Integration durch Substitution

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so ist

$$(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x), \text{ d.h.}$$

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))$$

bzw.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} := F(g(b)) - F(g(a))$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ F \text{ Stamfuktion} \\ \text{von } f}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx \text{ , d.h. } \int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

Bsp:

$$\int (\sin(x))^n \cos(x)\, dx = ? \quad , n \neq -1$$

Setze

$$f(x) = x^n \text{ , d.h. } F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ Stammfunktion von } f(x)$$

$$g(x) = \sin(x) \text{ , d.h. } g'(x) = \cos(x)$$

und

$$\int (\sin(x))^n \cos(x)\, dx = \frac{1}{n+1} (\sin(x))^{n+1}$$

Allgemein: Schreibe $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\,dx \left(= \cancel{\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx}\right) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$

Symbolisch $g'(x) = \frac{dg(x)}{dx}$, bzw. $dg(x) = g'(x)\cdot dx$

Setze also $y = g(x)$

Bsp:

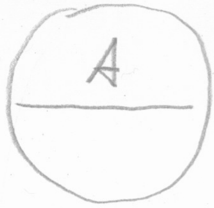
1) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = ?$

Setze $y = g(x) = x^2$. Dann $dy = 2x\,dx$. $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \int_{g(1)}^{g(2)} f(y)\,dy$$

$$= \int_1^2 f(g(x))\, g'(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot 2x\,dx = 2$$

2) Berechne Fläche des Einheitskreises $= 2\cdot$ Fläche von A



$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

Es gilt $A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$, denn $\sqrt{1-x^2}$ hat Funktionsgraph

Setze $x = \sin(t)$, d.h. $dx = \cos(t)\,dt$. Damit x von -1 bis 1 läuft, muss t von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ laufen.

Also

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{=\cos t} \cos(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$$

Partielle Integration

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\,dt = \underbrace{\sin(t)\cdot\cos(t)\Big|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}}}_{=0} \cancel{A} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)\cdot\overset{(-)}{\sin}(t)}_{-(1-\cos^2(t))}\,dt$$

$$\Rightarrow 2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) = \frac{\pi}{2}$$

Also gilt

Einheitskreis

Flächeninhalt von  $= 2\cdot A = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$

3) $\displaystyle\int_{0}^{a} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{1}{3}a^3$