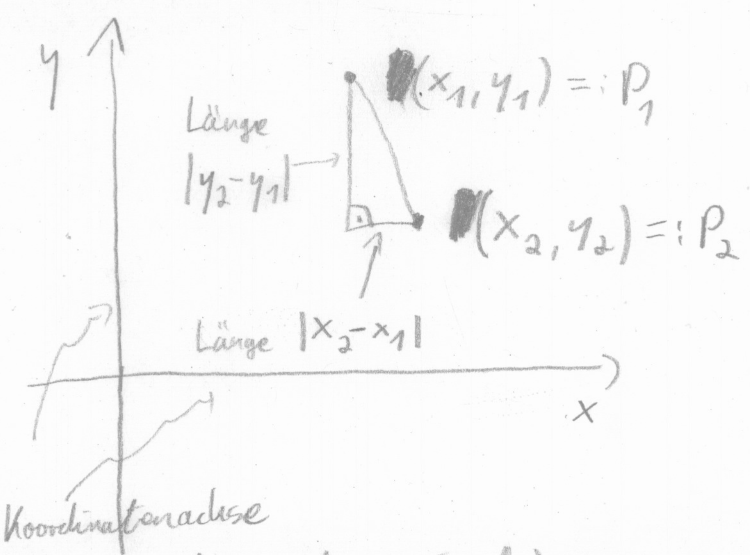
Grundbegriffe der analytischen Geometrie

Ebene & Raum



Satz vom Pythagoras

$$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Abstand von P_1, P_2

Def: Die (zwei-dimensionale) Ebene ist gegeben durch

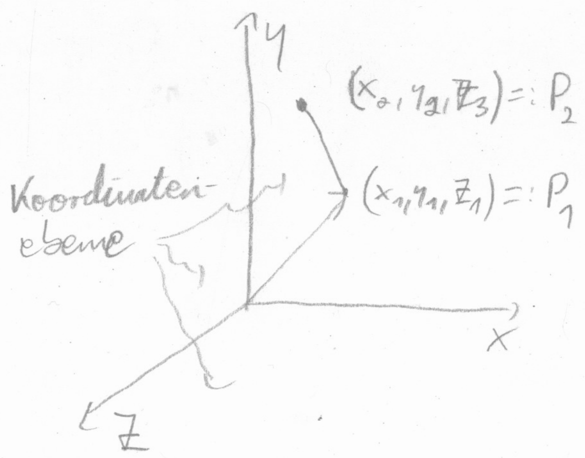
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

"x-Koordinate" "y-Koordinate"

Analog

Def: Der 3-dimensionale Raum ist definiert als

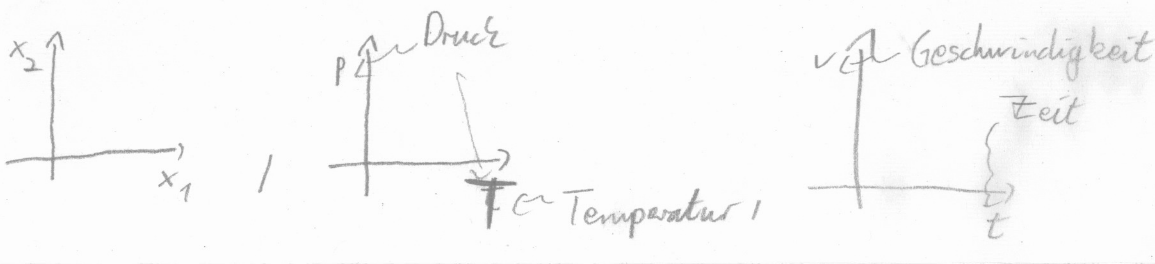
$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$



$$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

⚠ Die Koordinaten können auch andere Namen besitzen!

Bsp:



Daher sollte eine Dimension besser als "Messgröße" o. ä. angesehen werden.

Def: Sei $n \geq 0$. Der n-dimensionale Raum ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

Für $n \geq 4$ ist dies nichts esotherisches:

Jeder Punkt P auf der Erde besitzt eine Temperatur, dies kann formalisiert werden:

$$P \mapsto (\underbrace{x_1, x_2, x_3}, T) \in \mathbb{R}^4$$

3 Raumkoordinaten,
T Temperaturkoordinate

oder auch: $P \mapsto (\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\text{3 Raumkoord.}}, T, t) \in \mathbb{R}^5$

