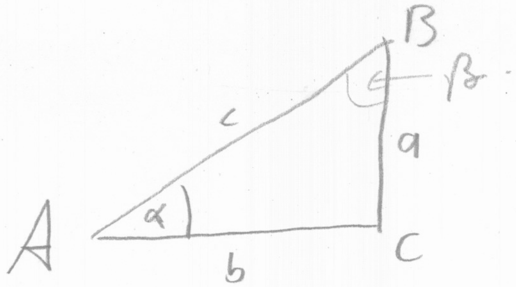
Trigonometrische Funktionen

Sei



ein rechtwinkliges Dreieck

Def: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$

$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ ("complementi sinus" $\cos(\alpha) = \sin(\beta)$)

$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

La: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (hier $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$
$\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$)

Bew: Nach Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{a}{c}\right)}_{\sin(\alpha)}^2 + \underbrace{\left(\frac{b}{c}\right)}_{\cos(\alpha)}^2 = 1$$

Additionstheoreme:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos\beta + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

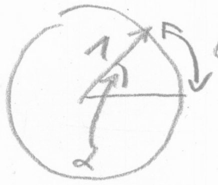
Speziell: $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Problem funktioniert erstmal nur wenn $0 \leq \alpha \leq 90°$

Setze $\sin(\alpha) := \sin(90° - \alpha)$, wenn $90° \leq \alpha \leq 180°$,
$\sin(\alpha) = -\sin(\alpha)$, $180° \leq \alpha \leq 360°$

Benutze statt Winkel das Bogenmaß



Länge = Bogenmaß des Winkels α

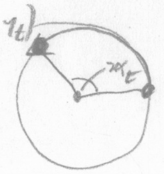
Länge des gesamten Kreises $= 2\pi$

	Winkel	Bogenmaß
Bsp:	$\alpha = 0°$	0
	$\alpha = 90°$	$\frac{\pi}{2}$
	$\alpha = 180°$	π
	$\alpha = 60°$	$\frac{\pi}{3}$

Allgemein: $\alpha = x°$, dann $\frac{2\pi}{360} \cdot x$ entsprechendes Bogenmaß.
$0 \le x \le 360$

Sei $t \in \mathbb{R}$, dann "wickeln" wir eine Strecke der Länge $|t|$ am Einheitskreis ab, Ist $t \geq 0$ in positiver Drehrichtung (= entgegen dem Uhrzeigersinn!), ist $t < 0$ in negativer Drehrichtung.

