b = 0$

$\Rightarrow \quad g = \{(x,ax) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1,a) \mid x \in \mathbb{R}\}$,

also



Steigung von $g = a$

Allgemein: b beliebig

Dann g Translation von $\tilde{g} = \{(x,ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ um b in y-Richtung

Genauer: g ist Translation $\tilde{g}$ um Vektor $(0,b)$

Steigung von $g := a$, $b =$ y-Achsenabschnitt

Geraden können definiert werden durch

1) Zwei verschiedene Punkte $P = (p,q)$, $Q = (u,v)$ auf der Geraden g

2) einen beliebigen Punkt P auf der Geraden g und eine Richtung

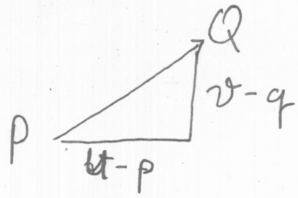
3) einen beliebigen Punkt $P = (p,q)$ auf der Geraden g und ihre Steigung a

Bsp: Im Fall 3), dann $g = \{(x,y) \mid y = ax+b\}$ für ein zu bestimmendes $b \in \mathbb{R}$.

Es gilt $(p,q) \in g$, d.h. $q = ap + b$, also $b = q - ap$

In ~~Fall~~ 1): ~~Bestimme~~ Gegeben $P=(p,q)$, $Q=(u,v)$ auf $g=\{(x,y) \mid y=\underbrace{a}_{}x+\underbrace{b}_{}\}$

Bestimme zunächst Steigung a gesucht



$$\Rightarrow \quad a = \frac{v-q}{u-p}$$

Nach Fall 3) folgt:

$$b = q - \frac{v-q}{u-p}p = \frac{q(u-p)}{(u-p)} - \frac{vp-qp}{u-p} = \frac{qu \cancel{-qp} - vp \cancel{+qp}}{u-p}$$

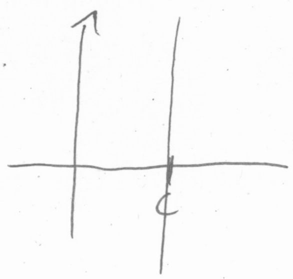
$$= \frac{qu - vp}{u-p}$$

⚠ Funktioniert nur, wenn P, Q nicht "senkrecht übereinander", d.h. $p = u$ ist (sonst $u-p=0$ und $\frac{v-q}{u-p}$ nicht definiert)

Geraden parallel zur y-Achse lassen sich nicht in der Form

$g=\{(x,y) \mid \overset{x,y\in\mathbb{R},}{y=ax+b}\}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ stattdessen, sondern

$g=\{(c,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$, $c\in\mathbb{R}$ fest gewählt.



Im Fall 2): Gegeben $P=(p,q)\in g$ und Vektor (c,d), sodass g genau die Menge der Punkte $(p,q)+t(c,d)$, $t\in\mathbb{R}$, ist.

⚠ Wir müssen $c \neq 0$ annehmen, damit Gerade nicht parallel zur y-Achse ist.

Bestimme Steigung a: Es gilt $a=\frac{d}{c}$

$\overset{\text{Fall 3)}}{\Rightarrow}$ g beschrieben durch $y=\frac{d}{c}\cdot x+(q-\frac{d}{c}p)$

Funktionen

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ordnet jeder Zahl x im Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Zahl $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zu. Schreibweise: $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$

Meistens ist D ein abgeschlossenes/offenes Intervall, d.h.

$$D = [a,b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

oder

$$D = (a,b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R}$$

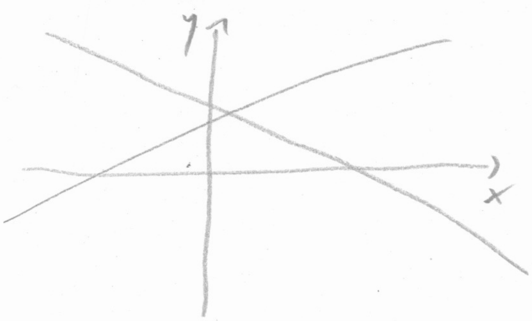
(auch $a = -\infty$, $b = +\infty$ erlaubt)

$$\mathrm{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$ "Graph der Funktion f"

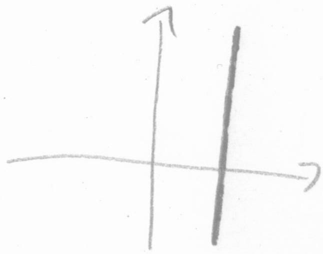
⚠ Der Definitionsbereich ist Teil des Datums einer Funktion. Man sollte ihn immer präzisieren!

Beispiele:

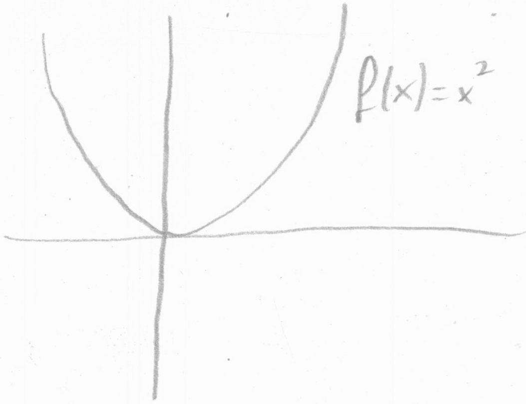
1) Lineare Funktionen: $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ fest gewählt

