Rechenbeispiele zu Potenzen, Wurzeln, Logarithmen.

Fortsetzung zur letzten Vorlesung:

Weltbevölkerung wird durch

$f(n) = (1{,}0115)^n \cdot 7{,}6 \cdot 10^9$ modelliert.

Hatten gefragt: Wann gibt es 10 Milliarden Menschen

$\rightsquigarrow \quad 10 = (1{,}0115)^n \cdot 7{,}6$

$\iff \quad \frac{10}{7{,}6} = (1{,}0115)^n$

$\iff \quad n = \log_{1{,}0115}\left(\frac{10}{7{,}6}\right) = \frac{\ln\left(\frac{10}{7{,}6}\right)}{\ln(1{,}0115)} \approx 24$

Können auch fragen: Nach wie vielen Jahren wird sich die Weltbevölkerung verdoppelt haben?

$\rightsquigarrow \quad 2 \cdot 7{,}6 = (1{,}0115)^n \cdot 7{,}6$

$\iff \quad 2 = (1{,}0115)^n$

$\iff \quad \log_2(2) = n \cdot \log_2(1{,}0115)$

$\iff \quad n = \frac{1}{\log_2(1{,}0115)} \approx 60{,}62$

24.10.2019

Anwendung für Potenzen und Logarithmen: ^{14}C-Methode

- Radioaktive Atome zerfallen nach einer zufälligen Zeit. Betrachtet man jedoch eine gewisse große Zahl von ihnen, zerfällt immer ein gewisser Anteil pro Zeiteinheit.

- Wie schnell dieser Zerfall geschieht, wird oft angegeben mithilfe der Halbwertszeit, d.h. der Zeit, bis die Hälfte der Anfangsmenge zerfallen ist.

- Je stabiler das Isotop, desto länger ist die Halbwertszeit. Hier sind einige Beispiele:

Element	Nuklid	Halbwertszeit, ca.
Fermium	^{244}Fm	3,3 ms
Kohlenstoff	^{15}C	2,4 s
Iod	^{131}I	8,05 Tage
Strontium	^{90}Sr	28,1 Jahre
Kohlenstoff	^{14}C	5370 Jahre
Uran	^{235}U	$0{,}71 \cdot 10^9$ Jahre
Uran	^{238}U	$4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre

- ^{14}C ist für uns besonders interessant, da es in lebendigen Organismen vorkommt, und der Zerfall auf einer Zeitskala passiert, auf der wir Fossilien datieren wollen können

- ^{14}C macht einen gewissen Anteil am Kohlenstoff in einem Organismus aus, der während der Lebenszeit konstant bleibt, weil ständig Kohlenstoff mit der Umgebung ausgetauscht wird.
Nach dem Tod hingegen beginnt dieser Anteil zu fallen, da kein Stoffwechsel mehr stattfindet, und das radioaktive ^{14}C zerfällt.

$\Rightarrow$ Indem wir betrachten, um wie viel sich der ^{14}C-Anteil in einem Fossil reduziert hat, können wir sein ungefähres Alter bestimmen.

- Zunächst wählen wir (mehr oder weniger willkürlich) eine Zeiteinheit, in der wir berechnen wollen, um wieviel die Zahl radioaktiver Isotope fällt.
Wir nehmen 100 Jahre, so dass

$$5730 \text{ Jahre} \rightarrow t = 57{,}3$$

- Ist M die Anzahl radioaktiver Atome zur Zeit 0 (z.B. zum Todeszeitpunkt des Lebewesens), und stellt $f(t)$ die Zahl radioaktiver Atome zur Zeit t dar, folgt aus den Gesetzen der Physik dass

$$f(t) = M \cdot x^t$$

· Wir wollen nun für ^{14}C dieses x bestimmen.
Wir wissen:

$$M \cdot x^{57{,}3} = \frac{1}{2} M \iff x^{57{,}3} = \frac{1}{2}$$

nach Definition der Halbwertszeit.

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{57{,}3}} \approx 0{,}9880 = 98{,}8\%$$

⇝ In einem Zeitraum von 100 Jahren zerfällt etwa 1.2 % der ^{14}C-Kerne.