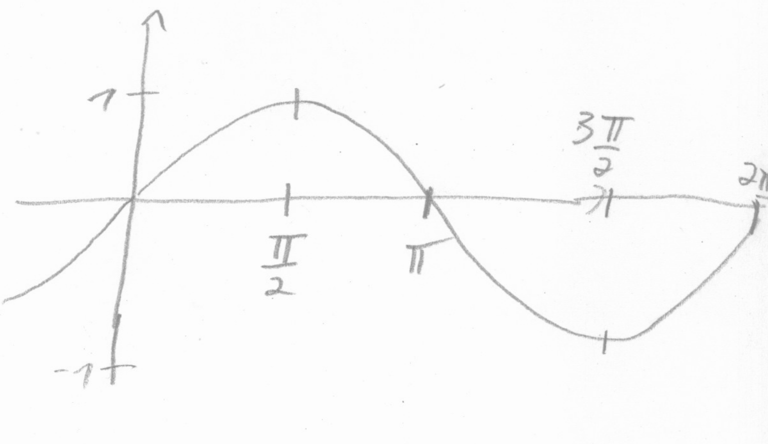
$\Rightarrow$



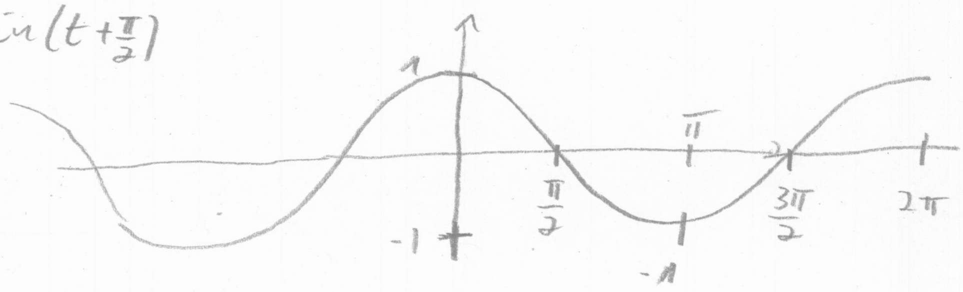
Wir erhalten entsprechenden Winkel α_t und (x_t, y_t) auf dem Kreis
$$(x_t, y_t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Def: $\sin(t) := \sin(\alpha_t)$
$\cos(t) := \cos(\alpha_t)$

Bsp:
$\sin(0) = 0$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(90°) = 1$
$\sin(\pi) = \sin(180°) = 0$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$
$\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$



$\cos(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$



Es gilt: $-1 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$-1 \leq \sin(t) \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\cos^2(t) + \cancel{(}\sin^2 t = 1$

$\cancel{\sin}\ \cos(t) = \cos(-t)$

$\sin(t) = -\sin(-t)$

$\sin(t) = \cancel{\cos}\ \sin(t + 2\pi)$

$\cos(t) = \cancel{s}\cos(t + 2\pi)$

Allgemeine periodische Funktion:

$$f(t) = b + a\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}(t - t_0)\right) \quad , a, b \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

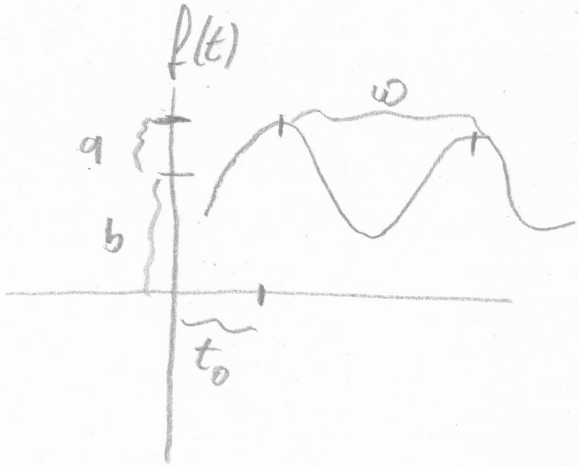
oder $g\cancel{f}(t) = b + a\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}(t - t_0)\right)$

mit b = Ruhelage

a = Amplitude

ω = Periode

t_0 = Phasenverschiebung



Grundbegriffe der Differentialrechnung

Def: Eine Folge $(a_n)_{n=1,2,\dots}$ reeller Zahlen ist das Datum einer reellen Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 1$.

Bsp:
- $1, 2, 3, 4, \dots$, d.h. $a_n = n$ für $n \geq 1$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, d.h. $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$
- $a_1 = 3$, $a_2 = 3{,}1$, $a_3 = 3{,}14$, $a_4 = 3{,}141$ ....
- $1, -1, 1, -1, \dots$, d.h. $a_n = (-1)^{n+1}$

$(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent, wenn "die a_n sich einem ~~Wert~~ Grenzwert annähern"

Def: Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert (oder Limes) a, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Schreibweise: $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ oder $a_n \to a$, $n \to \infty$

Übung: $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent gegen ~~a, b~~ zwei Zahlen a und b, so gilt schon $a = b$

Bsp:
- Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0, denn
  Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
  Dann gilt für $n \geq n_0$
  $$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$
- Die Folge $a_n = n$ konvergiert gegen kein $a \in \mathbb{R}$, denn angenommen, $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiere gegen ein $a \in \mathbb{R}$.
  Sei $\varepsilon = 1$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass
  $$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$
  Dann gilt $|a_n| \leq |a| + 1$ für alle $n \geq n_0$. Dies ist ein Widerspruch!

~~Bsp~~ Unendliche Summen; Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge.

Definiere $b_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, d.h. $b_1 = a_1$

$b_2 = a_1 + a_2$

$b_3 = a_1 + a_2 + a_3 = b_2 + a_3$

$\vdots$

Ist $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent gegen ein $b \in \mathbb{R}$, so schreibt man

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := b.$$

Sprechweise: Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Bsp: $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + \ldots + x^n$$

für $n \geq 0$

(Begründung: $(x-1)(1+x+\ldots+x^n) =$
$x + \ldots + x^n + x^{n+1} - 1 - x - \ldots - x^n = x^{n+1} - 1$)

Sei $|x| < 1$ und $a_i := x^i$.