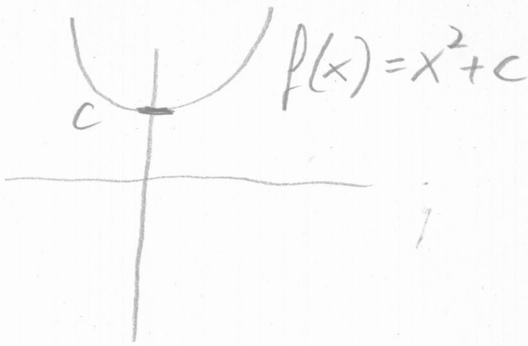


aber <u>nicht</u>

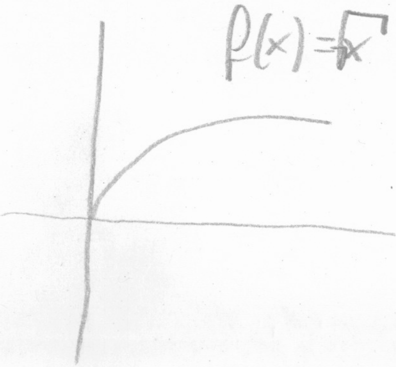


2) Quadratische Parabel: $D=(-\infty,\infty)$, $f(x)=x^2$
oder allgemeiner $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

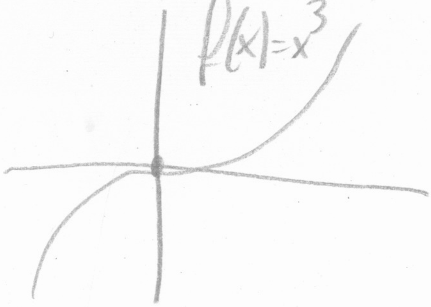




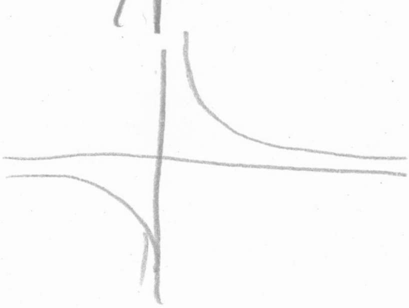
3) Wurzelfunktion: $D=[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$



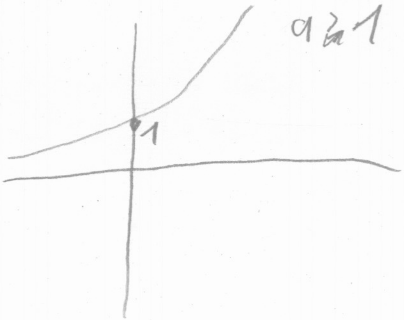
4) Kubische Parabel: $D=\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$
(allgemeiner $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$)

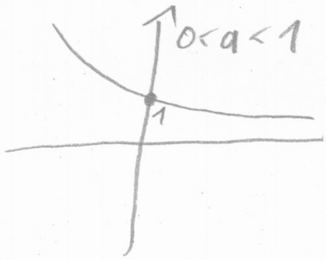


5) Hyperbel: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=\frac{1}{x}$



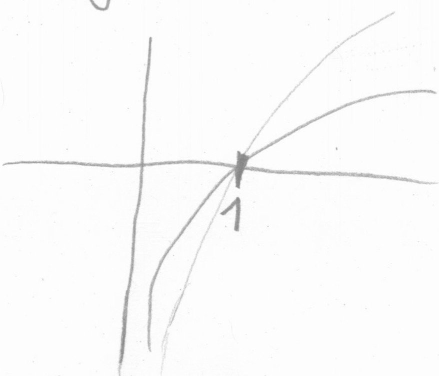
6) Exponentialfunktionen: $D = \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 0$





7) Logarithmusfunktionen: $D = (0, \infty)$, $f(x) = \log_a(x)$

oder $f(x) = \ln(x)$



Rechnen mit Funktionen

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf demselben Definitionsbereich, $a \in \mathbb{R}$.

Dann sind $f+g$, $f-g$, $a \cdot f$, $f \cdot g$ definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) := f(x) - g(x)$$

$$(af)(x) := a\,f(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Sei $D' := \{ x \in D \mid g(x) \neq 0 \}$. Dann

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Eigenschaften von Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$ Funktion, dann ist

f monoton wachsend, wenn $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

(fallend) $x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$

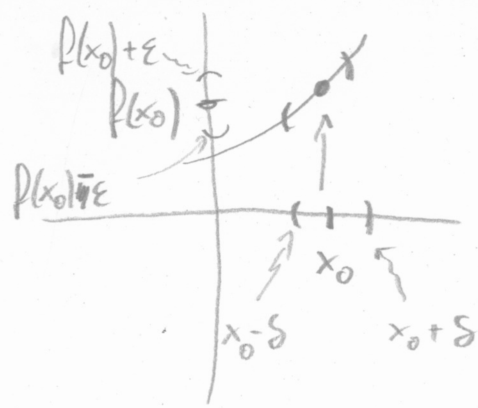
Bsp: $f(x) = x^2$ mon. fallend auf $(-\infty, 0]$, mon. wachsend auf $[0, \infty)$

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig an $x_0 \in D$, wenn

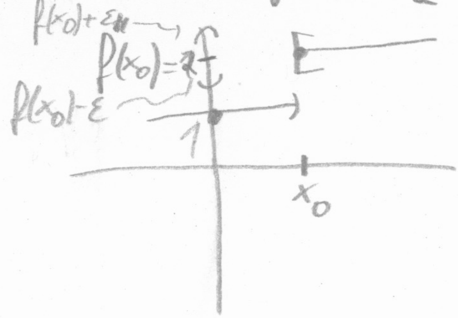
"bei kleinen Veränderungen von x sich $f(x)$ nur wenig ändert", d.h. f darf an x_0 nicht "springen".

Definition: f stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Bild:



Nicht stetig: $\varepsilon = \frac{1}{2}$



aber $f((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta))$ enthält

$1 \notin (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

Sprechweise: f stetig, wenn f stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$.