Ergänzungsvorlesung:

Wiederholung von Rechenregeln:

- Nachdem wir Brüche, Wurzeln, Potenzen und Logarithmen eingeführt haben, wiederholen wir kurz alle wichtigen Regeln für diese grundlegenden Rechenoperationen

(* Bin. Formeln *)

- Seien $a, a', c \in \mathbb{Z}$, $b, b', d \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$

A.

1) $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a+a'}{b}$

2) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

3) $\frac{a}{b} + \frac{a}{b'} \neq \frac{a}{b+b'}$! stattdessen:

4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$, und somit

5) $\frac{a}{b} + \frac{a}{b'} = \frac{a(b+b')}{bb'}$

6) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, und folglich

7) $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$, $\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

- Nun, seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

B.

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ (sowie damit $a^0 = 1$)

2) $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \neq a^{(x^y)}$!

3) $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$

4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Insbesondere,

5) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, und folglich

6) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

7) $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$!

Nun, seien

C. 1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

2) $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$, und folglich

3) $\log_b(\frac{1}{x}) = \log_b(x^{-1}) = -\log_b(x)$ sowie

4) $\log_b(\frac{y}{x}) = \log_b(y) - \log_b(x)$

5) $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$, wobei $\ln(x) = \log_e(x)$

6) $\log_b(1) = 0$

- Die Regeln für Logarithmen sind leicht aus den Potenzgesetzen zu folgen
- Die Potenzgesetze hingegen sind aus der Definition zu beweisen, können aber mit der Intuition von wiederholter Multiplikation motiviert werden

- Erinnerung: Für $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}$,

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ Mal}}$$

$$\Rightarrow n \cdot (a+b) = \underbrace{(a+b) + (a+b) + \ldots + (a+b)}_{n \text{ Mal}} = \overbrace{(a + \ldots + a)}^{n \text{ mal}} + \overbrace{(b + \ldots + b)}^{n \text{ mal}} = n \cdot a + n \cdot b$$

· Ähnlich können wir bei den Potenzgesetzen denken

· Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $m,n \in \mathbb{N}$: Dann haben wir quasi als „Gedankenstütze"

zu B.a) $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ Mal}} = \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{(b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ mal}} = a^n \cdot b^n$, und

zu B.1) $a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ mal}} = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m \text{ mal}} = a^{n+m}$

Zu B.2): $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ mal}} = \underbrace{\underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot \ldots \cdot a)}_{m}}_{n \text{ mal}}$

· Die Aussage, dass $a^0 = 1$ mag auf den ersten Blick unintuitiv erscheinen, die Schlüsselbetrachtung ist jedoch, dass für $a>0$,

$$a \cdot a^0 = a^1 \cdot a^0 = a^{1+0} = a^1 = a$$

Division durch a auf beiden Seiten liefert das gewünschte Ergebnis

<u>Bemerkung</u>: 0^0 ist a priori nicht definiert. Oft verwendet man jedoch die Konvention, dass

$$0^0 := 1$$

(* Bin. Formeln *):

1) $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 + ba - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Injektivität und Surjektivität

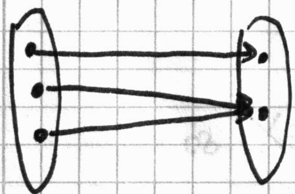
Definition Seien X, Y Mengen, $f: X \to Y$ eine Funktion.
f heißt

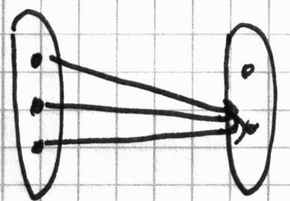
1) injektiv, falls $\forall x_1, x_2 \in X: (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

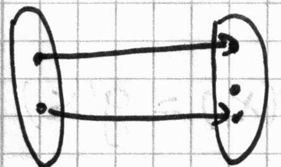
2) surjektiv, falls $\forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$

3) bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Bsp.:

1)  ist nicht inj., surj.

2)  ist nicht inj., nicht surj.

3)  ist inj., nicht surj.

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht inj., nicht surj.

$(\nexists x: f(x) = -1 \ ; \ f(1) = f(-1) \wedge 1 \neq -1)$

4) $f: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = x^2$ ist inj., surj.

<u>Proposition</u>: Seien X, Y, Z Mengen, $f: Y \to Z$, $g: X \to Y$ Funktionen (folglich $(f \circ g): X \to Z$).

1) Sind f, g injektiv, so auch $f \circ g$

2) Sind f, g surjektiv, so auch $f \circ g$

3) Sind f, g bijektiv, so auch $f \circ g$

<u>Beweis</u>: Zur Erinnerung: $f \circ g$ ist definiert über

$$\forall x \in X: \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

zu 1): Seien f, g injektiv, seien $x_1, x_2 \in X$ so dass $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$.

$$(f \circ g)(x_1) = f(g(x_1))$$
$$\shortparallel$$
$$(f \circ g)(x_2) = f(g(x_2))$$

$$g(x_1), g(x_2) \in Y \overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} g(x_1) = g(x_2)$$

$$\overset{g \text{ inj}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

zu 2): Sei $z \in Z$ beliebig.

f surj. $\Rightarrow \exists y \in Y: f(y) = z$

g surj. $\Rightarrow \exists x \in X: g(x) = y$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y) = z$.

3) folgt aus 1) + 2). □