Alternativer Rechenweg:

$$x^{57{,}3} = \frac{1}{2} \iff 57{,}3 \cdot \log_2(x) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\iff \log_2(x) = -\frac{1}{57{,}3} \iff x = 2^{-\frac{1}{57{,}3}}$$

<u>Bemerkung</u>: Eine andere, äquivalente Art, das Zerfalls-gesetz zu formulieren ist

$$f(t) = M e^{-\lambda t}$$

In diesem Fall nennt man λ die <u>Zerfallskonstante</u>.
Zur Umrechnung: $x = e^{-\lambda} \iff \lambda = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>Beispiel</u> Angenommen, wir haben ein Stück fossilisiertes Holz, und messen, dass der ^{14}C-Anteil, und folglich die ^{14}C-Stoffmenge, sich um 20 reduziert hat (bzw. auf 80% vom Anfangswert gefallen). Wie alt schätzen wir es?

Mit dem x von oben rechnen wir:

$$0{,}8 = x^t$$

$$\iff \ln(0{,}8) = t \cdot \ln(x)$$

$$\iff \frac{\ln(0{,}8)}{\ln(x)} = t$$

$$\Rightarrow t \approx 18{,}44$$

d.h. der vermutete Todeszeitpunkt ist vor 1844 Jahren.

Summen, Produkte und vollständige Induktion

Definition (Summenzeichen, Produktzeichen)

Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\sum_{k=1}^{0} a_k := 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k := a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Analog setzen wir

$$\prod_{k=1}^{0} a_k := 1, \quad \prod_{k=1}^{n} a_k := a_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k$$

d.h. $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

Bemerkung Diese formale Definition können wir ausweiten auf

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

für $m \leq n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, und ebenso $\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot \ldots \cdot a_n$

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{4} 5k = 5 + 10 + 15 + 20 = 50$$

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{5} x = x + x + x + x + x = 5x$$

Diese Notation wird im Folgenden sehr hilfreich sein, um Pünktchen und Missverständnisse zu vermeiden.

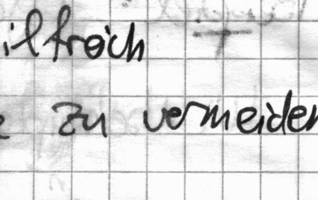
Nun kommen wir zu einem wichtigen Beweisprinzip das oft bei Aussagen über natürliche Zahlen verwendet wird.

Satz (Vollständige Induktion)

Sei $P(n)$ eine Aussage über natürliche Zahlen.
Falls gezeigt ist, dass

1) $P(1)$ gilt, sowie
2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

so gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



__Beweis__: Wir erfordern ohne axiomatischen Beweis folgenden

__Fakt__: Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein minimales Element.

Sei nun $A := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ gilt nicht}\}$. Wir nehmen an, dass $P(1)$ wahr ist, und $\forall n \in \mathbb{N}: P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Angenommen, $A \neq \emptyset$ („angenommen, es gibt ein Gegenbeispiel").
Dann sei $n^* := \min(A)$.

Da $P(1)$ wahr ist, ist $n^* > 1$. Damit ist aber $n^* - 1 \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ Es gilt, dass $P(n^*-1)$ wahr ist, aber nicht $P(n^*)$

$\Rightarrow$ Dies ist ein Widerspruch zu $P(n^*-1) \Rightarrow P(n^*)$ $\square$

__Beispiel__: (Gaußsche Summenformel)

Wir behaupten, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Der Beweis erfolgt per Induktion.

- Zunächst, sei $n = 1$. („Induktionsverankerung"/„Induktionsanfang")

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad \Rightarrow P(1) \text{ ist gezeigt.}$$

- Nun nehmen wir an, dass $P(n)$ gilt, und wollen $P(n+1)$ folgern.

D.h. wir nehmen an, dass für irgendein $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
(„Induktionsannahme")

Nun betrachten wir $\sum_{k=1}^{n+1} k$ („Induktionsschritt")

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{\text{Def. von } \Sigma}{=} (n+1) + \sum_{k=1}^{n} k \overset{\text{Induktionsannahme}}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad \text{wie gewünscht} \quad \square$$

Beispiel: (Geometrische Summe)

Sei $q > 0$ eine reelle Zahl. Sei dazu $q \neq 1$.

Behauptung: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Beweis per Induktion.

1) Sei $n=1$. (Ind. vor.)

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q = \frac{(1-q)(1+q)}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

2) Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ (Ind. ann.)

3) Wir betrachten $n \rightsquigarrow n+1$ (Ind. schritt)

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k \overset{\text{Ind. ann.}}{=} q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1} \cdot (1-q)}{1-q} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{\cancel{q^{n+1}} - q^{n+2} + 1 - \cancel{q^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \quad \square$$