Temperatur, Zeit

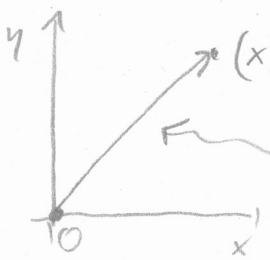
~~Vektoren~~

Sind $P_1 = (x_1, \ldots, x_n)$, $P_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, dann ist deren Abstand definiert als

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Vektoren

Punkte in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ können auch (je nach Bedarf) als Vektoren, d.h. gerichtete Größen, gesehen werden



gerichtete Strecke vom Ursprung O nach P

Schreibweise $\overrightarrow{OP} = (x, y)$

Die Länge von $\overrightarrow{OP}$ ist

$$\|\overrightarrow{OP}\| = d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2}$$

Analog im $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

Kräfte, Geschwindigkeit, ... sind Vektorgrößen

Energie, Zeit, Masse, ... sind dagegen skalare Größen

Sind $P_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $P_2 = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ zwei Punkte, so ist der Verbindungsvektor von P_1 nach P_2 gegeben durch

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$$

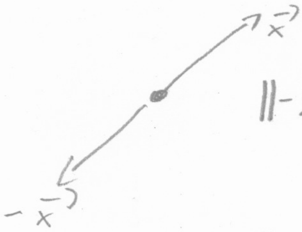
Schreibweise: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ Punkt im $\mathbb{R}^n$

Interpretieren wir x als Vektor, d.h. als $\overrightarrow{Ox}$, so schreiben wir $\vec{x}$

Der Betrag von $\vec{x}$ ist $\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Rechnen mit Vektoren

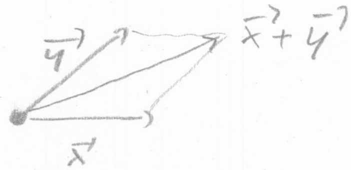
$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, dann $-\vec{x} := (-x_1, \dots, -x_n)$

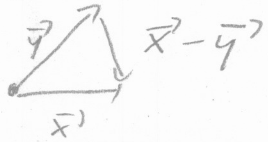


$\|-\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ Summe von $\vec{x}, \vec{y}$

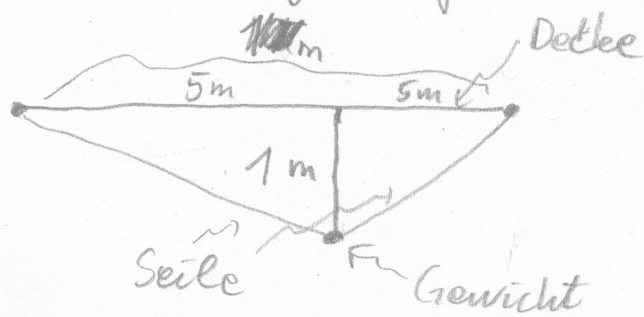
$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ Differenz von $\vec{x}$ und $\vec{y}$





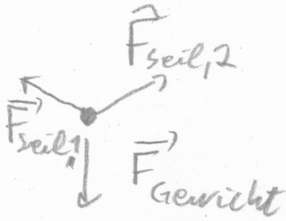
Häufige Anwendung: Kräfteparallelogramm

Ein Gewicht von 2 kg hänge wie folgt



Frage: Welche Kraft wirkt entlang des Seils?

Antwort: Erstelle das Kräfteparallelogramm

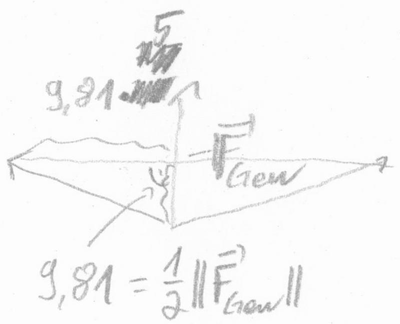


$2kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = \|\vec{F}_{Gew}\|$

Gesucht $c := \|\vec{F}_{Seil\,1}\| = \|\vec{F}_{Seil\,2}\|$

Es gilt (Newtonsches Grundgesetz der Mechanik)

$$\vec{F}_{Gewicht} + \vec{F}_{Seil 1} + \vec{F}_{Seil 2} = 0 \text{, d.h. } \vec{F}_{Seil 1} + \vec{F}_{Seil 2} = -\vec{F}_{Gew}$$



$$\Rightarrow \|\vec{F}_{Seil 1}\| = \sqrt{(9{,}81 \cdot 5)^2 + (9{,}81)^2}\ N$$
$$= 9{,}81 \cdot \sqrt{25^2 + 1}\ N$$
$$\approx 9{,}81 \cdot 5{,}1\ N$$
$$\approx 50{,}03\ N$$
$$(N = kg \cdot \frac{m}{s^2})$$

