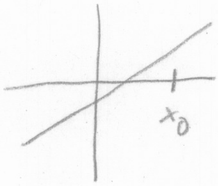
Beispiele:

1) $f(x) = ax + b$



Erwartung: $f'(x_0) = a$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$

Fixiere $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax+b) - (ax_0+b)}{x - x_0} = \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$, insb. existiert der limes.

Es folgt $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a$

2) $f(x) = x^2$.

Beh: $f'(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Beweis: sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = x + x_0$$

Es gilt: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$

Also $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$

3) $f(x) = x^k$, $k \geq 0$

$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$

Bew: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest, $x \in \mathbb{R}$

Es gilt $x^k - x_0^k = (x^{k-1} + x^{k-2} x_0 + \ldots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1})(x - x_0)$

Damit folgt

$$\frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \underbrace{x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \ldots + x_0^{k-1}}_{k\text{-Summanden}}$$

Also $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k x_0^{k-1} + x_0^{k-2} \cdot x_0 + \ldots + x_0^{k-1} = k x_0^{k-1}$$

und damit
$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto k \cdot x^{k-1}$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

Beh: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Bew: $$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \frac{x_0 - x}{x \cdot x_0} \cdot \frac{1}{(x - x_0)} = -\frac{1}{x \cdot x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{x_0^2}, \text{ d.h. } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Rechenregeln für Ableitungen

Für Summen: $$(f + g)' = f' + g'$$

Bew: $$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Bsp: $f(x) = x^2 + 3x + 2$, so ist $f'(x) = 2x + 3$

Für skalare Vielfache:

$c \in \mathbb{R}$, f Funktion, diff.bar. in x_0 $\Rightarrow$ $(cf)' = c \cdot f'$

Bsp: $f(x) = 5x^3$, so ist $f'(x) = 15x^2$

Für Polynomfunktionen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \;, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

gilt

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

Produktregel

Ist $h = f \cdot g$, so gilt

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Bew:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

Füge $0 = -f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0)$ hinzu

$$= \frac{f(x) g(x) - f(x) g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{f(x) \cdot (g(x) - g(x_0)) + (f(x) - f(x_0)) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\text{Diff. quot für } g} + g(x_0) \cdot \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\text{Diff. quot. für } f} \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$$

Bsp: $h(x) = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}$, d.h. $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$

Dann $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{x^3}$

Bsp: $f(x) = \sqrt{x}$. Setze $f(x) = g(x)$, Dann $h(x) = x$

$\Rightarrow 1 = h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot f(x)} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \quad (x \neq 0)$

Quotientenregel

Ist $h = \frac{f}{g}$, also $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, so ist

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Die Kettenregel

Ableitungen zusammengesetzter Funktionen werden mittels der Kettenregel berechnet, Bsp:

$$h(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Hier: $f(x) = 1 + x^2$ eingesetzt in $g(x) = \sqrt{x}$

Oder $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$, dann $h(x) = g(f(x)) = \sin(x^2)$

Formal: ~~geg~~ Gegeben

$$f: D \to \mathbb{R},\ g: D' \to \mathbb{R}, \text{ sodass}$$

$f(D) \subseteq D'$, d.h. für alle $x \in D$ ist $f(x) \in D'$

Dann ist die zusammengesetzte Funktion def. als

$$g \circ f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(f(x))$$

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$

$g: [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$, es gilt $f(\mathbb{R}) \subseteq [1, \infty) \subseteq [0, \infty)$

Es gilt:

$$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Bew: Sei $h := g \circ f$

Erweiter

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$$

mit $f(x)-f(x_0)$ ~~was~~. Dies liefert

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)}$$

Schreibe $y=f(x)$, $y_0=f(x_0)$. Für $x \to x_0$ geht $y \to y_0$.

Dann folgt:

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \longrightarrow g'(y_0)$$

mit $g'(y_0) = g'(f(x_0))$, d.h.

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow g'(f(x_0))\cdot f'(x_0),$$ was zu zeigen war.

Bsp.: $f(x) = x^2+1$, $f'(x) = 2x$

$g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dann $h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$