Dann gilt $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \frac{1}{1-x}$

Beweis: $b_n := \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

und $x^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$, da $|x| < 1$

Daraus folgt $b_n \to \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$, $n \to \infty$.

Also $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

⚠ Bsp: Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

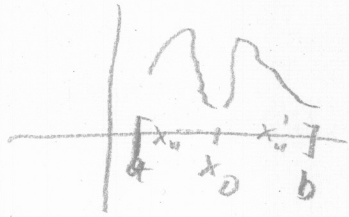
$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$ "Exponentialreihe"

Es gilt: $e^x = \exp(x)$, insb. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ Eulersche Zahl

Sei $D = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in D$,

$D' = D \setminus \{x_0\}$, $f: D' \to \mathbb{R}$ eine Funktion

Def: f hat in x_0 ~~den~~ einen Grenzwert $y \in \mathbb{R}$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ in D' (d.h. $x_n \in D'$ $\forall n \geq 1$), die gegen x_0 konvergieren, gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$



Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y$

Es gilt: $f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, genau dann, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Konvergente Folgen erfüllen einige Rechenregeln, z.B.

sind $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ konvergente Folgen mit Grenzwerte a bzw. b, so ist die Folge $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ konvergent mit Grenzwert $a + b$.

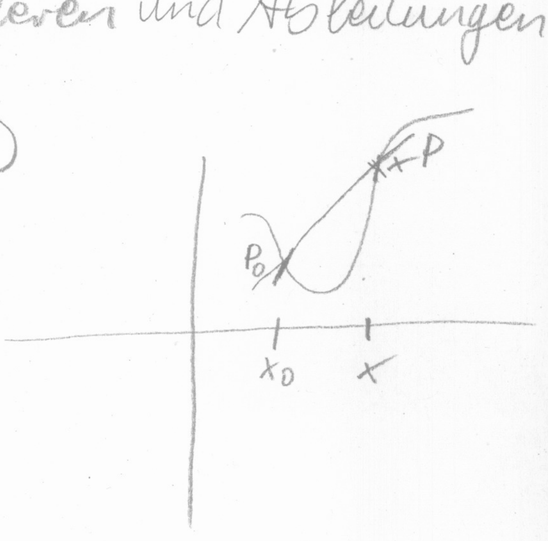
Ebenso für Produkte, Differenzen von Folgen.

⚠ Differenzieren und Ableitungen

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0, x \in D$

Dann liegen $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P = (x, f(x))$ auf dem Graphen von f.

Sei g_x die Gerade durch P_0 und P



Ist $P \neq P_0$, so ist der Anstieg α_x dieser Geraden

$$\alpha_x = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{"Differenzenquotient"})$$

Für $x \to x_0$ geht g_x anschaulich gegen die Tangente im Punkt P_0

Die ~~zur~~ Steigung der Tangente ~~von~~ in P_0 heißt die Ableitung von f im Punkt x_0 (sofern sie existiert!)

Def: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a,b)$.

f heißt in x_0 differenzierbar, falls eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $a = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dann $f'(x_0) := a$ (oder $\frac{df}{dx}(x_0)$)

f heißt differenzierbar, wenn f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$.

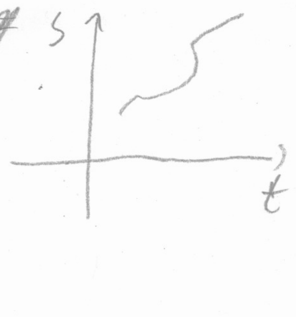
Dann heißt $f': (a,b) \to \mathbb{R};\ x \mapsto f'(x)$ die Ableitung von f

Bsp: $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ "steigt" in der Nähe von x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ "fällt" in der Nähe von x_0

Physikalische Relevanz: Ableitungen messen Änderungsraten

$f(t)$ = zurückgelegte Strecke s zur Zeit t



Dann $f'(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)$ = Geschwindigkeit zur Zeit t_0