Skalare Multiplikation

$a \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Dann $a \cdot \vec{x} := (ax_1, \dots, ax_n)$ skalare Multiplikation

Geometrisch: $\vec{x}$ wird um Faktor a gestreckt, ist $a<0$, so zeigen $a\vec{x}, \vec{x}$ in entgegengesetzte Richtungen

Für $a,b \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:
1) $a(\vec{x}+\vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
2) $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$

Skalarprodukt

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Dann $\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ Skalarprodukt

⚠ $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ist kein Vektor, sondern ein Skalar!

Es gilt für $a,b \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$:

1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

2) $\underbrace{(a\vec{x})}_{\text{Skalarmult.}} \vec{y} = a(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (a\vec{y})$, $(a+b) \cdot \vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

3) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{y}$

4) $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$

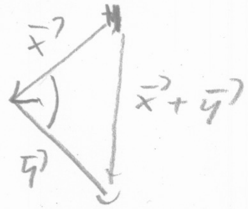
5) $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

Es gilt: $\vec{x} \perp \vec{y}$ ("$\vec{x}$ senkrecht zu $\vec{y}$")

genau dann, wenn $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

Begründung: $\vec{x} \perp \vec{y}$ impliziert

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ (nach Pythagoras)



Es gilt also $\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

$$= \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \underset{5)}{=} (\vec{x}+\vec{y})(\vec{x}+\vec{y}) \underset{4)\text{ mit } \vec{z}=\vec{x}+\vec{y}}{=} \vec{x}(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{y}(\vec{x}+\vec{y}) \underset{2\text{mal } 3)}{=} \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

$$\underset{1),5)}{=} \|\vec{x}\|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

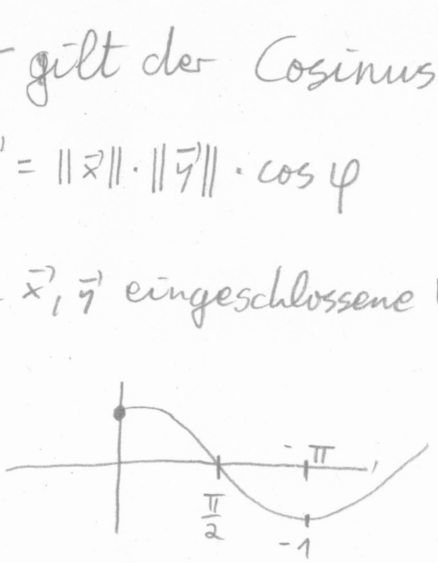
$$\underset{\text{Subtraktion von } \|\vec{x}\|^2, \|\vec{y}\|^2}{\Longrightarrow} \quad 0 = 2\cdot\vec{x}\cdot\vec{y}, \text{ d.h. } \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$$

Allgemeiner gilt der Cosinussatz:

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi$, wobei

φ der von $\vec{x}, \vec{y}$ eingeschlossene Winkel ist, $\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90^\circ$

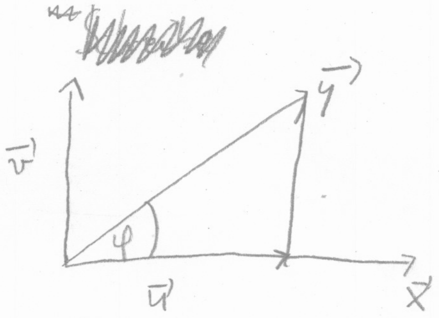
(Cosinus



$\cos(0) = 1$

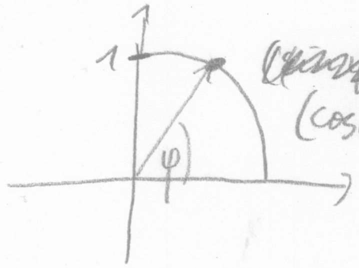
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$)

Begründung:



D.h. $\vec{y} = \vec{v} + \vec{u}$ und $\vec{x} \perp \vec{v}$

Dann $\|\vec{u}\| = \|\vec{y}\| \cos\varphi$, denn



$(\cos\varphi, \sin\varphi)$ parametrisiert gerade den Einheitskreis

und

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}(\vec{v}+\vec{u}) = \underbrace{\vec{x}\cdot\vec{v}}_{=0} + \vec{x}\cdot\vec{u} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{u}\| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos\varphi$$

$\vec{x}, \vec{u}$ sind kollinear